Pavages hyperboliques

P. Fradin

3 juillet 2010

Résumé

Quelques éléments de base pour créer ses pavages hyperboliques.

Table des matières

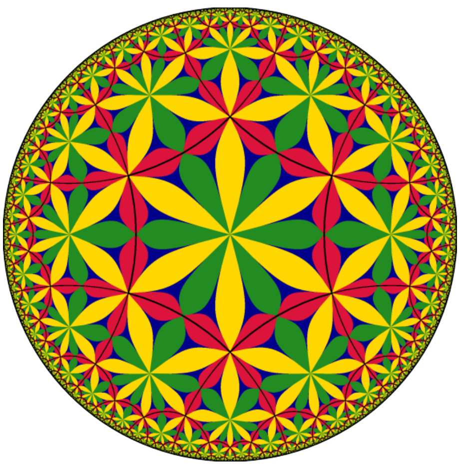


FIGURE 1: Pavage $(6,4)$, étape 5

1 Droites hyperboliques

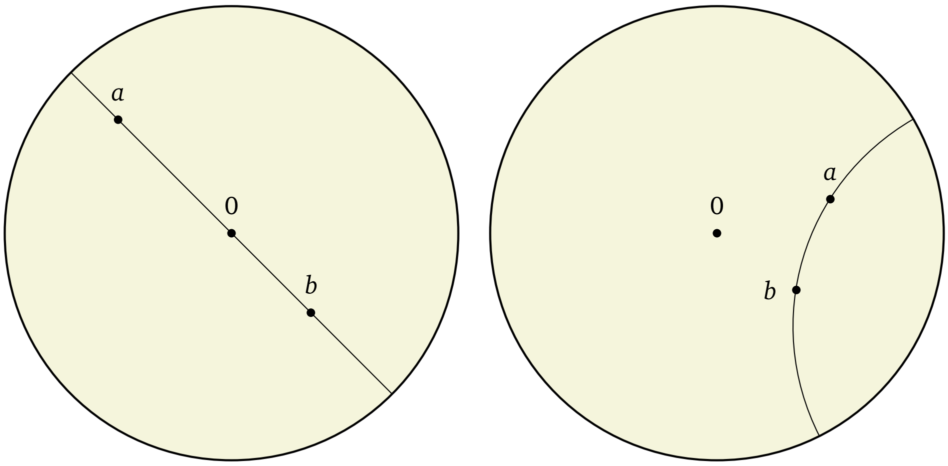
Nous nous plaçons dans le disque de Poincaré, noté $\mathbb{H}$, c'est à dire le disque euclidien ouvert de centre 0 et de rayon 1, les points sont confondus avec leur affixe complexe, et le cercle unité est noté $\mathscr{C}$.

Nous n'aurons pas besoin de la définition mathématique de la métrique hyperbolique, nous nous contenterons de définir les droites hyperboliques ainsi que certaines transformations.

Droites

Étant donnés deux points distincts a et b de $\mathbb{H}$, la droite hyperbolique (ab) est :

- La droite euclidienne (ab) (intersectée avec le disque) lorsque a, b et 0 sont alignés.
- Le cercle orthogonal à $\mathscr{C}$ passant par a et b sinon.

