Détails mathématiques pour utiliser un ruban en hélice comme ressort…

La figure 1 représente le ressort de 10 spires dans sa position d'équilibre de hauteur initiale h_0, le rayon initial est noté $r_0 = \frac{d_0}{2}$.

Dans la figure 2, le ressort est étiré, sa nouvelle hauteur est h_1 et le rayon des spires est alors $r_1 = \frac{d_1}{2}$.

Questions

- Quelle est la longueur du ressort ?
- Lorsque le ressort est allongé, la longueur du ruban restant invariable, calculer le nouveau rayon des spires $r_1(h_0, r_0, h_1)$?

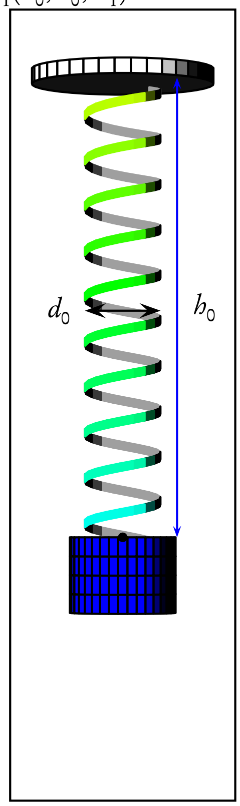


Figure 1

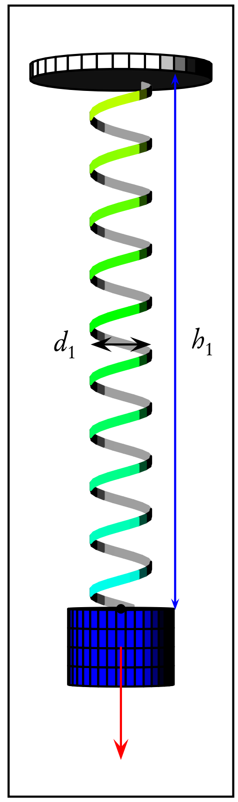


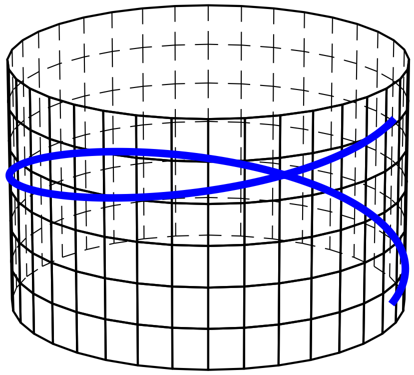
Figure 2

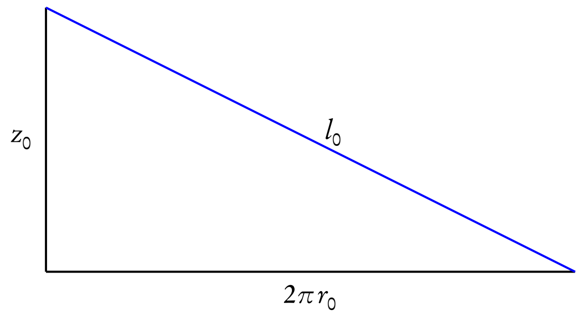
Hypothèses

Par souci de simplicité, nous supposons que toutes les spires sont équidistantes et nous ne faisons aucune hypothèse sur les propriétés physiques du métal constituant le ruban : son épaisseur, son élasticité, les torsions, la température etc.

Calculs

Si z_0 est le pas de l'hélice, c'est-à-dire la distance entre deux spires, $h_0 = nz_0$ est la hauteur totale d'un ressort de n spires.





Une astuce pour calculer la longueur d'une spire :

On fait rouler le cylindre sur le plan afin de dessiner la trace de l'hélice sur ce plan. Ainsi, l'hélice se transforme en un ligne droite. On dessine le triangle rectangle dans lequel un côté de l'angle droit est la hauteur z_0, l'autre est la circonférence $2\pi r_0$ du cylindre et l'hypoténuse la longueur l_0 d'une spire. En utilisant le théorème de Pythagore on peut calculer la longueur d'une spire.

