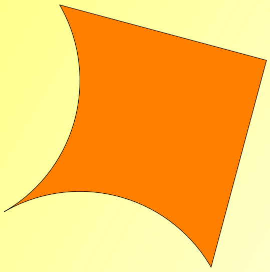
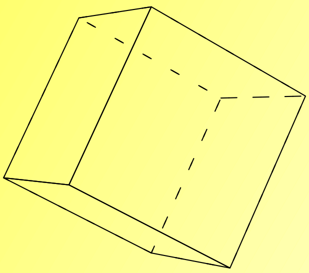
$a^n \times a^m = a^{n+m}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$



Un cours de 4^{e}



26 août 2004

Collège Paul Eluard – BEUVRAGES – Christophe Poulain

Table des matières

I Numérique 2

1 Produit et quotient de 2 nombres relatifs 3

2 Nombres relatifs en écriture fractionnaire 14

3 Les Puissances 23

4 Calcul littéral 31

5 Equations du 1^{er} degré à 1 inconnue 44

6 Ordre 52

II Géométrique 57

7 Triangle rectangle et cercle 58

8 Théorème des milieux 64

9 L'égalité des 3 rapports 73

10 Le Théorème de Pythagore 81

11 Cosinus d'un angle aigu 91

12 Droites remarquables du triangle 99

13 Translations 110

14 Distance, droite et cercle 118

15 Géométrie dans l'espace 122

III Gestion de données 129

16 Applications de la proportionnalité 130

17 Statistiques 137

IV Annexes 145

A Compléments 146

Première partie

Numérique

Chapitre 1

Produit et quotient de 2 nombres relatifs

Sommaire

1.1 Activités **4**
- 1.1.1 Produit de deux nombres relatifs de signes différents 4
- 1.1.2 Produit de deux nombres relatifs de même signe 4
- 1.1.3 Distributivité et nombres relatifs 5
- 1.1.4 Signe d'un produit de plusieurs facteurs 5
- 1.1.5 Quotient de 2 nombres relatifs 6

1.2 Cours **7**
- 1.2.1 Multiplication de deux nombres relatifs 7
- 1.2.2 Signe d'un produit de plusieurs facteurs 7
- 1.2.3 Quotient de deux nombres relatifs 7
- 1.2.4 Inverse d'un nombre relatif différent de 0 7

1.3 Exercices **8**

1.4 Récapitulatif **13**

1.1. Activités

1.1.1 Produit de deux nombres relatifs de signes différents

On sait que $2+2+2+2+2+2=6\times 2=12$ ou que $5+5+5+5+5+5+5+5=8\times 5=40$.

1. (a) Calculer les expressions suivantes.

$$\begin{aligned}
A &= (-2)+(-2)+(-2)=\dots\\
B &= (-5)+(-5)+(-5)+(-5)+(-5)\\
C &= (-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7)\\
D &= (-4)+(-4)+(-4)
\end{aligned}$$

   (b) Ecrire sous la forme d'une multiplication les expressions A, B, C et D précédentes.

   (c) Regrouper les deux résultats sous la forme d'une égalité.
   Que remarque-t-on ?

2. Construisons différentes tables de multiplications.

$$\begin{array}{rcccll}
\vdots & \times & 4 & = & \vdots & \\
3 & \times & 4 & = & 12 & -\dots\\
2 & \times & 4 & = & 8 & -\dots\\
1 & \times & 4 & = & 4 & -\dots\\
0 & \times & 4 & = & 0 & -\dots\\
-1 & \times & 4 & = & \dots & -\dots\\
-2 & \times & 4 & = & \dots & -\dots\\
-3 & \times & 4 & = & \dots & -\dots\\
-4 & \times & 4 & = & \dots & -\dots\\
\vdots & \times & 4 & = & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccll}
\vdots & \times & 2 & = & \vdots & \\
3 & \times & 2 & = & 6 & -\dots\\
2 & \times & 2 & = & 4 & -\dots\\
1 & \times & 2 & = & 2 & -\dots\\
0 & \times & 2 & = & 0 & -\dots\\
-1 & \times & 2 & = & \dots & -\dots\\
-2 & \times & 2 & = & \dots & -\dots\\
-3 & \times & 2 & = & \dots & -\dots\\
-4 & \times & 2 & = & \dots & -\dots\\
\vdots & \times & 2 & = & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccll}
\vdots & \times & 7 & = & \vdots & \\
3 & \times & 7 & = & 21 & -\dots\\
2 & \times & 7 & = & 14 & -\dots\\
1 & \times & 7 & = & 7 & -\dots\\
0 & \times & 7 & = & 0 & -\dots\\
-1 & \times & 7 & = & \dots & -\dots\\
-2 & \times & 7 & = & \dots & -\dots\\
-3 & \times & 7 & = & \dots & -\dots\\
-4 & \times & 7 & = & \dots & -\dots\\
\vdots & \times & 7 & = & \vdots &
\end{array}$$

Le produit de deux nombres relatifs de signes différents est ....