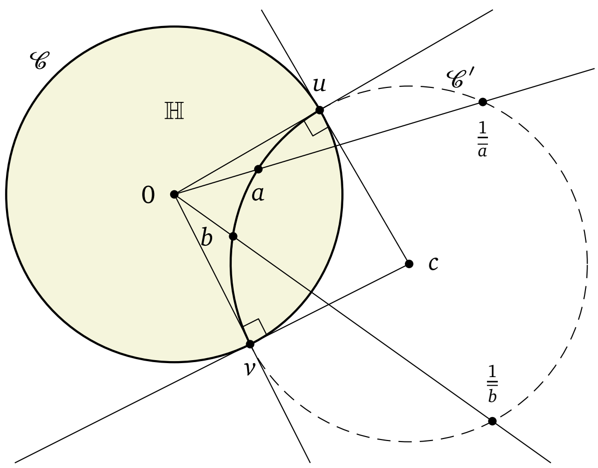


a, b, 0 alignés

a, b, 0 non alignés

Figure 2: Droites hyperboliques

Dans le second cas nous avons besoin de déterminer le centre du cercle $\mathscr{C}'$, orthogonal à $\mathscr{C}$ passant par a et b. Ces deux cercles se coupent en deux points u et v, en ces deux points les tangentes sont orthogonales. L'inversion de cercle $\mathscr{C}$ ($z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$) fixe u et v, conserve les angles non orientés, elle transforme donc $\mathscr{C}'$ en un cercle passant u et v et orthogonal à $\mathscr{C}$, par conséquent $\mathscr{C}'$ est globalement invariant par cette inversion, on en déduit que $\frac{1}{\bar{a}}$ et $\frac{1}{\bar{b}}$ sont sur $\mathscr{C}'$, ce qui permet de calculer le centre c comme intersection des médiatrices euclidiennes : med(a,b) et med$(a,\frac{1}{\bar{a}})$.



2 Isométries hyperboliques

On admet que :

- La conjugaison est une isométrie hyperbolique de $\mathbb{H}$.
- Les homographies de la forme : $z \mapsto \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ avec $|b| < |a|$ sont des isométries hyperboliques de $\mathbb{H}$.

Ces homographies peuvent être représentées par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec un déterminant égal à $|a|^2 - |b|^2$ et qui est strictement positif, cette représentation a l'avantage de permettre l'utilisation du produit matriciel pour calculer des composées, on voit d'ailleurs facilement que ces isométries hyperboliques forment un groupe pour la composition.

2.1 Les rotations

Lorsque le centre de la rotation est 0, la rotation d'angle θ est la rotation euclidienne :

$$R_{0,\theta} : z \mapsto e^{i\theta} z = \frac{e^{i\theta/2} z + 0}{0z + e^{-i\theta/2}}$$

ou encore $R_{0,\theta} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$, ce qui est bien une isométrie hyperbolique.

Lorsque le centre est un point $a \in \mathbb{H}$ on se ramène au cas précédent en conjugant $R_{0,\theta}$ avec l'isométrie $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ \overline{a} & 1 \end{pmatrix}$ qui envoie 0 en a. On définit alors la rotation de centre a et d'angle θ en posant :

$$R_{a,\theta} = T \circ R_{0,\theta} \circ T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ \overline{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -\overline{a} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} - |a|^2 e^{-i\theta/2} & -a2i\sin(\theta/2) \\ \overline{a}2i\sin(\theta/2) & e^{-i\theta/2} - |a|^2 e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

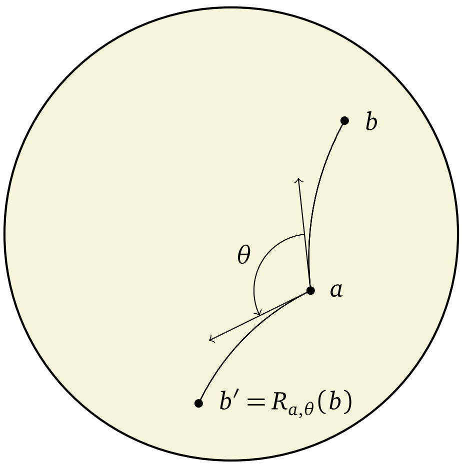


FIGURE 3: Rotation de centre a, d'angle θ

Le cas de la symétrie centrale par rapport à a correspond à l'angle $\theta = \pi$, ce qui donne alors pour $z \in \mathbb{H}$:

$$\boxed{s_a(z) = \frac{(1+|a|^2)z - 2a}{2\overline{a}z - 1 - |a|^2}}$$

2.2 Les réflexions

Par rapport à une droite $\mathscr{D}_0$ passant par 0 : la réflexion $s_{\mathscr{D}_0}$ est la réflexion euclidienne, en effet si $e^{i\theta}$ désigne un des deux points de cette droite situé sur le cercle $\mathscr{C}$, alors l'image de z par cette réflexion est $s_{\mathscr{D}_0}(z) = e^{2i\theta}\overline{z}$, c'est donc la composée de la conjugaison et d'une rotation de centre 0, or ce sont deux isométries hyperboliques.