La *longueur d'un seule spire* est

$$l_0 = \sqrt{z_0^2 + 4\pi^2 r_0^2} \tag{1}$$

Cela donne la *longueur totale* du ressort :

$$L_0 = n l_0$$

Maintenant, nous considérons le ressort étiré (figure 2).

Si le pas de l'hélice est noté z_1, alors $h_1 = nz_1$ est la hauteur totale du ressort étiré pour n spires.

La longueur *d'une spire* est :

$$l_1 = \sqrt{z_1^2 + 4\pi^2 r_1^2} \tag{2}$$

Cela donne la *longueur totale* du ressort tendu

$$L_1 = n l_1$$

Puisqu'il s'agit du même ressort, la longueur est constante : $L_0 = L_1$.

Des équations (1) et (2) nous en déduisons r_1^2,

$$r_1^2 = \frac{1}{4\pi^2 n^2} h_0^2 - \frac{1}{4\pi^2 n^2} h_1^2 + r_0^2$$

Conditions initiales de l'oscillation

L'axe vertical h est orienté vers le bas et l'origine $h = 0$ est l'extrémité supérieure du ressort.

Le ressort va effectuer des oscillations harmoniques avec une *amplitude* $\hat{h} < h_0$. On suppose qu'elles débutent à partir de la position *d'équilibre* vers le bas avec une pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la *période des oscillations*.

$$h_1(t) = h_0 + \hat{h} \cdot \sin(\omega t) = h_0[1 + \frac{\hat{h}}{h_0} \sin(\omega t)]$$

Cela donne, après quelques calculs élémentaires :

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 n^2} h_0^2 \{1 - [1 + \frac{\hat{h}}{h_0} \sin(\omega t)]^2\} + r_0^2} \\ &= \sqrt{r_0^2 - \frac{\hat{h} h_0}{4\pi^2 n^2} \sin(\omega t)[2 + \frac{\hat{h}}{h_0} \sin(\omega t)]} \end{aligned}$$

Résultats

Plus le ressort possède de spires et moins $r_1(t)$ diffère de r_0.

Nous allons maintenant discuter de deux demi-périodes consécutives :

– $]0; \frac{T}{2}[$ – Le ressort s'allonge $l_1(t) > l_0$

$$\sin(\omega t) > 0 \quad \Rightarrow \quad r_1(t) < r_0$$

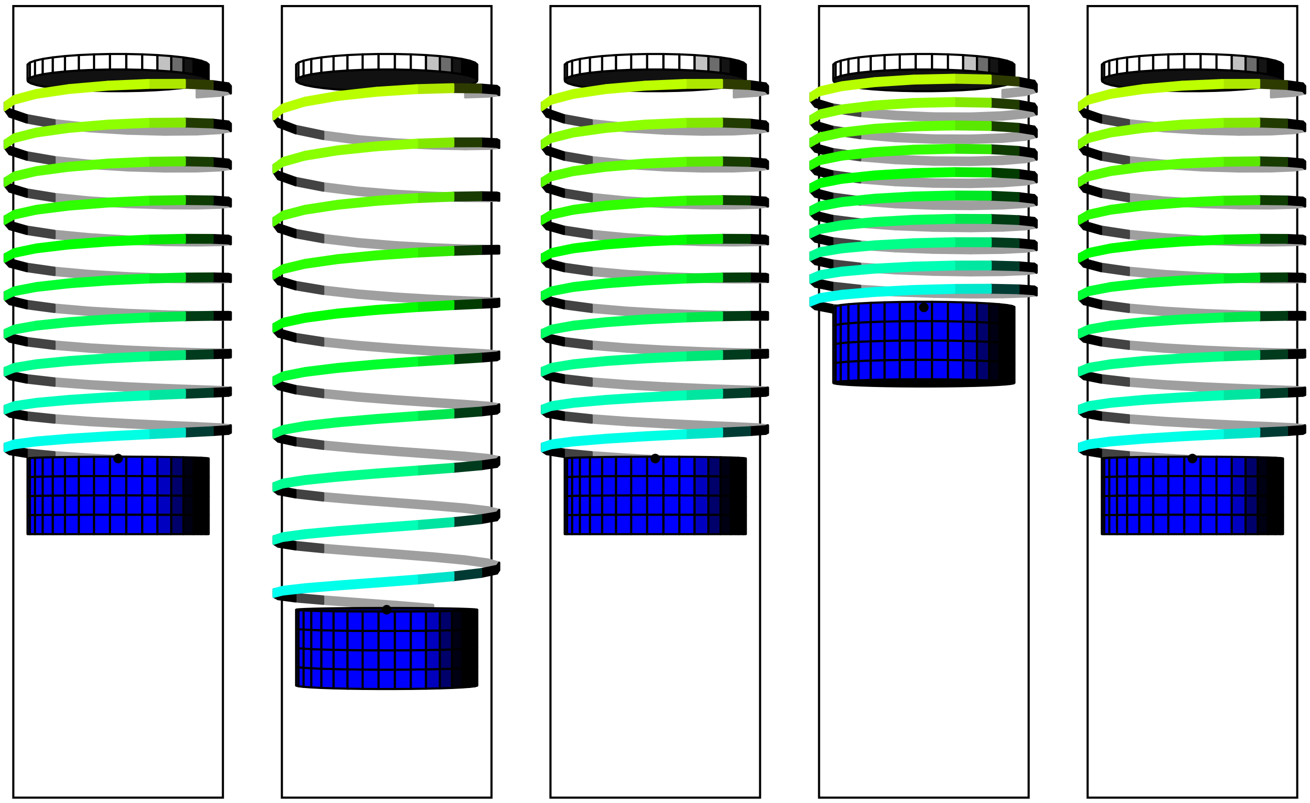
– $]\frac{T}{2}; T[$ – Le ressort se raccourcit $l_1(t) < l_0$

