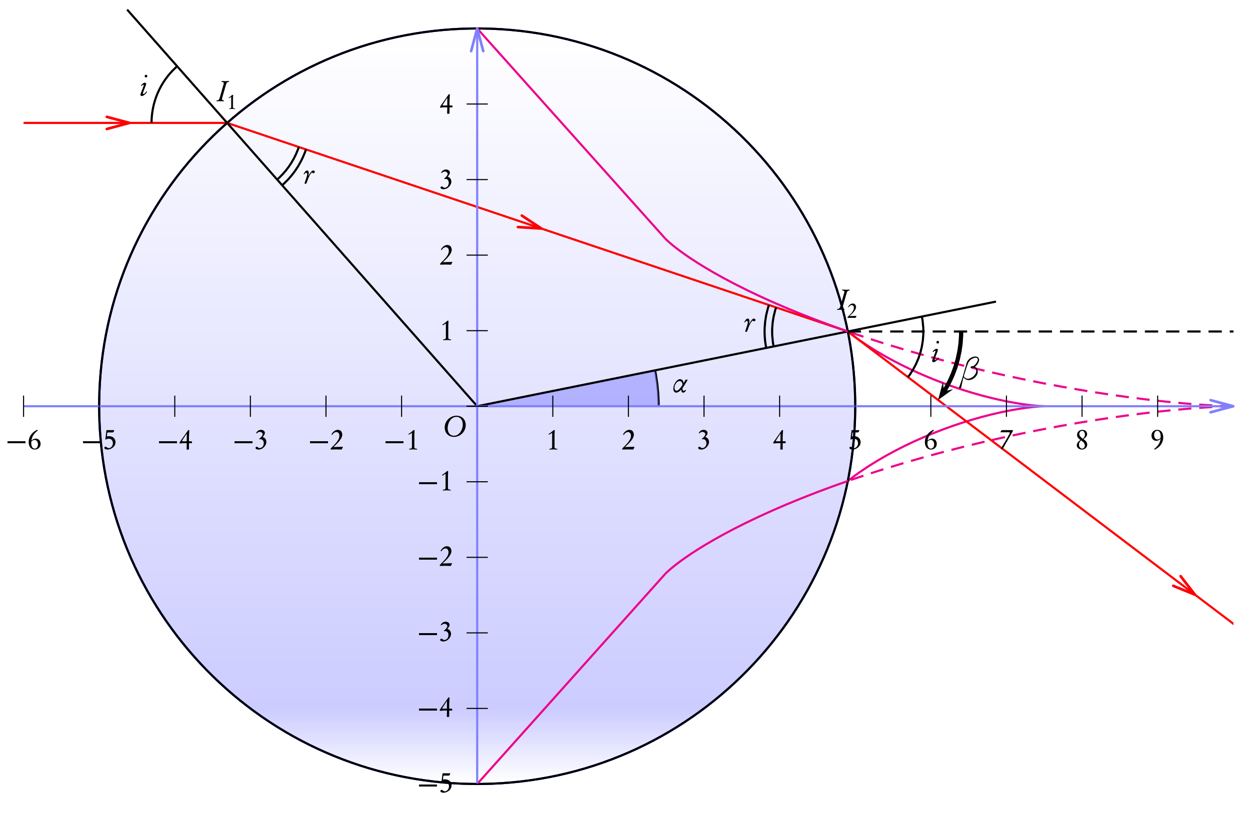

Pour déterminer l'équation du rayon émergent (Δ), nous avons besoin des coordonnées de I_1, I_2, des angles α et β. Le paramètre que nous ferons varier est i, $0 \leqslant i < 90°$.

$$I_1(-R\cos i, R\sin i) \quad ; \quad I_2(R\cos\alpha, R\sin\alpha) \quad ; \quad \alpha = 2r - i \quad ; \quad r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) \quad ; \quad \beta = 2(r-i)$$

$$(\Delta) : \quad y = x\tan\beta + b \quad ; \quad b = R\sin\alpha - R\cos\alpha\tan\beta$$

Calculons la dérivée de (Δ) par rapport à i, elle est notée $(\Delta)'$. On commence par les dérivées de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, β, et $\tan\beta$.

$$(\alpha)' = \frac{2\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - 1$$

$$(\cos\alpha)' = -(\sin\alpha)(\alpha)'$$

$$(\sin\alpha)' = (\cos\alpha)(\alpha)'$$

$$\beta' = \frac{2\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - 2 = (\alpha)' - 1$$

$$(\tan\beta)' = \left(1 + \tan^2\beta\right)(\beta)'$$

$$(\Delta)' : \quad 0 = x(\tan\beta)' + R(\sin\alpha)' - R(\cos\alpha)'\tan\beta - R\cos\alpha(\tan\beta)'$$

La résolution du système $\{(\Delta), (\Delta)'\}$, nous donne les équations paramétriques de la caustique des rayons émergents.

Posons $a = \tan\beta$, $c = (\tan\beta)'$ et $d = R(\sin\alpha)' - R(\cos\alpha)'\tan\beta - R\cos\alpha(\tan\beta)'$. La solution du système s'exprime ainsi :

$$x = -\frac{d}{c} \quad ; \quad y = -\frac{ad}{c} + b$$

Pour calculer l'équation de la caustique dans la boule, il nous faut l'équation (Δ) de I_1I_2 :

$$(\Delta) : \quad y = x\tan\gamma + f \quad ; \quad f = R\sin i + R\cos i\tan\gamma \quad ; \quad \gamma = r - i$$

La dérivée de (Δ) par rapport à i, s'écrit :

$$(\Delta)' \ : \quad 0 = x(\tan\gamma)' + f' \quad ; \quad f' = R\cos i - R\sin i \tan\gamma + R\cos i (\tan\gamma)'$$

$$\gamma' = \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} - 1 \quad ; \quad (\tan\gamma)' = \left(1 + \tan^2\gamma\right)(\gamma)'$$

La résolution du système $\{(\Delta), (\Delta)'\}$, nous fournit les équations paramétriques de la caustique des rayons dans la boule. Posons $e = \tan\gamma$, $g = (\tan\gamma)'$ et $h = f'$.

$$x = -\frac{h}{g} \quad ; \quad y = -\frac{eh}{g} + f$$