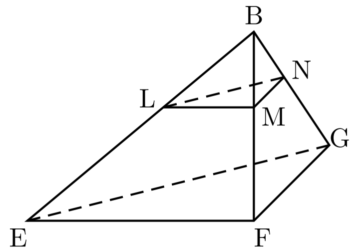
Devoir surveillé n° 7

3e – Le mercredi 6/2/2008

Calculatrice autorisée

■ Exercice 1.

On a représenté ci-contre, une pyramide BEFG.



On sait que :

- EFG, EFB et BFG sont trois triangles rectangles en F ;
- EF = 6 cm ; FG = 3 cm ;
- BF = 5 cm.

1) a) Calculer la longueur EG. On donnera la valeur exacte sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

b) Calculer la valeur approchée au degré le plus proche de l'angle $\widehat{\mathrm{GEF}}$.

c) Calculer l'aire du triangle EFG.

d) Prouver que le volume de la pyramide BEFG est de 15 cm^3.

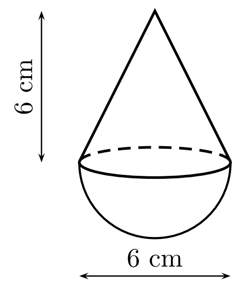
2) M est le point de l'arête [BF] tel que BM = 2 cm.
On coupe la pyramide BEFG par le plan passant par M et parallèle à la base BEFG. On obtient la pyramide BLMN, réduction de la pyramide BEFG.

a) Quel est le rapport de réduction ?

b) En déduire le volume de la pyramide BLMN. On donnera la valeur exacte en cm^3.

■ Exercice 2.

Un culbuto [1] est constitué d'une demi-boule surmontée d'un cône (voir figure).



1) Calculer la valeur exacte du volume de ce culbuto, en cm^3. Montrer que la valeur approchée à l'unité la plus proche de ce volume est de 113 cm^3.

2) Un autre modèle, de taille plus grande, est un agrandissement du modèle ci-contre d'un coefficient de 2,5. Calculer le volume du grand modèle : donner la valeur en litres, arrondie au centième.

■ Exercice 3.

On donne l'expression littérale $\mathrm{D} = (3x+1)^2 - (x-2)^2$

1) Développer et réduire D.

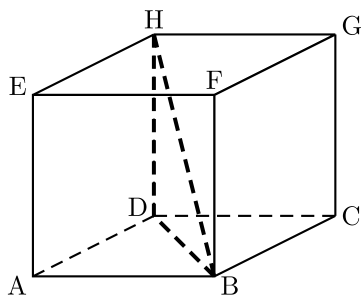
2) Factoriser D.

3) Calculer D lorsque $x = \sqrt{3}$. Donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

4) Résoudre l'équation $(2x+3)(4x-1) = 0$

■ Exercice 4.

ABCDEFGH est un cube de 5 cm d'arête.



1) Calculer BD.

2) Montrer que $\tan \widehat{\mathrm{DHB}} = \sqrt{2}$. En déduire l'angle $\widehat{\mathrm{DHB}}$, arrondi au dixième de degré le plus proche.

3) Dessiner le triangle DBH en vraie grandeur.

4) Déduire de la question 2 la longueur BH, arrondie au millimètre.

1. Jouet lesté dans sa partie basse qui se remet en position verticale en oscillant lorsqu'on l'écarte de cette position.

Correction du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 7

■ Exercice 1.

1) **a)** Dans le triangle EFG, rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore :
$\mathrm{EG}^2 = \mathrm{EF}^2 + \mathrm{FG}^2 \qquad \mathrm{EG}^2 = 6^2 + 3^2 \qquad \mathrm{EG}^2 = 45 \qquad \mathrm{EG} = \sqrt{45} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = \mathbf{3\sqrt{5}\ cm}$

b) Dans le triangle EFG, rectangle en F : $\tan \widehat{\mathrm{GEF}} = \dfrac{\mathrm{FG}}{\mathrm{EF}} \qquad \tan \widehat{\mathrm{GEF}} = \dfrac{3}{6} \qquad \widehat{\mathrm{GEF}} \approx \mathbf{27°}$

c) $\mathrm{A}_{\mathrm{EFG}} = \dfrac{\mathrm{EF} \times \mathrm{FG}}{2} = \dfrac{6 \times 3}{2} = \mathbf{9\ cm^3}$

d) $\mathrm{V}_{\mathrm{BEFG}} = \dfrac{\mathrm{A}_{\mathrm{EFG}}\mathrm{A} \times \mathrm{BF}}{3} = \dfrac{9 \times 5}{3} = \mathbf{15\ cm^3}$

