

# Caustique de miroirs paraboliques et sphériques avec PStricks

Manuel Luque(manuel.luque27@gmail.com)

10 décembre 2009 - 4 janvier 2010

## Résumé

Ces études de caustiques par réflexion sur les miroirs et réfraction à travers les lentilles convergentes sont surtout un prétexte à utiliser PStricks pour calculer et dessiner ces caustiques. Pour l'étude mathématique, très incomplète, mes références sont Henri Bouasse qui cite Arthur Cayley qui lui même s'appuie sur Thomas St-Laurent. Je propose aussi quelques simulations avec PovRay afin de fournir des comparaisons intéressantes.

Voici l'étymologie du mot *caustique* d'après le « Dictionnaire étymologique de la langue française, où les mots sont classés par famille, Tome 1 »(1829) par Jean-Baptiste-Bonaventure de Roquefort.

CAUSTIQUE, substance qui a une vertu corrosive, brûlante ; mordant ; satirique ; piquant ; courbe sur laquelle se rassemblent les rayons réfléchis, et où ils ont une force brûlante. Du lat. *causticus*, fait du gr. *kaustikos*, dér. de *kaiô*, je brûle.

CATACAUSTIQUE, courbe formée par des rayons réfléchis, à la différence de la diacaustique, qui est formée par la réfraction. De *katakaiô*, brûler par réflexion ; fait de *kata*, contre, et de *kaiô*.

DIACAUSTIQUE, nom donné, en optique, aux caustiques par réfraction, pour les distinguer des catacaustiques ou caustiques par réflexion. De *dia*, à travers, et *kausticos*.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Caustiques d'un miroir parabolique</b>	<b>1</b>
1.1	Rayons parallèles à la directrice . . . . .	1
1.2	Rayons parallèles inclinés sur l'axe du paraboloïde . . . . .	5
1.3	Une simulation avec PovRay . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Caustique d'un miroir sphérique</b>	<b>9</b>
2.1	Équation de la caustique . . . . .	9
2.2	Quelques propriétés . . . . .	12
2.3	Les cas particuliers . . . . .	13
2.4	Simulation avec PovRay . . . . .	16
2.5	Surface d'onde après réflexion sur le miroir . . . . .	18

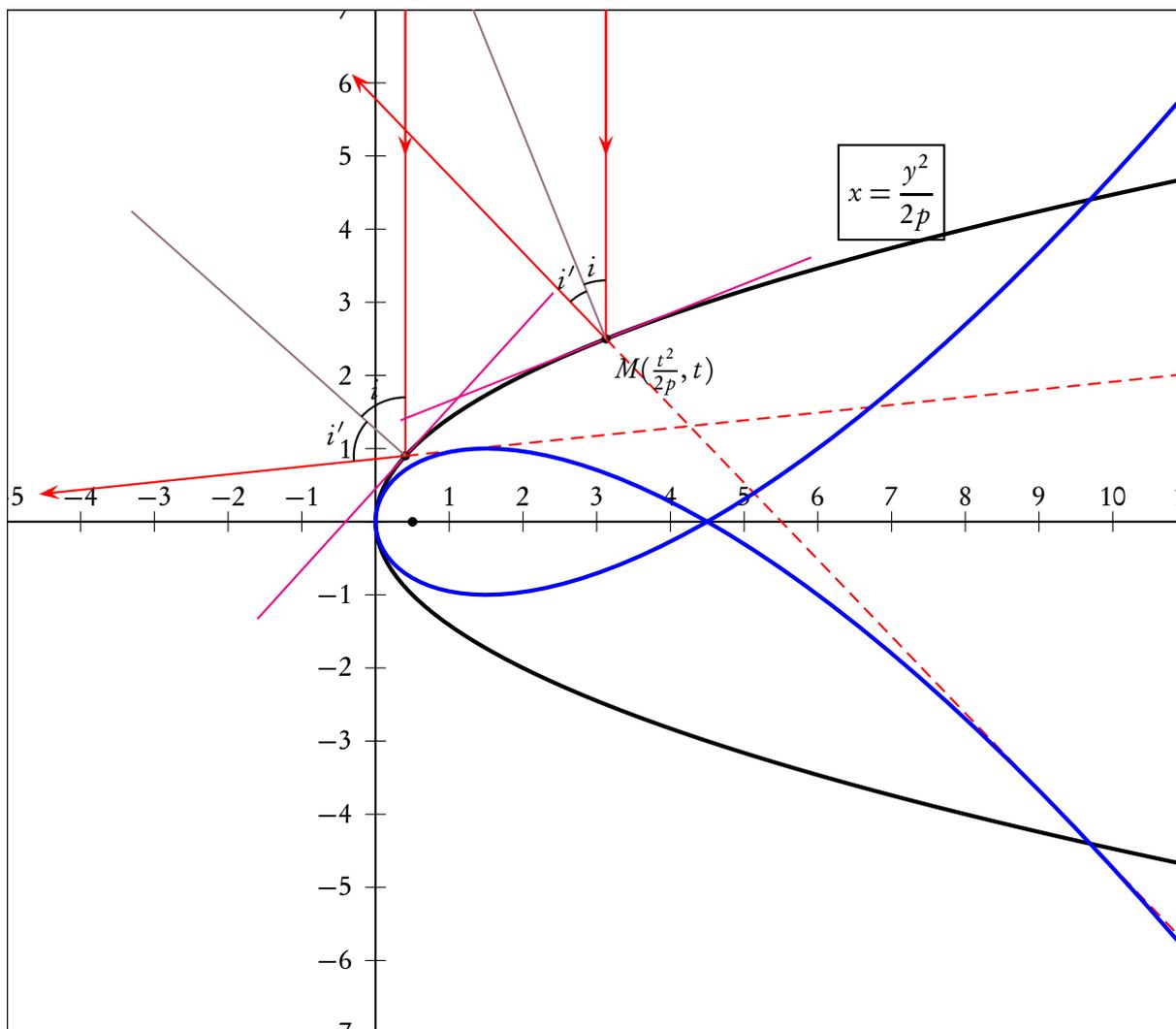
## 1 Caustiques d'un miroir parabolique

### 1.1 Rayons parallèles à la directrice

Sur ce sujet, et plus généralement sur la réflexion en optique, une étude très intéressante en a été faite par Frédéric Vivien sur :

[http://vivienfrederic.free.fr/irem/reflexion\\_optique.doc](http://vivienfrederic.free.fr/irem/reflexion_optique.doc)

J'ai suivi sa démarche pour cette première caustique, dans le cas particulier où les rayons sont parallèles à la directrice, ce qui reste un cas théorique, car dans la pratique on ne peut pas "regarder", ni photographier, cette caustique... mais cela donne une jolie courbe en forme de  $\alpha$ , appelée "*cubique de Tschirnhausen*".



On considère la parabole d'axe  $Ox$ , de sommet  $O$  et d'équation  $x = \frac{y^2}{2p}$ . La tangente en un point  $M(\frac{t^2}{2p}, t)$

a pour vecteur directeur  $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{dt} = (\frac{t}{p}, 1)$ , ou pour simplifier l'écriture  $\vec{T} = (t, p)$ . Le vecteur normal, vérifie la relation  $\vec{N} \cdot \vec{T} = 0$ , on en déduit ses coordonnées  $(-p, t)$  ou  $(p, -t)$  en prenant un résultat ou l'autre si l'on souhaite avoir un vecteur orienté vers l'extérieur de la courbe suivant la position du point.

Pour cette étude on se place dans la partie supérieure de la parabole. Les rayons incidents ont pour vecteur directeur  $\vec{j}(0, 1)$ . Déterminons les coordonnées du rayon réfléchi  $\vec{r}(r_x, r_y)$ . En choisissant pour lui aussi un vecteur unitaire, nous avons la condition supplémentaire :  $\sqrt{r_x^2 + r_y^2} = 1$ .

Rayons incident et réfléchi sont symétriques par rapport à la normale, ce qui se traduit par la relation :  $\vec{j} + \vec{r} = \lambda \vec{n}$ , c'est elle que nous allons exploiter.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -p \\ t \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} r_x &= -\lambda p \\ r_y &= \lambda t - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Écrivons que ce vecteur est unitaire, afin d'en déduire  $\lambda$ .

$$r_x^2 + r_y^2 = \lambda^2 p^2 + (\lambda t - 1)^2 = 1 \iff \lambda^2 p^2 + \lambda^2 t^2 - 2\lambda t + 1 = 1 \quad (3)$$

$$\lambda^2 p^2 + \lambda^2 t^2 - 2\lambda t = 0 \quad (4)$$

On en déduit, en conservant la valeur positive pour la partie supérieure :

$$\lambda = \frac{2t}{p^2 + t^2} \quad (5)$$

ainsi que les coordonnées du vecteur unitaire :

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{-2pt}{p^2 + t^2} \\ r_y &= \frac{t^2 - p^2}{p^2 + t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Désignons par  $R$  un point du rayon réfléchi, pour la construction, nous aurons besoin des équations paramétriques, définies à partir de la relation :

$$\overrightarrow{MR} = k \overrightarrow{r}$$

$$\begin{aligned} x_R &= k \frac{-2pt}{p^2 + t^2} + \frac{t^2}{2p} \\ y_R &= k \frac{t^2 - p^2}{p^2 + t^2} + t \end{aligned} \quad (7)$$

La détermination de la caustique, enveloppe des rayons réfléchis, nécessite la connaissance de l'équation cartésienne ( $\Delta$ ) du rayon réfléchi. Pour simplifier les calculs, nous prendrons comme vecteur directeur :

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} -2pt \\ t^2 - p^2 \end{pmatrix}$$

Équation ( $\Delta$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{x - \frac{t^2}{2p}}{-2pt} &= \frac{y - t}{t^2 - p^2} \\ \left(x - \frac{t^2}{2p}\right)(t^2 - p^2) &= -2pt(y - t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$2pty + x(t^2 - p^2) - \frac{3pt^2}{2} - \frac{t^4}{2p} = 0$$

Dérivons par rapport à  $t$  cette équation, pour en déduire  $\Delta'$ .