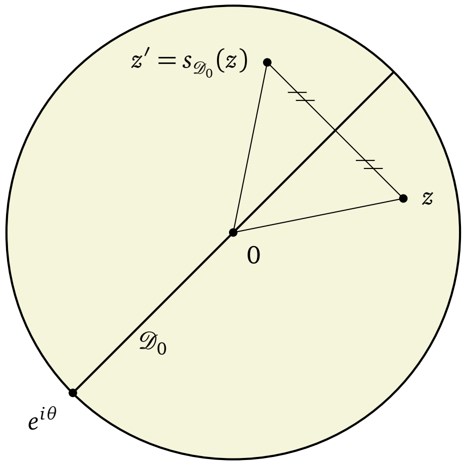


FIGURE 4: Réflexion d'axe $\mathscr{D}_0$

Par rapport à une droite hyperbolique $\mathscr{D}$ ne passant pas par 0 : soit a un point de cette droite, on se ramène au cas précédent en conjugant avec l'isométrie $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ \overline{a} & 1 \end{pmatrix}$ qui envoie 0 en a. Un raisonnement géométrique permet de montrer que $s_{\mathscr{D}} = T \circ s_{\mathscr{D}_0} \circ T^{-1}$ n'est autre que l'inversion par rapport au cercle (euclidien) qu'est $\mathscr{D}$, c'est à dire :

$$\boxed{s_{\mathscr{D}}(z) = c + \frac{r^2}{\overline{z - c}}}$$

où c désigne le centre et r le rayon de ce cercle, que nous savons calculer d'après la section précédente.

Preuve :

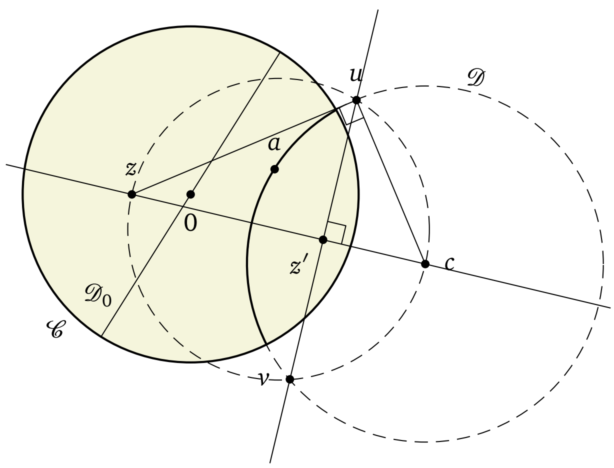


FIGURE 5: La réflexion $s_{\mathscr{D}}$ est l'inversion par rapport à $\mathscr{D}$.

T^{-1} transforme $\mathscr{D}$ en $\mathscr{D}_0$, la réflexion d'axe $\mathscr{D}_0$ conserve $\mathscr{D}_0$, puis T transforme $\mathscr{D}_0$ en $\mathscr{D}$, donc chaque point de $\mathscr{D}$ est fixe par $s_{\mathscr{D}}$, et ce sont les seuls points fixes. Un cercle (ou une droite) orthogonal à $\mathscr{D}$ est transformé en un cercle (ou une droite) orthogonal à $\mathscr{D}_0$ par T^{-1}, celui-ci est conservé globalement par $s_{\mathscr{D}_0}$, et donc tout cercle, ou droite, orthogonal à $\mathscr{D}$ est globalement conservé par $s_{\mathscr{D}}$.