$$\sin(\omega t) < 0 \quad \Rightarrow \quad r_1(t) > r_0$$

Maintenant, si vous faites les calculs sur quelques exemples particuliers en choisissant les variables h_0, r_0, $\hat{h}$, vous constaterez que la correction par rapport au rayon initial est très faible. Le calcul du rayon est nécessaire, lorsque l'étirement est très grand. Mais dans ce cas, les conditions d'application de la loi de Hooke *(tension du ressort proportionnelle à son allongement)* et la limite d'élasticité du ressort ne seront plus respectées et l'hypothèse d'oscillations harmoniques deviendra caduque…

Exemple

Ici vous pouvez voir quelques extraits de l'oscillation harmonique ($n = 10$, $h_0 = 5$, $r_0 = 1{,}5$, $\hat{h} = 2$) incluant la *correction de rayon* et on ne voit pas de différence appréciable pour $r_1(t)$.



$t = \dfrac{0}{360}T$ $t = \dfrac{90}{360}T$ $t = \dfrac{180}{360}T$ $t = \dfrac{270}{360}T$ $t = \dfrac{360}{360}T$

Une animation de ces oscillations a été mise en ligne sur le site :

http://melusine.eu.org/syracuse/pstricks/pst-solides3d/animations/a26/

Code source

```
\psset{lightsrc=30 5 5,SphericalCoor,viewpoint=50 45 0,Decran=50,resolution=180}
\multido{\i=0+90}{5}{%
\begin{pspicture}(-1.35,-5)(1.35,7)
    \pstVerb{%
      /amplitude \i\space sin 0.4 mul 1 add 5 mul def
      /radius \i\space sin 0.4 mul 1 add 2 exp neg 1 add 25 mul 4 div pi 2 exp div 100 div 1.5 2 exp add 0.5 exp def
    }
    \psframe(-1.4,-3.5)(1.4,7)
    \psSolid[object=cylindre,r=1.2,h=0.2,ngrid=1 36](0,0,6)
    \pshelices[incolor=gray!75,R=radius,h=amplitude,hue=0.2 0.5,grid,RotY=180,spires=10,dZ=0.1](0,0,6)
    \psSolid[object=cylindre,r=1.2,h=1,ngrid=4 36,fillcolor=blue](0,0,amplitude neg 5 add)
    \psPoint(0,0,amplitude neg 6 add){E1}
    \psdot(E1)
    \rput(0,-4){$t=\dfrac{\i}{360}T$}
\end{pspicture}
\qquad}
```