Équation ( $\Delta'$ ) :

$$2py + 2xt - 3pt - \frac{2t^3}{p} = 0 \quad (9)$$

Afin de déterminer les équations paramétriques de la caustique résolvons le système d'équations formé par  $\Delta$  et  $\Delta'$  :

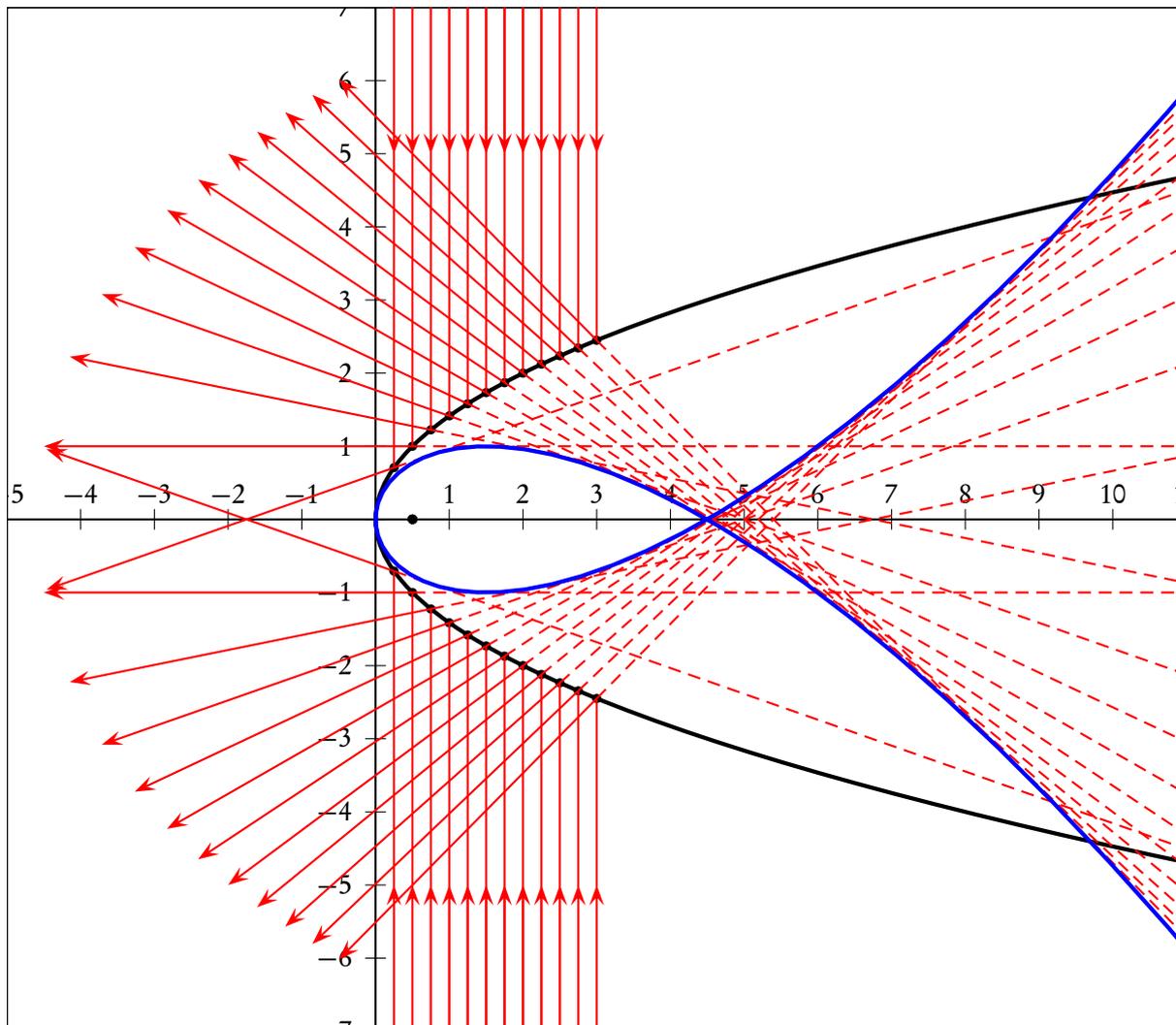
$$\begin{cases} 2pty + (t^2 - p^2)x - \frac{3pt^2}{2} - \frac{t^4}{2p} = 0 & (\Delta) \\ 2py + 2tx - 3pt - \frac{2t^3}{p} = 0 & (\Delta') \end{cases}$$

Les équations paramétriques de la caustique sont :

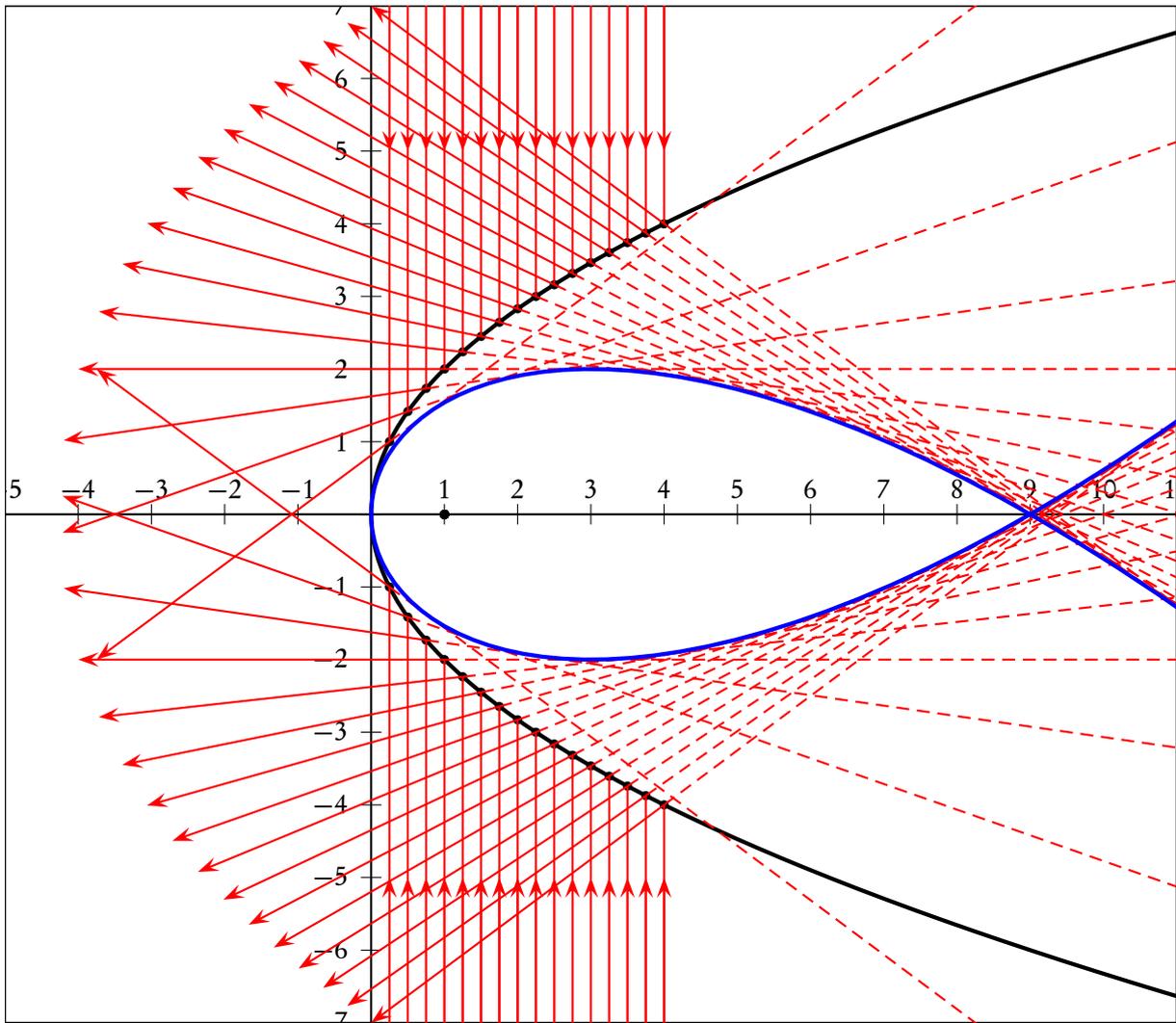
$$\begin{cases} x = \frac{3t^2}{2p} \\ y = \frac{3t}{2} - \frac{t^3}{2p^2} \end{cases} \quad (10)$$

On trouve une intéressante étude de la cubique de Tschirnhausen sur le site de Robert Ferréol et Jacques Mandonnet :

<http://www.mathcurve.com/courbes2d/tschirnhausen/tschirnhausen.shtml>



Toutes les figures ayant été élaborées avec **PSTricks** on peut donc facilement en modifier certains paramètres, comme  $p$  si on veut étudier l'influence de la convexité du miroir sur l'allure de la caustique ou le nombre de rayons incidents. On donne la valeur de  $p$  en premier argument à la commande `\Tschirnhausen{valeur_p}{r}` dans l'exemple ci-dessus  $p = 1$  (dans le suivant  $p = 2$ ) et le nombre de rayons dans le deuxième argument, on pourrait, aussi, rajouter un troisième paramètre pour l'espacement des rayons etc.