1.1.2 Produit de deux nombres relatifs de même signe

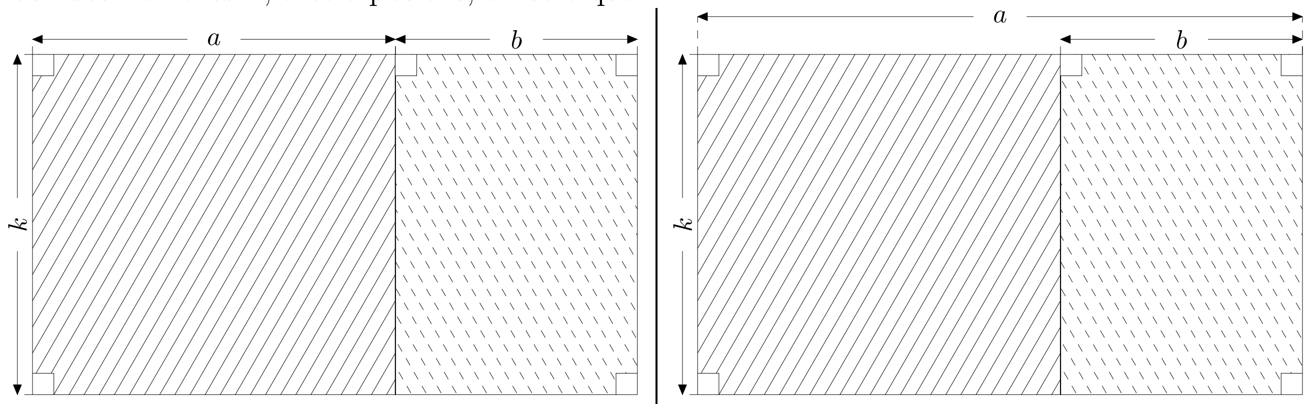
Examinons maintenant le cas de deux nombres négatifs à l'aide de notre nouvelle règle de calculs.
Construisons les tables de multiplications des nombres -3, -5 et -8

$$\begin{array}{rcccll}
\vdots & \times & \text{(-3)} & = & \vdots & \\
3 & \times & \text{(-3)} & = & \text{-9} & +\dots\\
2 & \times & \text{(-3)} & = & \text{-6} & +\dots\\
1 & \times & \text{(-3)} & = & \text{-3} & +\dots\\
0 & \times & \text{(-3)} & = & \text{-0} & +\dots\\
-1 & \times & \text{(-3)} & = & \dots & +\dots\\
-2 & \times & \text{(-3)} & = & \dots & +\dots\\
-3 & \times & \text{(-3)} & = & \dots & +\dots\\
-4 & \times & \text{(-3)} & = & \dots & \\
\vdots & \times & \text{(-3)} & = & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccll}
\vdots & \times & \text{(-5)} & = & \vdots & \\
3 & \times & \text{(-5)} & = & \text{-15} & +\dots\\
2 & \times & \text{(-5)} & = & \text{-10} & +\dots\\
1 & \times & \text{(-5)} & = & \text{-5} & +\dots\\
0 & \times & \text{(-5)} & = & \text{-0} & +\dots\\
-1 & \times & \text{(-5)} & = & \dots & +\dots\\
-2 & \times & \text{(-5)} & = & \dots & +\dots\\
-3 & \times & \text{(-5)} & = & \dots & +\dots\\
-4 & \times & \text{(-5)} & = & \dots & \\
\vdots & \times & \text{(-5)} & = & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccll}
\vdots & \times & \text{(-8)} & = & \vdots & \\
3 & \times & \text{(-8)} & = & \text{-24} & +\dots\\
2 & \times & \text{(-8)} & = & \text{-16} & +\dots\\
1 & \times & \text{(-8)} & = & \text{-8} & +\dots\\
0 & \times & \text{(-8)} & = & \text{-0} & +\dots\\
-1 & \times & \text{(-8)} & = & \dots & +\dots\\
-2 & \times & \text{(-8)} & = & \dots & +\dots\\
-3 & \times & \text{(-8)} & = & \dots & +\dots\\
-4 & \times & \text{(-8)} & = & \dots & \\
\vdots & \times & \text{(-8)} & = & \vdots &
\end{array}$$

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est ....

