Rotation 3D autour d'un axe passant par l'origine version 2

Février 2013

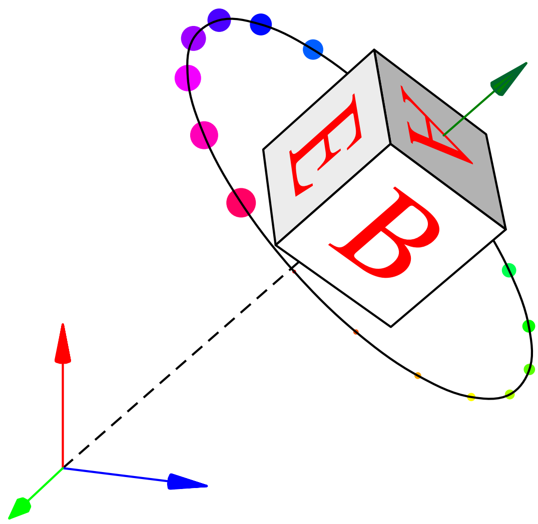
La macro `\psRotationIIID` est un complément de pst-solides3d. Elle utilise comme paramètres :

- `[angle=valeur]`, qui est l'angle de la rotation en degrés ;
- `[axe=x y z]`, qui doit contenir les 3 composantes du vecteur directeur de l'axe en coordonnées cartésiennes. Si on préfère les coordonnées sphériques, on fera suivre celles-ci de `rtp2xyz` : [r θ ϕ rtp2xyz] ;
- et un booléen `[quaternion]` positionné par défaut à `false`. Par défaut le calcul s'effectue avec la matrice de rotation 3D classique. Si le booléen est activé par la simple écriture de [quaternion] dans les options, le calcul s'effectue alors avec la méthode des quaternions.

La macro `\psRotationPoint[...](x,y,z){name}` permet de calculer la position d'un point de coordonnées (x, y, z) et la visualiser par la suite avec par exemple la commande `\psdot(name)`

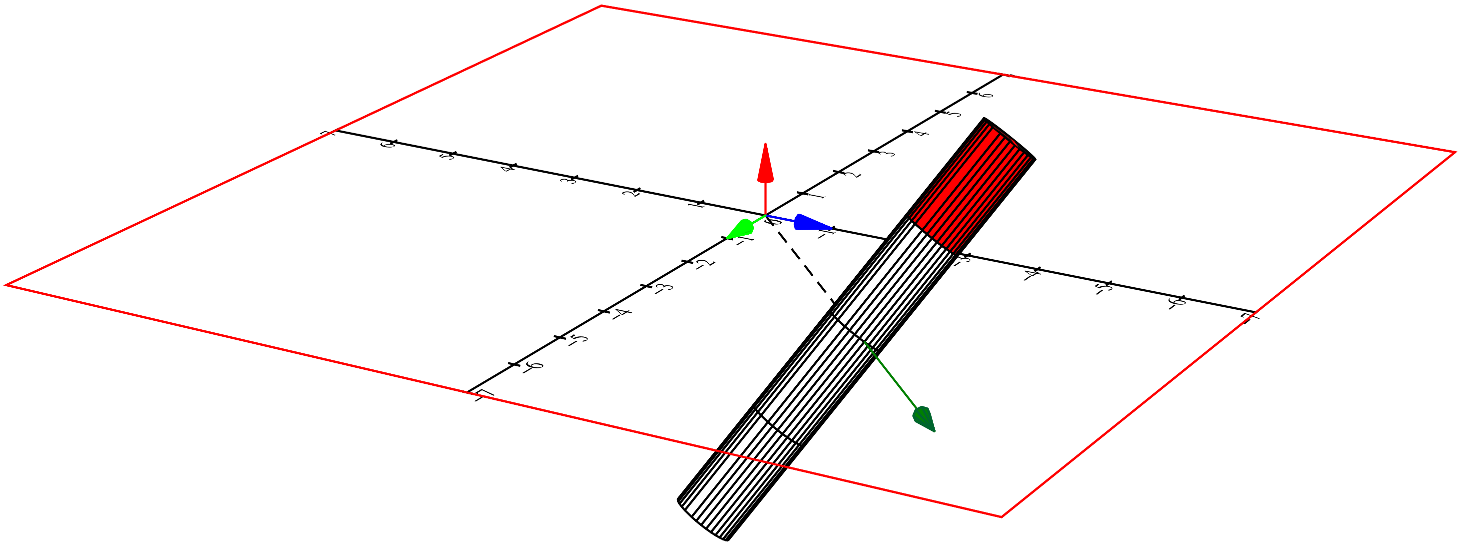
1 Calculs avec la matrice

```
\psRotationIIID[object=cube,
            name=A,
            a=2,
            axe=0 1 1,
            angle=-60,
            RotX=45,
            fillcolor=white](0,3 2 sqrt mul,3 2 sqrt mul)
```