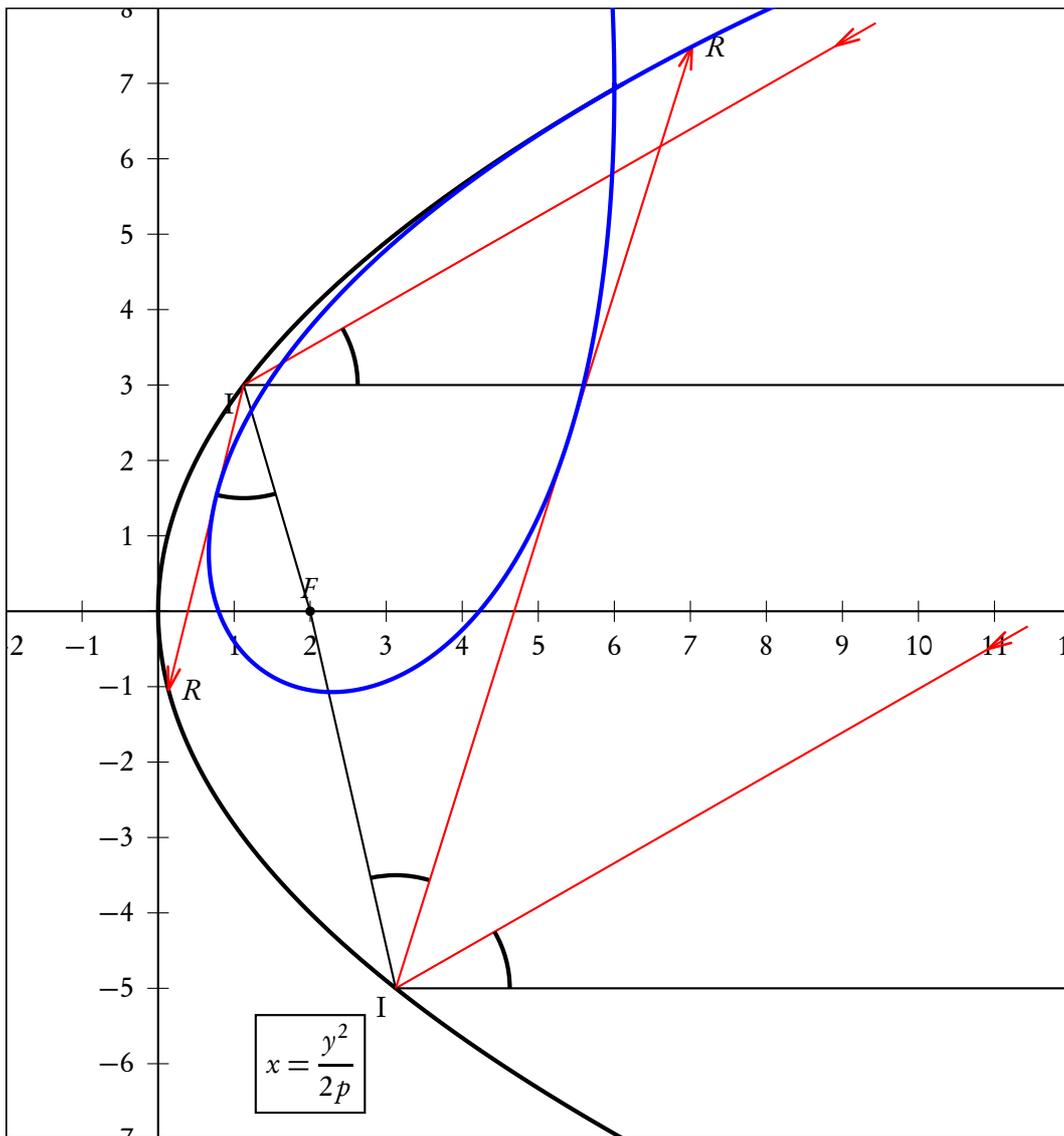
```

\begin{center}
\begin{pspicture*}(-5,-7)(11,7)
\psframe(-5,-7)(11,7)
\psaxes[ylabelPos=left](0,0)(11,7)(-5,-7)
\Tschirnhausen{2}{16}
\end{pspicture*}
\end{center}

```

## 1.2 Rayons parallèles inclinés sur l'axe du paraboloïde

De cette caustique, Henri Bouasse en donne une construction géométrique avec une équerre en s'appuyant sur la propriété suivante de la parabole : si  $u$  est l'inclinaison des rayons du faisceau incident avec l'axe de la parabole, alors « le rayon réfléchi ( $IR$ ) fait avec le rayon vecteur ( $IF$ ) l'angle constant  $u$ . »



Pour varier les méthodes, je m'appuie sur cette propriété pour faire le calcul de la caustique.

On détermine l'angle  $\gamma$ , que fait le rayon réfléchi avec l'axe  $Ox$ .  $(x_M, y_M)$  sont les coordonnées du point d'incidence sur la parabole :

$$\alpha = -\arctan \left( \frac{y_M}{\frac{p}{2} - \frac{y_M^2}{2p}} \right) + \pi$$

$$\gamma = \alpha - u = -\arctan \left( \frac{y_M}{\frac{p}{2} - \frac{y_M^2}{2p}} \right) + \pi - u$$

Équation  $(\Delta)$  du rayon réfléchi :

$$y = x \tan \gamma + b, \quad b = y_M - x_M \tan \gamma$$

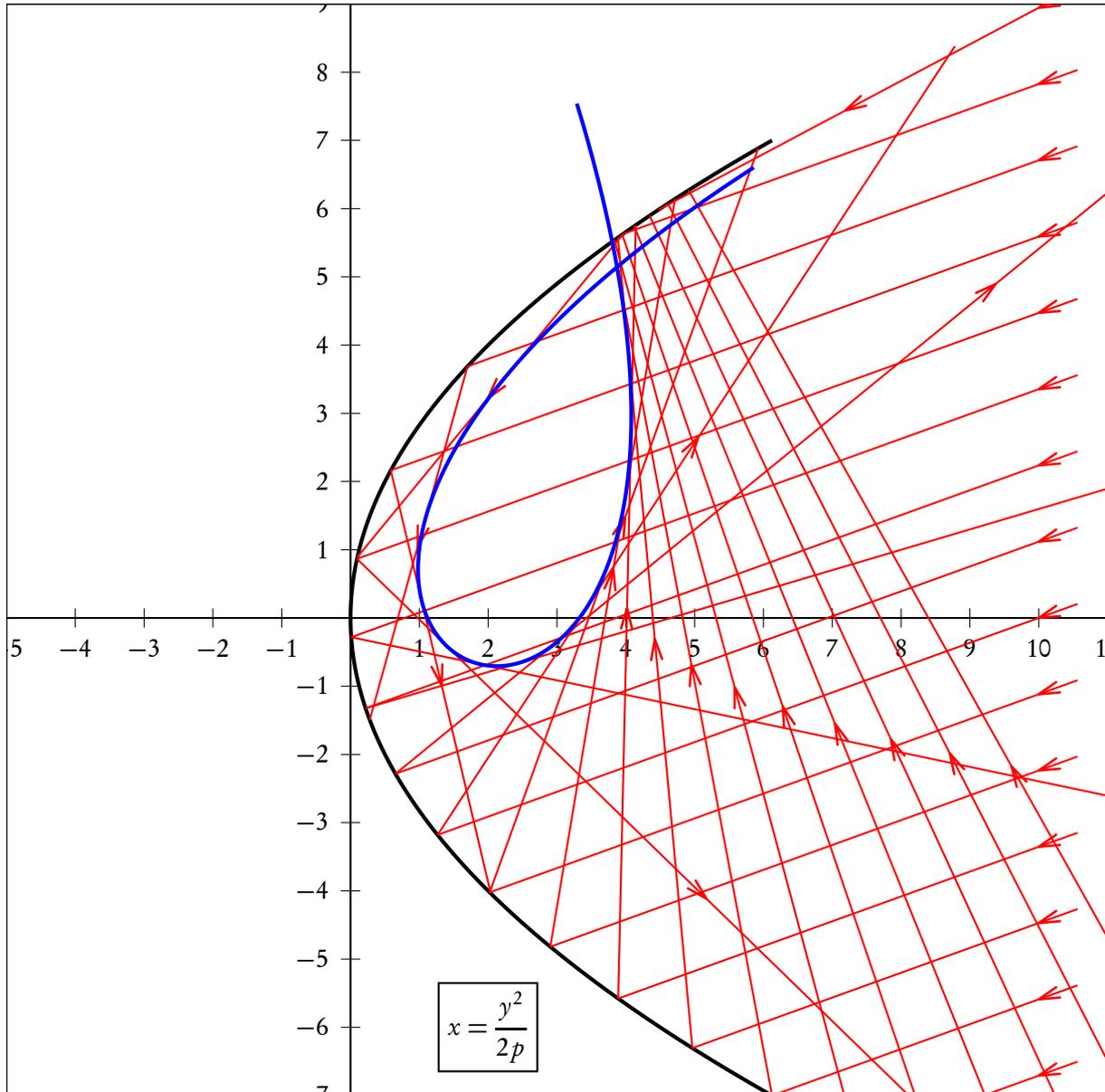
Dérivée  $(\Delta')$  par rapport à  $y_M$ , qui est le paramètre que l'on fait varier :

$$(\Delta') : 0 = x(\tan \gamma)' + 1 - \frac{y_M^2}{2p}(\tan \gamma)' - \frac{y_M}{p} \tan \gamma$$

avec :

$$(\tan \gamma)' = \frac{-2p}{(p^2 + y_M^2) \cos^2 \left( \arctan \left( 2 \frac{y_M p}{p^2 - y_M^2} \right) + u \right)}$$

La solution du système  $\{(\Delta), (\Delta')\}$  donne l'enveloppe des rayons réfléchis : la caustique du paraboloïde pour les rayons parallèles inclinés.