1.1.3 Distributivité et nombres relatifs

Pour des nombres k, a et b positifs, on sait que



$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ $\qquad$ $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Que se passe-t-il si k, a ou b sont des nombres négatifs ?
Recopie et complète le tableau suivant :

k	a	b	$k \times a$	$k \times b$	$k \times a + k \times b$	$(a + b)$	$k \times (a + b)$
2	3	-1					
2	3	-4					
3	-4	2					
3	-4	7					
4	-3	-2					
-5	-3	-2					

Que remarque-t-on pour les colonnes grisées ?

1.1.4 Signe d'un produit de plusieurs facteurs

On donne le produit suivant :

$$A = (-3) \times 5 \times 7 \times (-9) \times (-11) \times (-7) \times 4 \times (-6)$$

On se propose de déterminer le signe de l'expression A.

1. Recopie et complète en déterminant le signe de chacun des 7 produits qui composent l'expression A.

$$A = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(-3) \times 5}_{\text{signe...}} \times 7}_{\text{signe...}} \times (-9)}_{\text{signe...}} \times (-11)}_{\text{signe...}} \times (-7)}_{\text{signe...}} \times 4}_{\text{signe...}} \times (-6)}_{\text{signe...}}$$

2. Classe ces produits suivant leur signe.
3. Qu'ont en commun les produits dont le signe est positif ? Qu'ont en commun les produits dont le signe est négatif ?

Lorsque je multiplie plusieurs facteurs, il faut ....
....
pour obtenir le signe de ce produit de plusieurs facteurs.

1.1.5 Quotient de 2 nombres relatifs

1. Recopie et trouve la valeur manquante dans chacun des cas :

$$4 \times \ldots = 12 \qquad 5 \times \ldots = -10 \qquad \ldots \times 7 = -21$$
$$\ldots \times (-8) = -24 \qquad -9 \times \ldots = 36 \qquad \ldots \times (-10) = 110$$

2. On sait que *le quotient* de a par b ($b \neq 0$) est le nombre qui multiplié par b donne a. Par exemple, le quotient de 18 par 3 est 6 (car $3 \times 6 = 18$ ou $18 \div 3 = 6$).
Traduis chacune des égalités de la question précédente par une phrase commençant par « *Le quotient de...*
3. Que remarque-t-on ?
4. Prouvons cette dernière remarque.
Soit a et b deux nombres relatifs quelconques (avec $b \neq 0$) tels que

$$b \times \ldots = a$$

Plusieurs cas sont possibles :

si a et b sont positifs	si a et b sont négatifs	si a est positif et si b est négatif
$\underbrace{b}_{+} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{+}$	$\underbrace{b}_{-} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{-}$	$\underbrace{b}_{-} \times \underbrace{\ldots}_{...} = \underbrace{a}_{+}$
Quotient de a par b : ...	Quotient de a par b : ...	Quotient de a par b : ...

Le quotient de 2 nombres relatifs de mêmes signes est ....
Le quotient de 2 nombres relatifs de signes différents est ....

1.2.1 Multiplication de deux nombres relatifs

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est POSITIF.
Le produit de deux nombres relatifs de signes est NÉGATIF.

Exemples $(-2) \times (-3) = +6$ $\quad (-4) \times (+6) = -24$ $\quad (+7) \times (-3) = -21$

Multiplication par 0 Si a est un nombre relatif quelconque alors $a \times 0 = 0 \times a = 0$.

Multiplication par -1 Multiplier un nombre relatif par -1, c'est prendre l'opposé de ce nombre.

$$(-1) \times a = a \times (-1) = -a$$

Distributivité Si a, b, k sont trois nombres relatifs quelconques alors

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \qquad k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

1.2.2 Signe d'un produit de plusieurs facteurs

Lorsque l'on multiplie des nombres relatifs différents de 0 :
– s'il y a un nombre PAIR de facteurs **négatifs** alors le produit est POSITIF.
– s'il y a un nombre IMPAIR de facteurs **négatifs** alors le produit est NÉGATIF.