On en déduit que la droite (zc) est globalement invariante, donc z', l'image de z, est sur la droite (zc). De même, la droite (uc) est globalement invariante, u étant fixe, mais pas c.

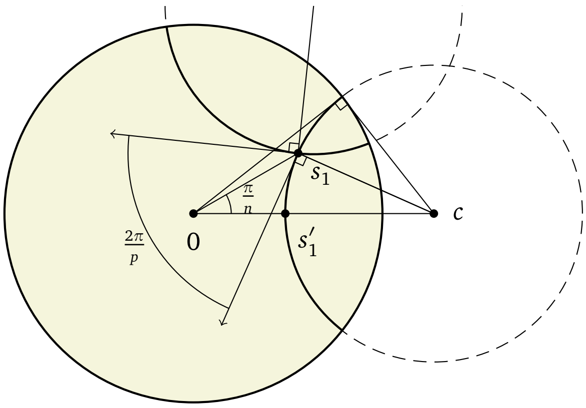
Le cercle de diamètre $[zc]$ est orthogonal à la droite (zc) donc son image est un cercle ou une droite orthogonal à (zc) (puisque (zc) est globalement invariante) et contenant u, mais cette image ne peut pas être le cercle lui-même, sinon c serait fixe, donc cette image est la perpendiculaire à (zc) passant par u. On en déduit que z' est à l'intersection de cette droite avec (zc), c'est donc l'image de z par l'inversion par rapport au cercle $\mathscr{D}$. □

3 Technique de pavage

3.1 Polygônes réguliers

Les pavages dont nous allons parler sont faits à partir de polygônes réguliers, ceux-ci sont caractérisés par leur type (n,p) où n désigne le nombre de côtés, et p le nombre de ces polygônes qui se rencontrent en un sommet.

Pour construire un polygône régulier à n côtés, de centre 0, il nous suffit de calculer un seul de ses sommets, les autres s'en déduiront par des rotations. Regardons un sommet s_1 et ses deux côtés adjacents (en considérant que l'axe $(0c)$ est l'axe réel) :



L'angle $\widehat{c0s_1}$ vaut $\frac{\pi}{n}$, et l'angle $\widehat{0s_1c}$ vaut $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{p}$, on en déduit la condition d'existence : $\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{p}<\pi$, c'est à dire :

$$\boxed{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<\frac{1}{2}}$$

En notant r la distance $|c-s_1|$, on obtient avec un peu de trigonométie élémentaire dans le triangle $(c0s_1)$:

$$\boxed{r=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \text{ avec } u=\sin(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{p})+\frac{\cos(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{p})}{\tan(\frac{\pi}{n})}}$$

puis :

$$\boxed{s_1=r\cos(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{p})\sin(\frac{\pi}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}}$$

Les autres sommets se déduisent de s_1 par des rotations de centre 0 et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$. Le point s_1' est le milieu d'un côté du polygône, les autres milieux s'en déduisent aussi par des rotations de centre 0 et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$, on a :

$$\boxed{s_1'=\sqrt{1+r^2}-r}$$

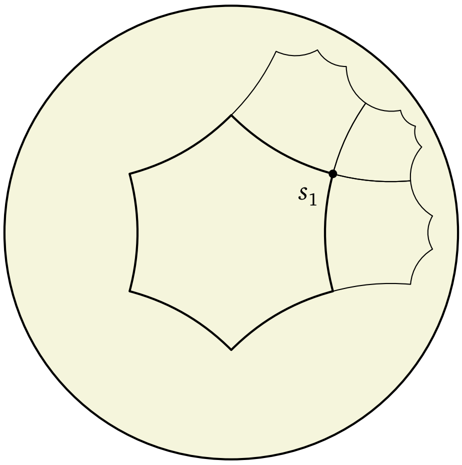


FIGURE 6: Polygône régulier de type (6,4) et 3 voisins

Les voisins ont été obtenus par des rotations du polygône autour de s_1, d'angle $\frac{k\pi}{2}$ avec $1 \leqslant k \leqslant 3$.