### 1.3 Une simulation avec PovRay

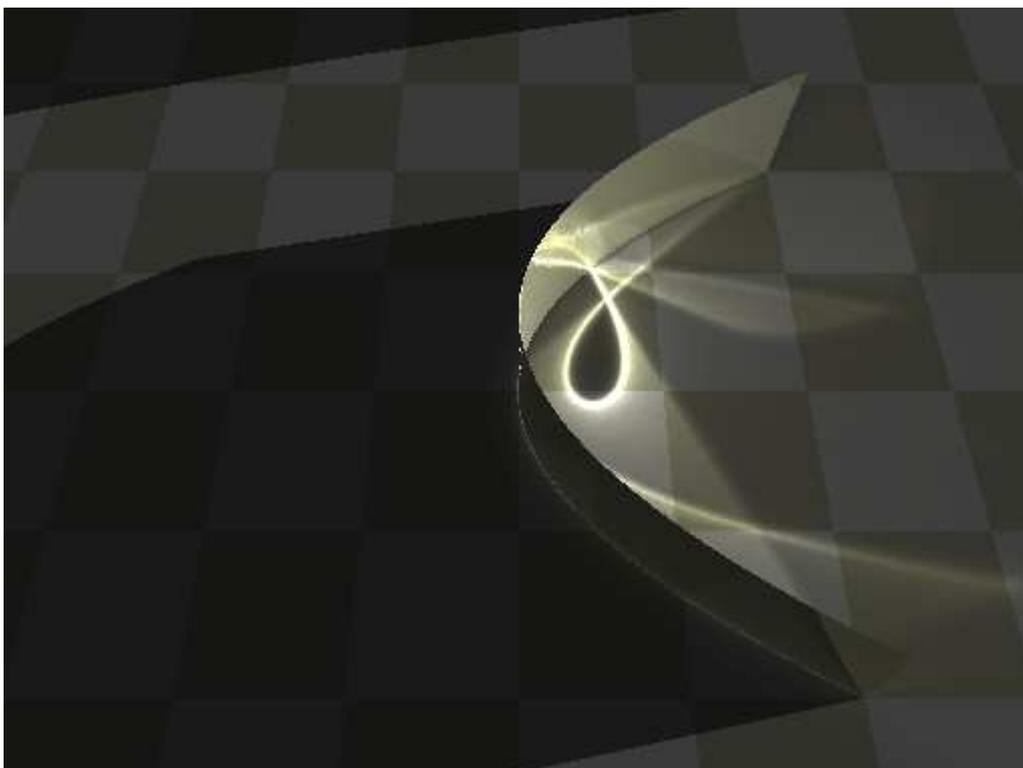
Il peut être intéressant de comparer les caustiques obtenues par les calculs et celles avec la version 3.6 de Povray.

```
/* manuel.luque27@gmail.com */
////////////////////////////////////
#include "colors.inc"
#include "glass.inc"
////////////////////////////////////
// Photons //////////////////////////////////
global_settings {
```

```

photons {
count 2000000
autostop 0
media 100
max_trace_level 10
}
}
////////////////////////////////////
#declare uI=-10; // inclinaison des rayons en degrés
#declare dLight=10;
#declare xLight=dLight*sin( uI/180*pi);
#declare zLight=dLight*cos( uI/180*pi);
camera { location <1.2, 2.4, 0> look_at <0, 0, 0>}
light_source {<xLight,2,zLight> colour rgb 1
cylinder
radius 0
falloff 2
photons { reflection on refraction off } }
#declare Metal_Texture =
texture {
pigment { color rgb <0.7, 0.7, 0.6> }
finish {
reflection {0.9 metallic}
}
}
parametric {
function {u}
function {v}
function {pow(u,2)} // z=x^2
<-1,0>,<1,0.5>
contained_by{ box {<-2,-2,-2>,<2,2,2>}}
precompute 10, x,y,z
texture { Metal_Texture }
photons {
target
reflection on
refraction off
collect off }
}
plane {y, 0
pigment {checker White Wheat scale 0.5} // base checker
}

```



## 2 Caustique d'un miroir sphérique

### 2.1 Équation de la caustique

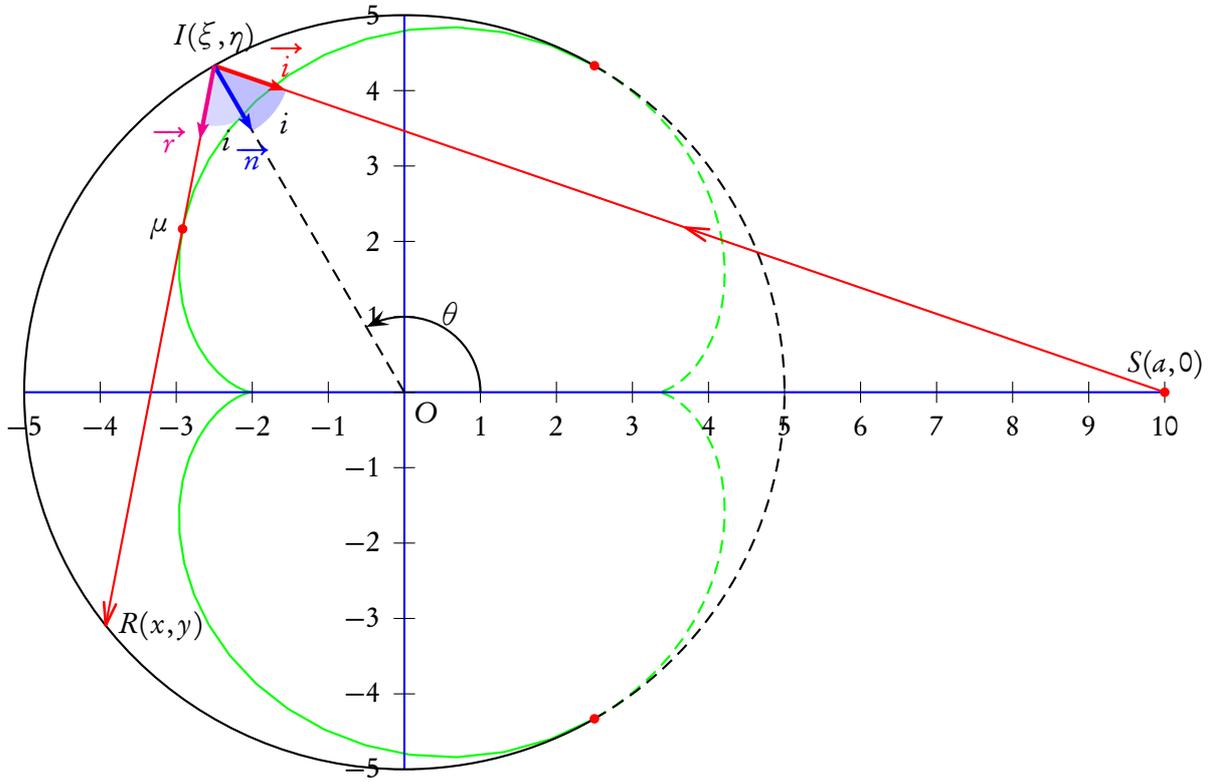
Pour déterminer l'équation de la caustique Henri Bouasse (Optique supérieure, librairie Delagrave) suit la *très élégante méthode* de Cayley, c'est ainsi qu'il l'a qualifié, mais il en donne une adaptation très personnelle avec des explications, me semble-t-il, qu'il aurait pu développer, de plus ses coordonnées de la caustique sont entachées, dans l'édition de 1917 que j'ai consultée, d'une erreur (une coquille je suppose...) mais qui m'a obligé à refaire tous les calculs. Les développements qu'il donne par la suite sont remarquables et très complets. En tous cas, le texte d'Arthur Cayley est consultable sur :

<http://2020ok.com/books/48/the-collected-mathematical-papers-of-arthur-cayley-47248.htm>

On lira que sa démonstration s'appuie sur la solution donnée par un mathématicien français Thomas de St-Laurent (Annales de Gergonne, T. XVII. [1826] pp. 128 134). Pour finir le jeu de piste on peut trouver et télécharger l'article de Thomas de St-Laurent sur :

[http://archive.numdam.org/article/AMPA\\_1826-1827\\_\\_17\\_\\_1\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/article/AMPA_1826-1827__17__1_0.pdf)

Voici une partie de la démonstration qui, au début, suit de très près celle d'Arthur Cayley puis ensuite celle d'Henri Bouasse pour les développements. Pour plus de clarté, la figure ne représente que le premier rayon réfléchi.



$S(x = a, 0)$  est le point *radiant* sur l'axe  $Ox$ ,  $(SI)$  un rayon incident,  $I(\xi = R \cos \theta, \eta = R \sin \theta)$  le point d'incidence sur le cercle et  $(IR)$  le rayon réfléchi. Angle d'incidence et angle de réflexion sont égaux, la valeur commune est notée  $i$ .  $\vec{i}$  est un vecteur unitaire du rayon incident dirigé vers  $S$ , de même  $\vec{r}$  pour le rayon réfléchi vers  $R$ .

La condition de réflexion s'écrit :  $\vec{i} + \vec{r} = \lambda \vec{OI}$ .

Comme Arthur Cayley, Henri Bouasse et Thomas de St-Laurent envisageons le cas général avec  $S(a, b)$ , posons  $\rho = \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2}$  et  $\sigma = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ .

Les vecteurs unitaires selon  $(IS)$  et  $(IR)$  ont, respectivement, pour expression :

$$\vec{i} \left( \frac{a - \xi}{\rho}, \frac{b - \eta}{\rho} \right) \quad \vec{r} \left( \frac{x - \xi}{\sigma}, \frac{y - \eta}{\sigma} \right)$$

En écrivant la condition de réflexion :

$$\begin{cases} \frac{a - \xi}{\rho} + \frac{x - \xi}{\sigma} = \lambda \xi \\ \frac{b - \eta}{\rho} + \frac{y - \eta}{\sigma} = \lambda \eta \end{cases}$$

en éliminant ensuite  $\lambda$  et en simplifiant, on trouve :

$$\frac{\eta a - \xi b}{\rho} + \frac{\eta x - \xi y}{\sigma} = 0$$

On remplace  $\rho$  et  $\sigma$  par leur expression et on élève au carré :

$$(\eta a - \xi b)^2 [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] = (\eta x - \xi y)^2 [(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2] = 0$$

l'expression précédente peut se réécrire ainsi :

$$[(\eta a - \xi b)(\xi - x)]^2 - [(\eta x - \xi y)(\xi - a)]^2 + [(\eta a - \xi b)(\eta - y)]^2 - [(\eta x - \xi y)(\eta - b)]^2 = 0$$

En utilisant deux fois l'identité remarquable  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  :

$$\begin{aligned} & \{(\eta a - \xi b)(\xi - x) - (\eta x - \xi y)(\xi - a)\}[(\eta a - \xi b)(\xi - x) + (\eta x - \xi y)(\xi - a)] \\ & + \{(\eta a - \xi b)(\eta - y) - (\eta x - \xi y)(\eta - b)\}[(\eta a - \xi b)(\eta - y) + (\eta x - \xi y)(\eta - b)] = 0 \end{aligned}$$

On s'occupe de la première paire d'accollades :

$$\eta a \xi - \eta a x - \xi^2 b + \xi b x - \eta \xi x + \eta x a + \xi^2 y - \xi y a$$

qui après simplification et mise en facteur de  $\xi$  donne :

$$\xi(\eta a - \xi b + b x - \eta x + \xi y - y a)$$

On regroupe les termes deux à deux :

$$\xi[\xi(y - b) - \eta(x - a) + b x - a y] = \xi P$$

Le facteur entre crochets est désigné par  $P$ . On fait subir le même traitement à la deuxième paire d'accollades et on obtient :

$$\{(\eta a - \xi b)(\eta - y) - (\eta x - \xi y)(\eta - b)\} = \eta P$$

L'expression initiale s'écrit, après simplification par  $P$  :

$$\xi[(\eta a - \xi b)(\xi - x) + (\eta x - \xi y)(\xi - a)] + \eta[(\eta a - \xi b)(\eta - y) + (\eta x - \xi y)(\eta - b)] = 0$$

$$\xi(\eta a - \xi b)(\xi - x) + \xi((\eta x - \xi y)\xi - x) + \eta(\eta a - \xi b)(\eta - y) + \eta(\eta x - \xi y)(\eta - b) = 0$$

On regroupe les termes 1 et 3 en mettant  $(\eta a - \xi b)$  en facteur et de même on regroupe les termes 2 et 4 en mettant  $(\eta x - \xi y)$  en facteur :

$$(\eta a - \xi b)[\xi(\xi - x) + \eta(\eta - y)] + (\eta x - \xi y)[\xi(\xi - x) + \eta(\eta - b)] = 0$$

Après développement et compte-tenu que  $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ , les expressions entre crochets se réécrivent ainsi :

$$(\eta a - \xi b)[R^2 - \xi x - \eta y] + (\eta x - \xi y)[R^2 - \xi a - \eta b] = 0 \quad (1)$$

C'est l'équation du rayon réfléchi. Plus loin et après une page et demi de calculs et de trésors d'astuces, Arthur Cayley retrouve l'équation de la caustique que Thomas St-Laurent avait obtenu par d'autres voies.

$$27R^2(bx - ay)^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 - \{4(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - R^2[(a + x)^2 + (b + y)^2]\}^3 = 0 \quad (2)$$

J'ai niatement et vainement essayé de faire faire ces calculs au logiciel de calcul symbolique Maple : il est évident que malgré toutes les qualités de ce logiciel, il ne possède pas encore toute l'intelligence, les intuitions et l'expérience d'Arthur Cayley et de Thomas St-Laurent.

Je laisse Arthur Cayley et Thomas St-Laurent à ce point et je prends le train d'Henri Bouasse à partir de l'équation du rayon réfléchi (1). Celui-ci considère le cas où  $b = 0$  et suppose  $R = 1$  (ce que je ne fais pas afin de pouvoir paramétrer facilement les figures), on remplace aussi dans l'équation  $\xi$  par  $R \cos \theta$  et  $\eta$  par  $R \sin \theta$  et on ordonne de façon classique l'équation du rayon réfléchi ( $\Delta$ ) :

$$(\Delta) : \quad x(R - 2a \cos \theta) + \frac{y(-R \cos \theta + a \cos 2\theta)}{\sin \theta} + aR = 0$$

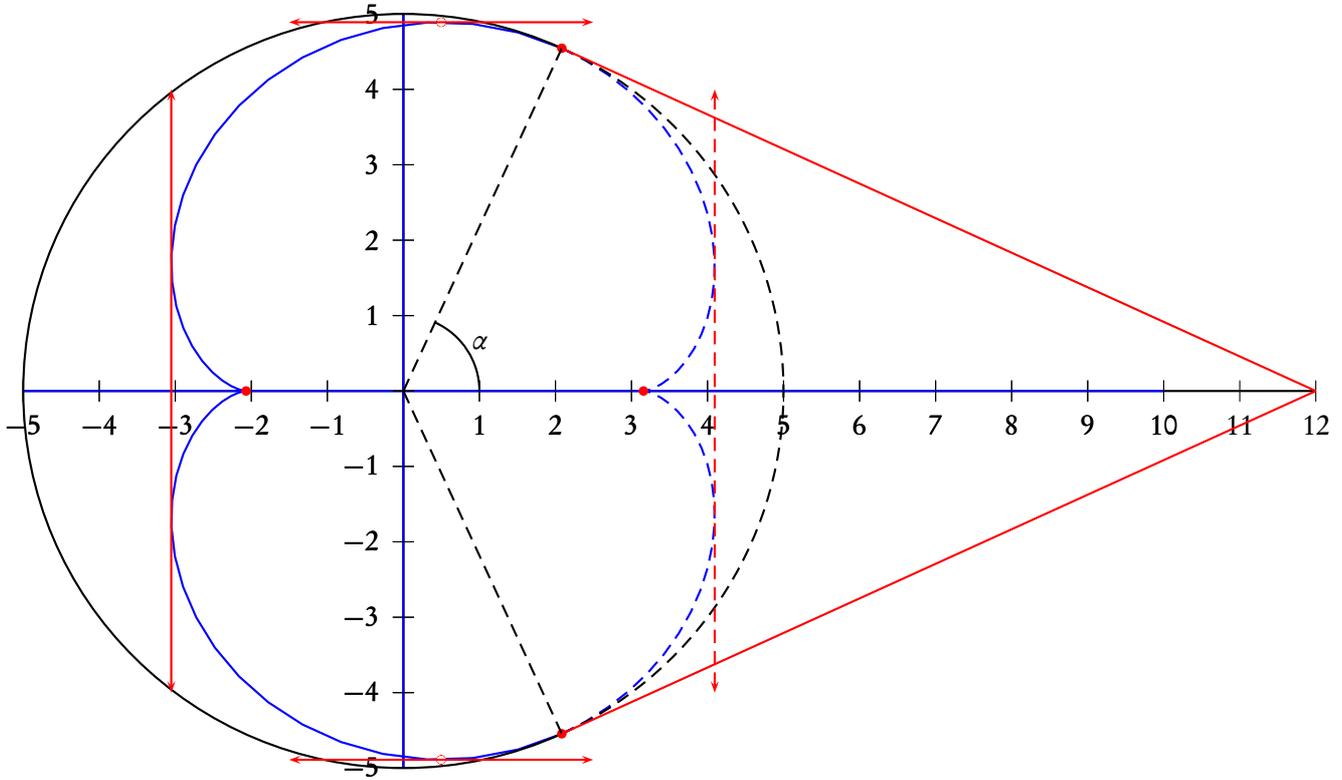
Pour obtenir l'équation de la caustique, dérivons ( $\Delta$ ) par rapport à  $\theta$  :

$$(\Delta)' : \quad 2xa \sin \theta + \frac{y(2a \cos^3 \theta - 3a \cos \theta + R)}{\sin^2 \theta} = 0$$

La résolution du système  $\{(\Delta), (\Delta)'\}$ , nous fournit les équations paramétriques de la caustique. On fait varier le paramètre  $\theta$  en fonction de la position du point lumineux de façon à parcourir toute la portion réfléchissante interne du miroir, ce sont les tangentes au cercle menées à partir du point lumineux qui déterminent les limites de  $\theta$ .

$$\begin{cases} x = \frac{a^2 R \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta) - R^2 a}{-3 R a \cos \theta + R^2 + 2 a^2} \\ y = \frac{2 a^2 R \sin^3 \theta}{-3 R a \cos \theta + R^2 + 2 a^2} \end{cases}$$

À propos de l'équation de la caustique, Henri Bouasse se contente d'indiquer « On vérifiera que ces valeurs satisfont à l'équation (2) ».



## 2.2 Quelques propriétés

Quelques propriétés parmi toutes celles énumérées par Henri Bouasse, son texte est en italiques.