2) **a)** Le rapport de réduction vaut : $k = \dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BF}} = \mathbf{\dfrac{2}{5}}$

b) Par conséquent : $\mathrm{V}_{\mathrm{BLMN}} = \mathrm{V}_{\mathrm{BEFG}} \times k^3 = 15 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \mathbf{\dfrac{24}{25}\ cm^3 = 0{,}96\ cm^3}$

■ Exercice 2.

1) $\mathrm{V}_{\text{culbuto}} = \mathrm{V}_{\text{cône}} + \mathrm{V}_{\text{demi-boule}} = \dfrac{\pi \times 3^2 \times 6}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3}\pi \times 3^3 = \mathbf{36\pi\ cm^3 \approx 113\ cm^3}$

2) le volume de l'agrandissement vaut : $\mathrm{V}' = 36\pi \times 2{,}5^3 \approx 1767\ \mathrm{cm}^3 \approx \mathbf{1{,}77\ L}$

■ Exercice 3.

1) $\mathrm{D} = 9x^2 + 6x + 1 - (x^2 - 4x + 4) = 9x^2 + 6x + 1 - x^2 + 4x - 4 = \mathbf{8x^2 + 10x - 3}$

2) $\mathrm{D} = [(3x+1) + (x-2)][(3x-1) - (x-2)] = (3x + 1 + x - 2)(3x + 1 - x + 2) = \mathbf{(4x - 1)(2x + 3)}$

3) $\mathrm{D} = 8(\sqrt{3})^2 + 10\sqrt{3} - 3 = 24 + 10\sqrt{3} - 3 = \mathbf{21 + 10\sqrt{3}}$

4) $2x + 3 = 0$ ou $4x - 1 = 0$ $\qquad 2x = -3$ ou $4x = 1$ $\qquad x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{4}$

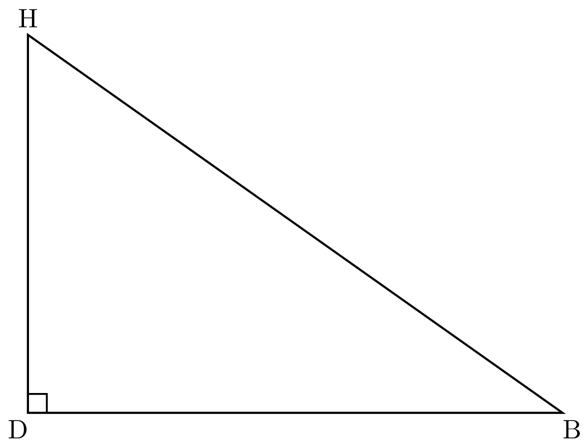
Les solutions sont $\mathbf{-\dfrac{3}{2}}$ **et** $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

■ Exercice 4.

1) Dans le triangle ABD, rectangle en A, d'après le théorème de Pyhthagore :
$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AB}^2 \qquad \mathrm{BD}^2 = 5^2 + 5^2 \qquad \mathrm{BD}^2 = 50 \qquad \mathrm{BD} = \sqrt{50} = \sqrt{25}\sqrt{2} = \mathbf{5\sqrt{2}\ cm}$

2) Dans le triangle BDH, rectangle en D : $\tan \widehat{\mathrm{DHB}} = \dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DH}} \qquad \tan \widehat{\mathrm{DHB}} = \dfrac{\cancel{5}\sqrt{2}}{\cancel{5}} \qquad \mathbf{\tan \widehat{DHB} = \sqrt{2}}$
Donc, l'angle $\mathbf{\widehat{DHB} \approx 54{,}7°}$

3) Voir ci-dessous.



4) Dans le triangle DBH, rectangle en D : $\cos \widehat{\mathrm{DHB}} = \dfrac{\mathrm{HD}}{\mathrm{HB}} \qquad \cos 54{,}7° = \dfrac{5}{\mathrm{HB}} \qquad \mathrm{HB} = \dfrac{5}{\cos 54{,}7°} \approx \mathbf{8{,}7\ cm}$