2 Calculs avec le quaternion

```
\def\axe{5 5 0 }
\psRotationIIID[object=cylindre,h=6,r=0.4,
            name=A,
            fcol=2 1 33 { (rouge) } for,
            axe=\axe,
            angle=-40,
            quaternion,
            fillcolor=white,ngrid=4 32](3,3,-3)
```



3 Quelques éléments de théorie

Cet aperçu de la théorie des quaternions et de leur lien avec les rotations en 3D a été écrit par Michel Petitjeanque je remercie sincèrement pour sa contribution.

Le quaternion unitaire est à la rotation 3D ce qu'un nombre complexe de module 1 est à la rotation 2D.

Dans le cas général (non unitaire), le quaternion peut s'écrire $q = p + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. p, a, b et c étant des réels, et $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, et $\mathbf{k}$ étant des imaginaires vérifiant : $\mathbf{i}^2 = -1$, $\mathbf{j}^2 = -1$, $\mathbf{k}^2 = -1$ (pour un complexe on aurait seulement $p + a\mathbf{i}$). Il faut en plus définir les règles des produits entre ces 3 types d'imaginaires. Entre un réel et un des imaginaires, c'est comme d'habitude. Entre les complexes, on a : $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. Maintenant avec ces règles on sait définir le produit de 2 quaternions.

Tout comme un complexe de module 1 représente une rotation 2D, le quaternion unitaire ($p^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1$) représente une rotation 3D, d'axe $\overrightarrow{u}$, avec $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et d'angle θ (défini dans le plan orthogonal à l'axe et orienté par l'axe), avec $p = \cos(\theta/2)$ et $||\overrightarrow{u}|| = \sin(\theta/2)$. $\theta \in [0, \pi]$, $\cos(\theta/2)$ est donc non négatif. Par convention, $\sin(\theta)$ est non négatif. Le cas $\sin(\theta)$ négatif, est équivalent au cas $\sin(\theta)$ positif en changeant $\overrightarrow{u}$ en $-\overrightarrow{u}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est donc pas unitaire dans ces formules. q peut être manipulé comme un vecteur à 4 composantes (p, a, b, c) tout comme un complexe peut être manipulé comme un vecteur à 2 composantes.

Liens avec la matrice de rotation $\mathscr{R}$ (voir formules d'Euler-Rodrigues) :

$$\mathscr{R} = \begin{pmatrix} p^2+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-cp) & 2(ac+bp) \\ 2(ab+cp) & p^2-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-ap) \\ 2(ac-bp) & 2(bc+ap) & p^2-a^2-b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathscr{R}$ est une matrice orthogonale directe, ce qui signifie que ses colonnes forment une base orthonormée directe et donc son déterminant vaut 1.

Le produit de $\mathscr{R}$ par un vecteur $\overrightarrow{v} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ donne :

$$\mathscr{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2p^2-1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2p \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2(ax+by+cz) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Avantages des quaternions sur les matrices:

1. Coût calcul (et espace mémoire) moins élevé dans les produits de quaternions (songez aux jeux videos ou on en enchaîne beaucoup).

2. Pas de perte d'orthogonalité dans les produits de quaternions, il suffit de renormaliser à 1 en cas de nécessité. Quand on multiplie de nombreuses matrices de rotations, les arrondis nous conduisent à une matrice qui ne vérifie plus ${}^t\mathscr{R}\mathscr{R} = I$ (matrice identité), et ce n'est pas facile à renormaliser.

Avantage sur les angles d'Euler: c'est bien plus simple, plus les avantages précédents !