3.2 Obtention du pavage

Une fois défini notre polygône régulier, nous allons l'utiliser comme tuile fondamentale de notre pavage, par étapes successives :

- on place une première « rangée » autour de la tuile centrale.
- on place une deuxième « rangée » autour de la première.
- … etc

Un nombre relativement faible d'itérations suffira à donner l'impression sur le dessin d'avoir pavé le disque jusqu'au bord.

La méthode :

- Étape 0 : on dessine la tuile fondamentale.
- Étape $n+1$: pour chaque tuile obtenue à l'étape n, on dessine ses images par les symétries centrales par rapport au mileu de **chaque côté de la tuile principale** (sauf la dernière symétrie centrale qui a permis d'obtenir cette tuile, car elle est inutile).

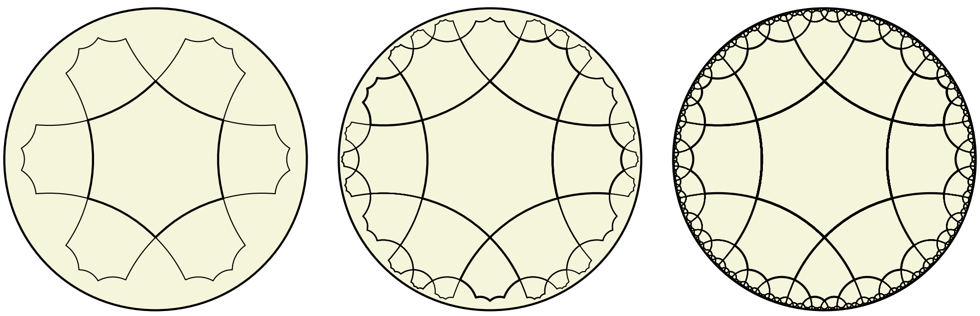


FIGURE 7: Pavage $(6,4)$: étapes 1, 2 et 4

Remarque : à la place des symétries centrales, on peut utiliser les réflexions par rapport aux côtés de la tuile fondamentale.

L'algorithme

```
pavageSimple( polygone, symétrie d'origine, niveau)
dessiner le polygone
si niveau>0 faire
   pour k de 1 à n faire
        si k <> symétrie d'origine alors
                P' reçoit l'image du polygone par la symétrie numéro k
                pavageSimple( P', k, niveau-1)
        fin si
   fin pour
fin si
fin pavageSimple
```

3.3 Dessin par triangles

Une variante que l'on rencontre parfois dans ces pavages est le dessin de chaque tuile sous forme de triangles pleins (centre - sommet - milieu d'un côté adjacent) en alternant deux couleurs de remplissage. On applique l'algorithme précédent à chaque triangle composant la tuile fondamentale. En jouant avec la couleur du fond, on ne dessine qu'un triangle sur deux :