1) *La caustique coupe l'axe des x en deux points qui sont des points de rebroussement :*

$$x_1 = -\frac{Ra}{R-2a} \quad x_2 = -\frac{Ra}{R+2a}$$

2) *Pour trouver les tangentes verticales et horizontales, on part commodément de l'équation du rayon réfléchi :*

$$x(R - 2a \cos \theta) + \frac{y(-R \cos \theta + a \cos 2\theta)}{\sin \theta} + aR = 0$$

a) *Les tangentes parallèles à l'axe des x sont obtenues en annulant le coefficient de x.*

La solution  $\cos \theta = \frac{R}{2a}$ , donne :  $y = \pm \frac{R}{2a} \sqrt{4a^2 - R^2}$ .

b) *Les tangentes parallèles à l'axe des y sont obtenues en annulant le coefficient de y.*

$$-R \cos \theta + a(2 \cos^2 \theta - 1) = 0 \implies \cos \theta = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 8a^2}}{4a}$$

On en déduit les valeurs possibles de x :

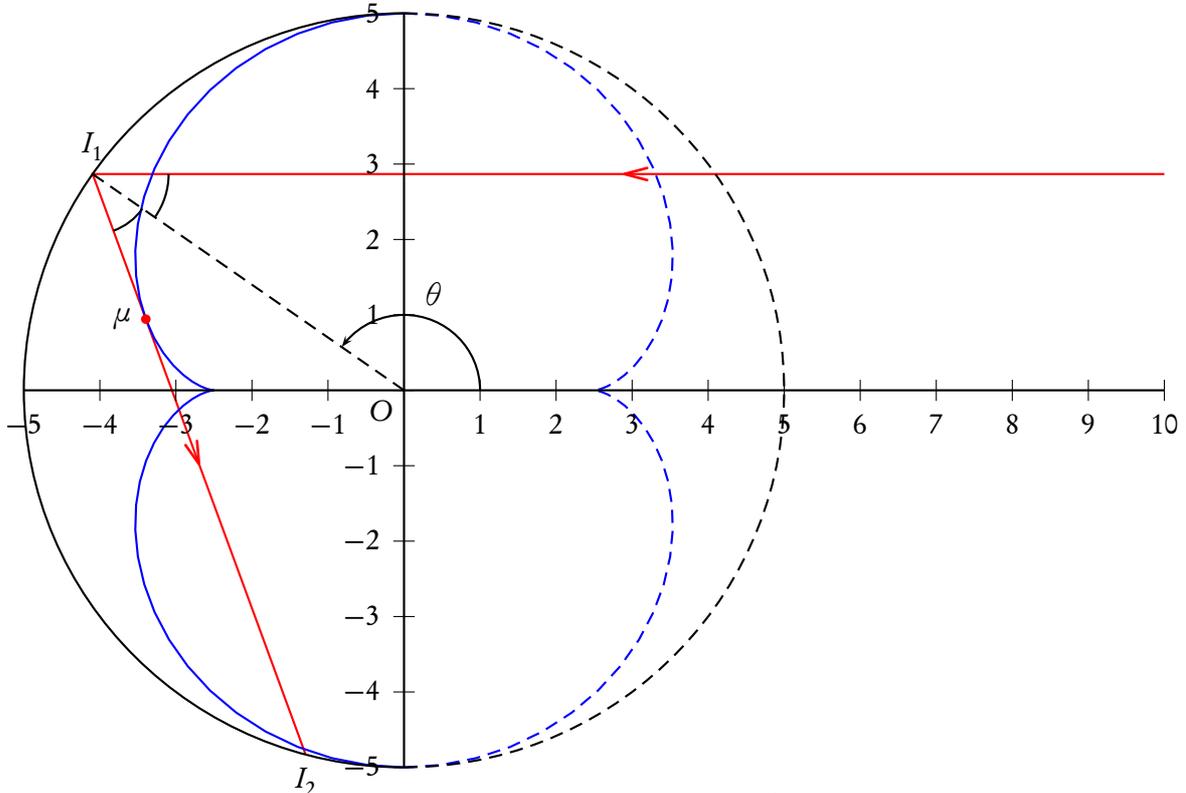
$$x = \frac{-Ra}{R - 2a \cos \theta} \implies x = \frac{-Ra}{\left( R - 2a \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 8a^2}}{4a} \right)} = \frac{-2Ra}{R \pm \sqrt{R^2 + 8a^2}}$$

3) Dans le cas où  $S$  est à l'extérieur du miroir, les points où la caustique touche le miroir sont les points de tangence des tangentes menées au cercle partir de  $S$ .

$$\cos \alpha = \frac{R}{a} \implies x = \frac{R^2}{a}, \quad y = \pm R \sin \alpha$$

### 2.3 Les cas particuliers

1)  $S$  est à l'infini, les rayons incidents sont parallèles à l'axe des  $x$ .



Équation du rayon réfléchi  $(\Delta)$  et de sa dérivée, par rapport à  $\theta$ ,  $(\Delta')$ .

$$\begin{cases} (\Delta) : y = x \tan(2\theta) + R \sin(\theta) - R \cos(\theta) \tan(2\theta) \\ (\Delta') : 0 = x(2 + 2 \tan^2(2\theta)) + R \cos(\theta) + R \sin(\theta) \tan(2\theta) - R \cos(\theta)(2 + 2 \tan^2(2\theta)) \end{cases}$$

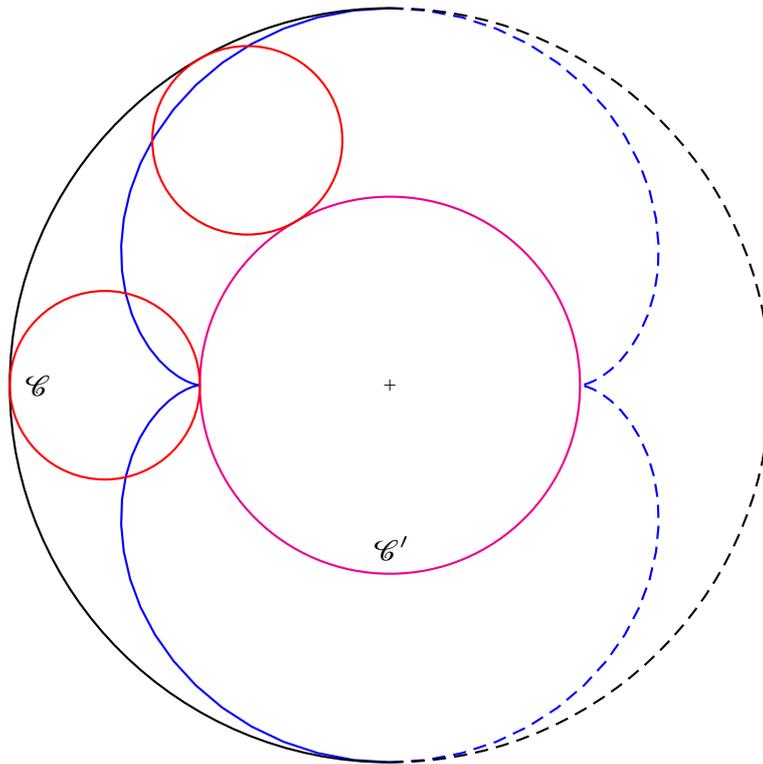
Les équations paramétriques de la caustique sont la solution du système précédente.

$$\begin{cases} x = R \frac{2 \cos(\theta) \tan^2(2\theta) + \cos(\theta) - \sin(\theta) \tan(2\theta)}{2(1 + \tan^2(2\theta))} \\ y = R \frac{-\tan(2\theta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \tan^2(2\theta) + 2 \sin(\theta)}{2(1 + \tan^2(2\theta))} \end{cases}$$

Soit après simplification :

$$\begin{cases} x = -\frac{R}{2} (-3 + 2 \cos^2 \theta) \cos \theta \\ y = R \sin^3 \theta \end{cases}$$

**H.Bouasse** : « Quand  $S$  est à l'infini, la méridienne de la caustique est une épicycloïde engendrée par un cercle  $\mathcal{C}$  dont le rayon est le quart du rayon du miroir ; il roule sur un cercle  $\mathcal{C}'$  concentrique à la méridienne du miroir et de rayon moitué moindre. »

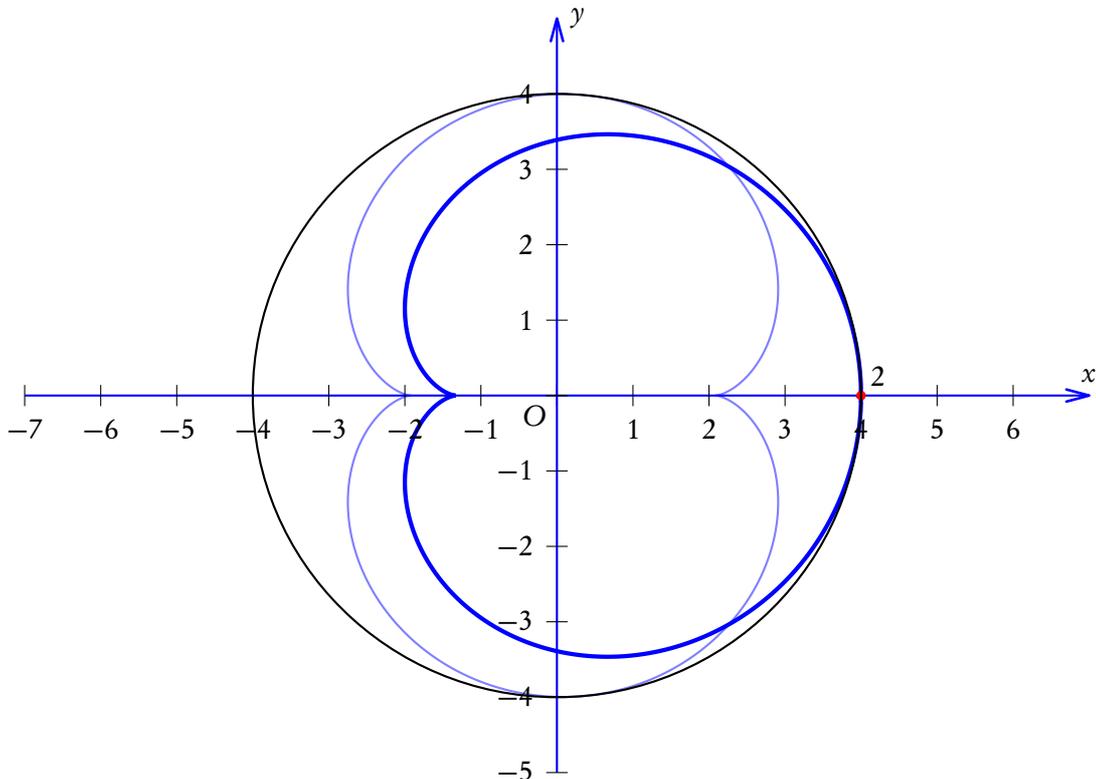


On peut voir une animation sur le site de Robert Ferréol et Jacques Mandonnet :

