1 Définitions

Définition n°1

Soit a un nombre positif. On appelle *racine carrée* de a le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, tel que

$$\sqrt{a}^2 = a$$

Exemples

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{49} = 7$$

Propriété n°1

Soit a un nombre positif. Alors

$$\sqrt{a^2} = a$$

Exemples

$$\sqrt{6,5^2} = 6,5 \qquad \sqrt{\pi^2} = \pi$$

Applications

$$A = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 \qquad B = \left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\times\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)$$

$$A = 1^2 + 2\times 1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2 \qquad B = \sqrt{5}^2-\sqrt{7}^2$$

$$A = 1+2\sqrt{3}+3 \qquad B = 5-7$$

$$A = 4+2\sqrt{3} \qquad B = -2$$

Réduction d'expressions contenant des racines carrées.

$$A = 3\sqrt{2}+5\sqrt{2} \qquad B = \sqrt{3}-5\sqrt{3}$$

$$A = (3+5)\sqrt{2} \qquad B = (1-5)\sqrt{3}$$

$$A = 8\sqrt{2} \qquad B = -4\sqrt{3}$$

2 Produit et quotient de racines carrées

Propriété n°2

- Soit a et b deux nombres positifs. Alors $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$.
- Soit a un nombre positif et b un nombre strictement positif. Alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemples

$$A=\sqrt{50} \qquad B=\sqrt{48} \qquad C=\sqrt{\frac{75}{12}}$$

$$A=\sqrt{25\times 2} \qquad B=\sqrt{16\times 3} \qquad C=\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$A=\sqrt{25}\times\sqrt{2} \qquad B=\sqrt{16}\times\sqrt{3} \qquad C=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$$

$$A=5\sqrt{2} \qquad B=4\sqrt{3} \qquad C=\frac{5}{2}$$

Ces formules de calculs sur les racines carrées sont très intéressantes (surtout celle sur le produit) pour simplifier et réduire des expressions comportant des racines carrées.

Exemples

$$A=3\sqrt{32}+2\sqrt{18} \qquad B=5\sqrt{12}-2\sqrt{75}$$

$$A=3\sqrt{16\times 2}+2\sqrt{9\times 2} \qquad B=5\sqrt{4\times 3}-2\sqrt{25\times 3}$$

$$A=3\sqrt{16}\times\sqrt{2}+2\sqrt{9}\times\sqrt{2} \qquad B=5\sqrt{4}\times\sqrt{3}-2\sqrt{25}\times\sqrt{3}$$

$$A=3\times 4\times\sqrt{2}+2\times 3\times\sqrt{2} \qquad B=5\times 2\times\sqrt{3}-2\times 5\times\sqrt{3}$$

$$A=12\sqrt{2}+6\sqrt{2} \qquad B=10\sqrt{3}-10\sqrt{3}$$

$$A=18\sqrt{2} \qquad B=0$$

3 L'équation « $X^2 = a$ »

Théorème n°1

Soit a un nombre quelconque et X une expression quelconque.
• Si a est un nombre positif alors l'équation $X^2 = a$ admet 2 solutions : $X = \sqrt{a}$ et $X = -\sqrt{a}$.
• Si a est nul alors l'équation $X^2 = 0$ admet 1 seule solution : $X = 0$.

Exemples

• *Résoudre l'équation* $x^2 = 8$.

Comme 8 est positif alors $x = \sqrt{8}$ et $x = -\sqrt{8}$.

Une autre façon de voir est d'écrire l'équation sous la forme $x^2 - 8 = 0$; on factorise l'expression de gauche pour avoir $(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) = 0$ et on résoud l'équation-produit ainsi obtenue.

• *Résoudre l'équation* $(2x+3)^2 = 10$.

Comme 10 est positif alors

$$\begin{aligned} 2x+3 &= \sqrt{10} & \qquad 2x+3 &= -\sqrt{10} \\ 2x &= \sqrt{10}-3 & \qquad 2x &= -\sqrt{10}-3 \\ x &= \frac{\sqrt{10}-3}{2} & \qquad x &= \frac{-\sqrt{10}-3}{2} \end{aligned}$$

4 Exercices

- *Ecrire C sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a entier relatif et b entier le plus petit possible.*

$$C = 3\sqrt{20} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{125}$$
$$C = 3\sqrt{4\times 5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{25\times 5}$$
$$C = 3\sqrt{4}\times\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{25}\times\sqrt{5}$$
$$C = 3\times 2\times\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\times 5\times\sqrt{5}$$
$$C = 6\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 10\sqrt{5}$$
$$C = 9\sqrt{5}$$

- *Simplifier les écritures des expressions E et F.*

$$E = 2\sqrt{27} + \sqrt{18}\times\sqrt{6}$$
$$E = 2\sqrt{9\times 3} + \sqrt{6\times 3}\times\sqrt{6}$$
$$E = 2\sqrt{9}\times\sqrt{3} + \sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}$$
$$E = 2\times 3\times\sqrt{3} + \sqrt{6}^2\times\sqrt{3}$$
$$E = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$
$$E = 12\sqrt{3}$$

$$F = \left(\sqrt{2} - 4\right)\left(2 + 4\sqrt{2}\right)$$
$$F = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}^2 - 8 - 16\sqrt{2}$$
$$F = 2\sqrt{2} + 8 - 8 - 16\sqrt{2}$$
$$F = -14\sqrt{2}$$

Remarque : De manière générale (Théorème de Pythagore, calcul de longueurs dans un repère orthonormé,...), il faut penser à simplifier les écritures des racines carrées de manière à remarquer plus facilement des particularités. (Par exemple, pour dire que $5\sqrt{12} = 2\sqrt{75}$.)