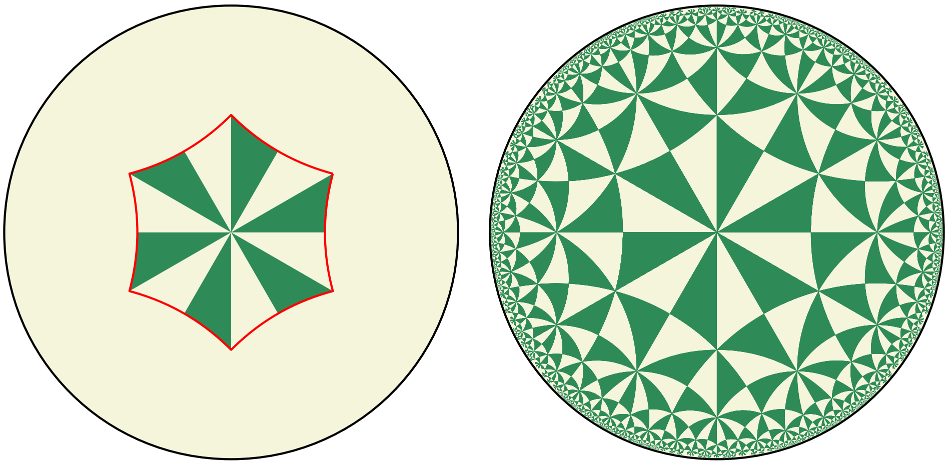


FIGURE 8: Pavage $(6,4)$, étapes 0 et 4

Pour ce type de dessin, on voit la différence entre la méthode utilisant les symétries centrales et celle utilisant les réflexions :

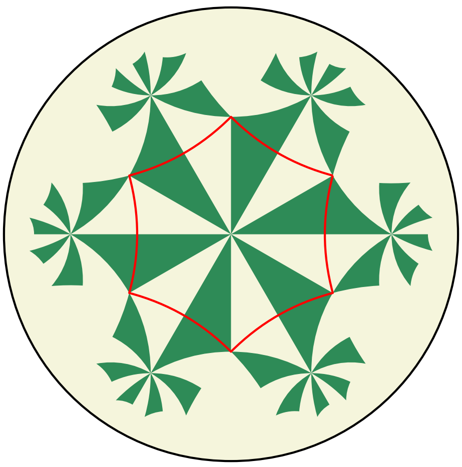


FIGURE 9: Pavage $(6,4)$, étape 1 avec réflexions

4 Conclusion

Voilà ! L'essentiel est dit, il faut ensuite laisser parler son imagination pour varier les façons de remplir la tuile ou bien un triangle. On peut aussi modifier un pavage à l'aide d'isométries hyperboliques.

Ce document est très largement inspiré d'une page de Jos Leys sur la géométrie hyperbolique et ses pavages.

Terminons par un dernier exemple :

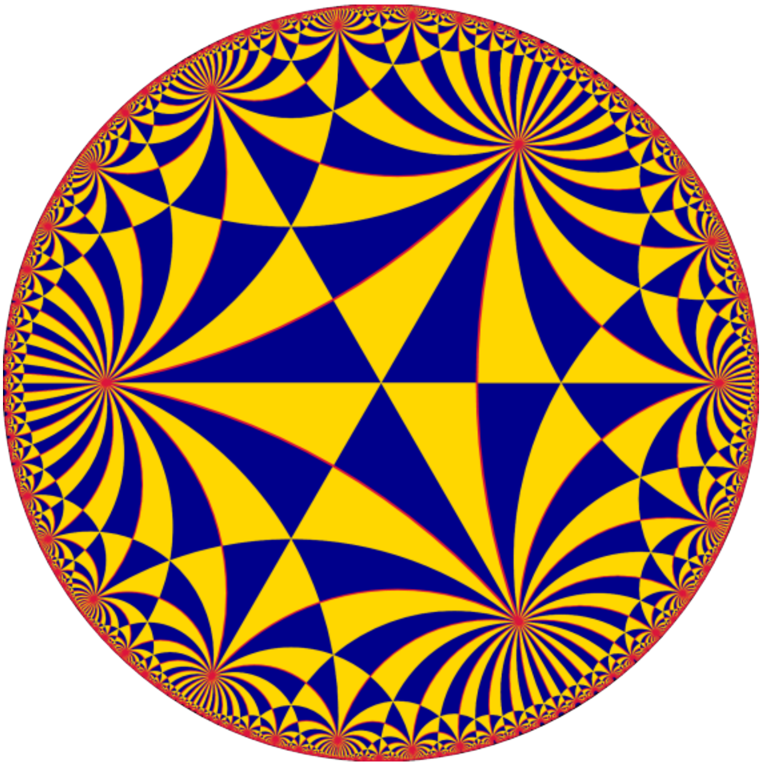


Figure 10: Pavage $(3, 18)$, étape 10