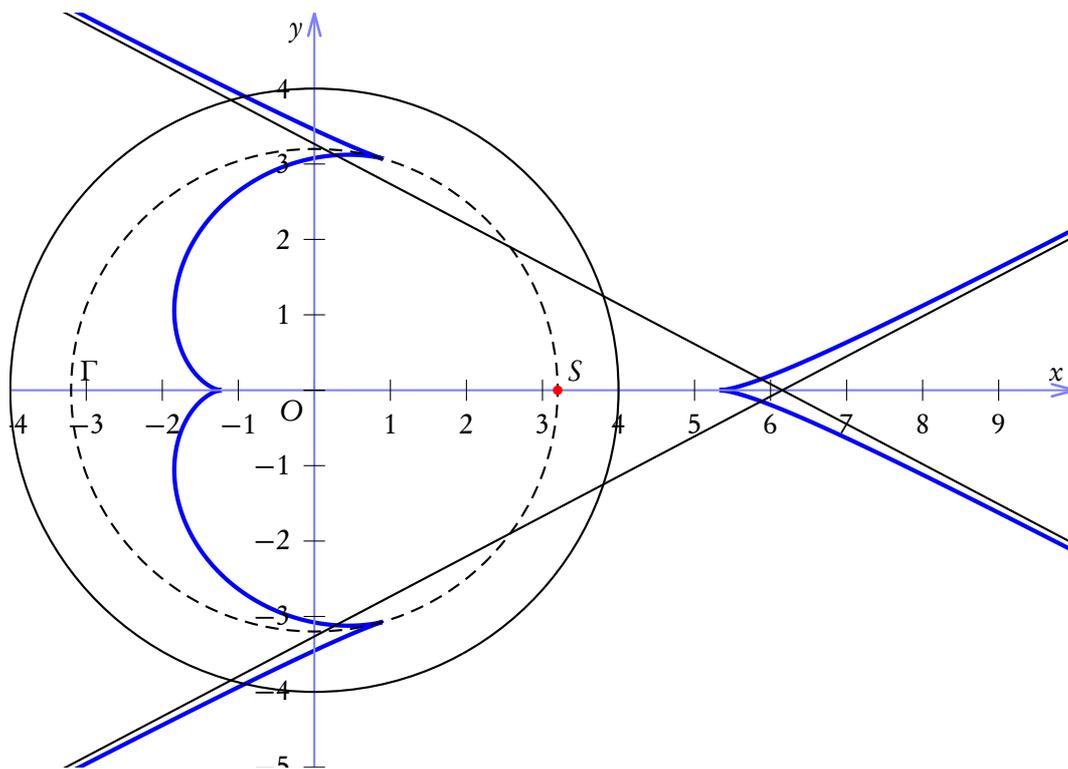
<http://www.mathcurve.com/courbes2d/epicycloid/epicycloid.shtml>

- 2)  $S$  est entre l'infini et le miroir (Pour l'anecdote, Thomas de St-Laurent commence son étude le cas où le point lumineux est sur le miroir).

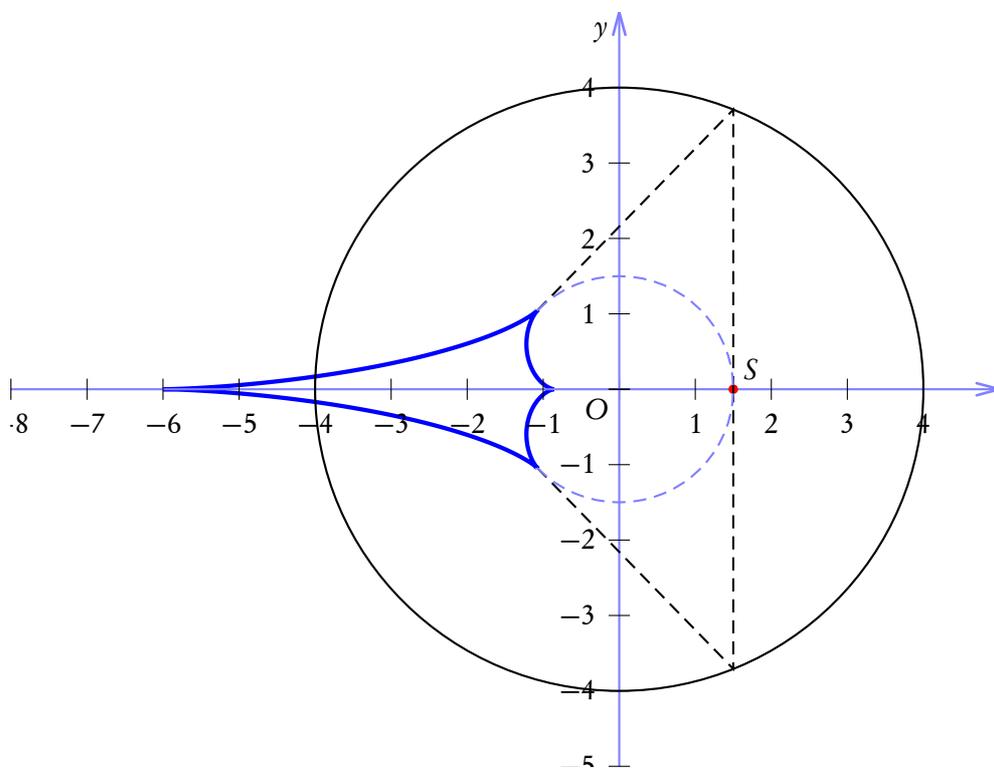
**H. Bouasse** : « Quand le point lumineux (supposé à l'infini à droite) s'approche, les points de rebroussement de la caustique se déplacent vers la droite, mais inégalement vite : celui de gauche va moins vite que celui de droite [...] Quand le point lumineux vient en 2 sur le miroir, un des points de rebroussement disparaît. »



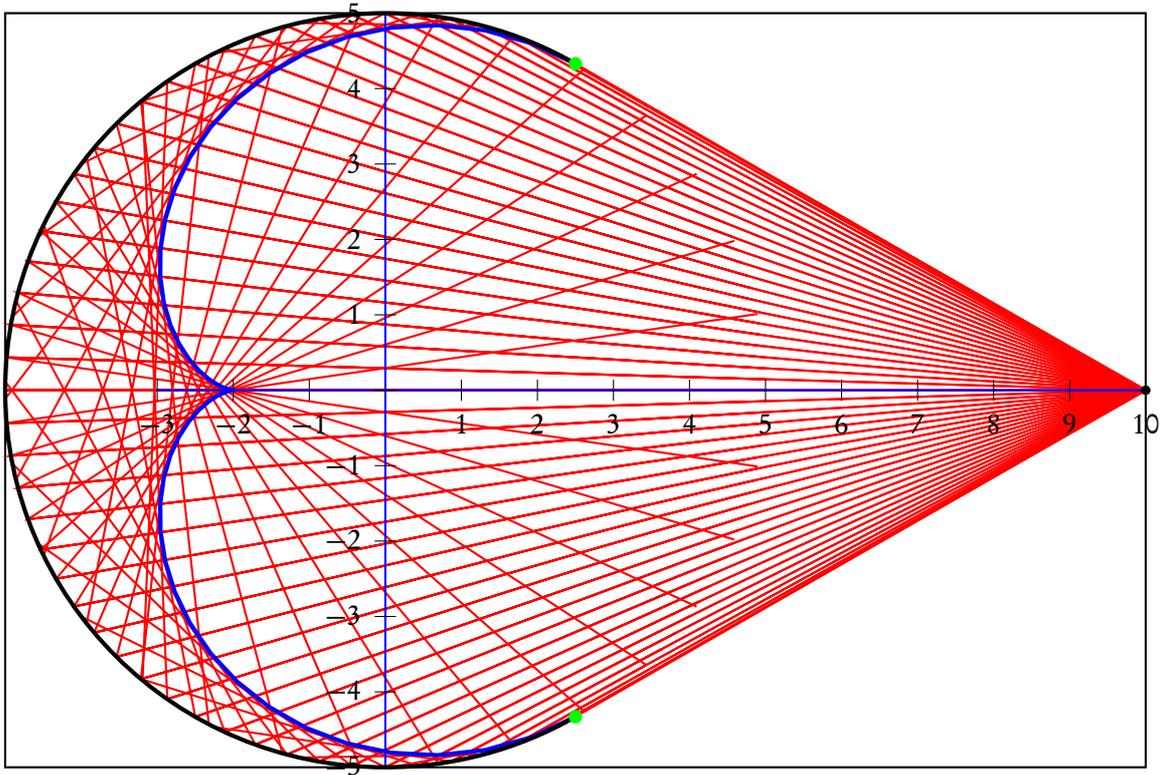
- 3)  $S$  est à l'intérieur du cercle.



**H.Bouasse** : « La caustique se compose de deux branches infinies à asymptotes rectillignes. L'une possède un point de rebroussement sur l'axe des  $x$  ; l'autre en possède trois : un sur l'axe des  $x$ , les autres sur la circonférence  $\Gamma$  qui passe par le point lumineux  $S$ . »



**H.Bouasse** : «  $a < R/2$ , la caustique est tout entière à distance finie. Elle possède quatre points de rebroussement, deux sur  $Ox$ , les deux autres sur le cercle passant par le point lumineux. À mesure que  $a$  diminue, les points d'inflexion se rapprochent ; de sorte que pour  $a = 0$ , la caustique s'évanouit en un point qui est le centre du miroir. »



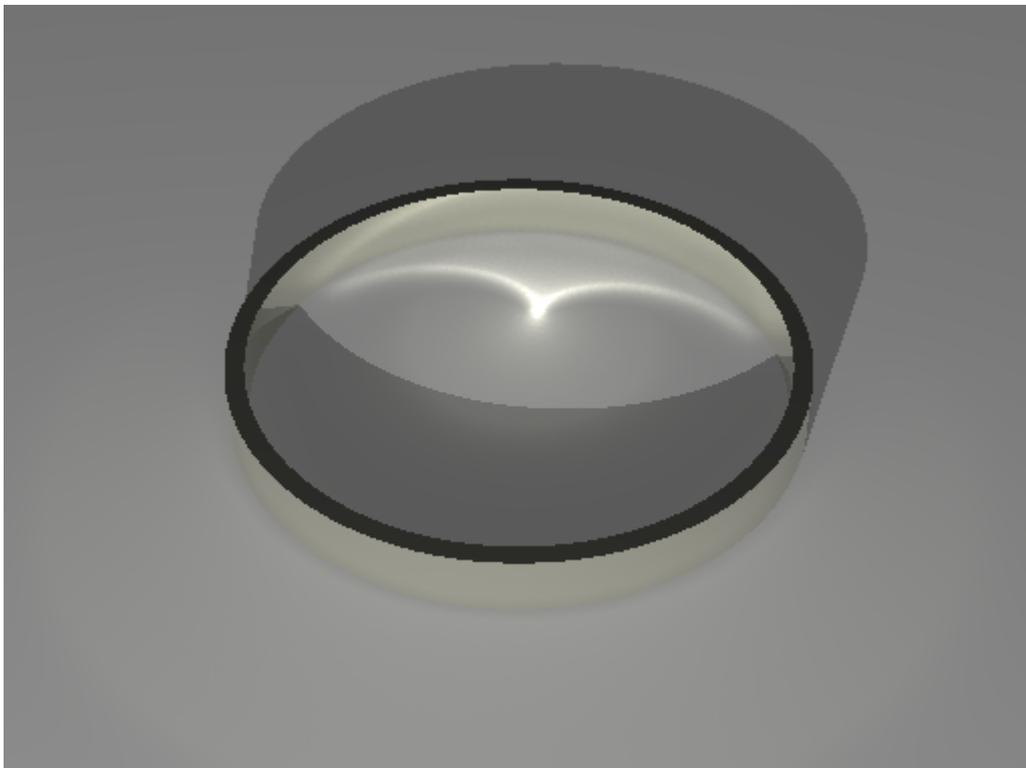
## 2.4 Simulation avec PovRay

```
// File: phot_met_glass.pov
// Desc: metal, glass and photons sample
// Date: August 2001
// Auth: Christoph Hormann
// adaptation par ML
// 9 novembre 2009
#include "colors.inc"
#include "glass.inc"
global_settings {
  assumed_gamma 1
  max_trace_level 25
  ////////// Photons //////////
  photons {
    spacing 0.03
    autostop 0
    jitter 0
  }
}
camera {
  location <20, 20, 20>
  right 1.5*x
  look_at <0,-1,0>
  angle 34
}
light_source {
  <25, 5, 18>
  color rgb <1.0, 1, 1>
  photons {
    reflection on
    refraction off
  }
}
```

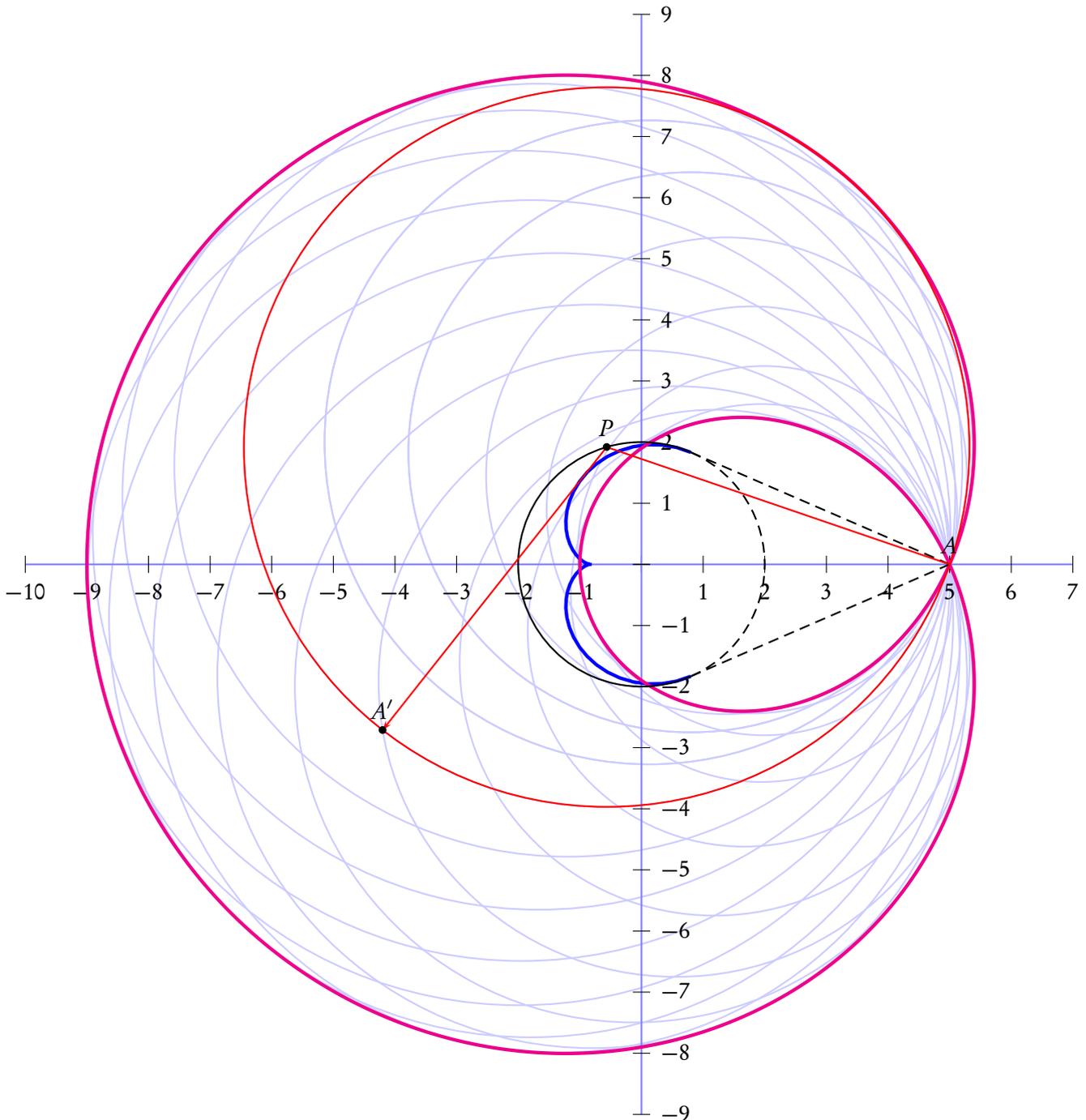
```

}
}
plane {y, -1
texture {
  pigment {checker White Wheat scale 2} // base checker
}
}
#declare Metal_Texture =
texture {
pigment { color rgb <0.7, 0.7, 0.6> }
finish {
reflection { 0.9 metallic }
}
}
#declare Metal_Obj =
difference {
cylinder { -1.0*y, 0.0*y, 6.0 }
cylinder { -5.0*y, 0.25*y, 5.6 }
texture { Metal_Texture }
}
union {
object { Metal_Obj }
photons {
target
reflection on
collect on
}
}
}

```



## 2.5 Surface d'onde après réflexion sur le miroir



**H.Bouasse** : « De Chaque point  $P$  comme centre, décrivons un cercle de rayon  $PA'$  tel que :

$$\overline{AP} + \overline{PA'} = \text{Constante}$$

L'enveloppe des cercles est la méridienne d'une surface d'onde. En particulier il existe une surface d'onde pour laquelle la constante est nulle[...] Elle est l'enveloppe des cercles :

$$(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

»

Je rappelle que  $A(a, b)$  et le point lumineux, on le prend sur l'axe des  $x$ ,  $b = 0$  et que  $P(\alpha, \beta)$  est le point d'incidence sur le miroir ( $\alpha = R \cos t, \beta = R \sin t$ ).

Henri Bouasse donne ensuite une démonstration qui me semble inutilement(?) compliquée. En voici une autre qui me paraît plus simple...

L'équation simplifiée des cercles :

$$x^2 + y^2 - a^2 - 2R(x - a)\cos t - 2yR\sin t = 0$$

On dérive par rapport à  $t$  :

$$2(x - a)R\sin t - 2yR\cos t = 0$$

Le système précédent admet deux solutions :

$$x = a, y = 0$$

et

$$x = -a + 2R\cos t + 2a\sin^2 t$$

$$y = -2a\sin t\cos t + 2R\sin t$$

C'est un *ovale de Descartes* à point double. **H. Bouasse** : « *Le point double A de l'ovale correspond aux tangentes AT menées au cercle. Il va de soit que ces tangentes sont les normales à l'ovale au point A. La caustique est la développée de l'ovale.* »

En voici un autre exemple où le point radian est à l'intérieur, les remarques précédentes ne s'appliquent plus :