Exemples Soit $A = (-4) \times 3 \times (-7) \times (-110) \times (-17)$.
A est positif car il y a 4 facteurs négatifs (4 est pair).
Soit $B = 13 \times (-19) \times (-53) \times (-15)$.
B est négatif car il y a 3 facteurs négatifs (3 est impair).

1.2.3 Quotient de deux nombres relatifs

Le nombre x qui vérifie $ax = b$ (avec $a \neq 0$) s'appelle **le quotient** de b par a. Il se note $\dfrac{b}{a}$: $x = \dfrac{b}{a}$.

Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est POSITIF.
Le quotient de deux nombres relatifs de signes différents est NÉGATIF.

Exemples $\dfrac{-7}{-2} = \dfrac{7}{2} = 3,5$ $\qquad \dfrac{-9}{3} = \dfrac{9}{-3} = -\dfrac{9}{3} = -3$

1.2.4 Inverse d'un nombre relatif différent de 0

L'inverse d'un nombre relatif x (avec $x \neq 0$) est le quotient de 1 par x ; on le note $\dfrac{1}{x}$.

$$x \times \frac{1}{x} = 1$$

1.3. Exercices

Exercice 1 – numerique/relatifs/exoa1

Effectue, en les détaillant, les calculs suivants

$$A = (-1) + (-3) + (-5) \qquad B = 1 + 3 + (-5)$$
$$C = (-2) - (-5) + 3 \qquad D = 2 + (-5) - (-4)$$

Exercice 2 – numerique/relatifs/exoa2

Calcule les expressions suivantes

$$G = 4,5 - 18,1 + 0,25 + 9 - 1,9 \qquad H = -72 + 185 - 61 - 61 - 83$$
$$I = -12 + 7 - 8 - 10 + 3 \qquad J = 67 - 3,4 + 15 - 0,6 - 2$$
$$K = 8 + (-9 - 5) \qquad L = (3,5 - 7) - (9,5 - 5,5)$$
$$M = -(12,4 - 9) + (1 - 10,5) - (14 - 9)$$

Exercice 3 – numerique/relatifs/exoa3

Effectue les calculs suivants :

$$A = (-2) \times (+3) \qquad B = 4 \times (-5) \qquad C = (-4) \times (-3)$$
$$D = (-5) \times 5 \qquad E = 5 \times (+2) \qquad F = (-7) \times 4$$

Exercice 4 – numerique/relatifs/exoa4

Recopie et complète le tableau :

$\times$	-2	0	$+5$	$+10$
-10				
-5				
-1				
$+2$				

Exercice 5 – numerique/relatifs/exoa5

Dans un repère du plan,

1. Placer les points S, A, R, D, I, N et E dont les coordonnées sont indiquées dans le tableau, puis relier les points dans cet ordre en terminant par le segment $[ES]$.

S	A	R	D	I	N	E
$(2;-0,5)$	$(1,5;-0,5)$	$(1;0)$	$(1,1)$	$(0,5;0,5)$	$(1,5;0,5)$	$(2;0)$

2. On obtient les coordonnées des points S', A', R', D', I', N' et E' en multipliant celles des points S, A, R, D, I, N et E par (-4).
Recopie et complète le tableau uivant, puis place ces sept nouveaux points dans le même repère qu'au 1 et relie-les.

S'	A'	R'	D'	I'	N'	E'

Exercice 6 – numerique/relatifs/exoa6

Donne le signe des 2 produits suivants. Justifie la réponse.

$$I = 3,1 \times 4,2 \times (-1,2) \times (-1,3) \times 4,7 \times (-1,9)$$
$$J = (-19,1) \times (-37,2) \times 17,4 \times (-43,7) \times (-51,2)$$

Exercice 7 – numerique/relatifs/exoa7

Calcule les expressions suivantes en précisant chacune des étapes :

$$N = (-8) + 5 \times (-3) \qquad P = (-3-8) \times 7 + 4$$
$$R = 7 - 2 \times (4-9) \qquad S = -32 - (4-20) \times 2$$
$$T = 3 \times 11 - 10 \times (-2) \qquad V = 4 + (-7) \times (-3) + 2 \times (-10)$$

Exercice 8 – numerique/relatifs/exoa8

On donne les expressions suivantes

$$G = -4x - 3 \qquad H = 4 \times (x-3) \qquad I = 4 + x \qquad J = 4 - x$$

Calculer G, H, I, J pour $x = -5$.

Exercice 9 – numerique/relatifs/exoa9

La lumière solaire pénètre jusqu'à la côte -500 mètres sous le niveau de la mer.

1. Des scientifiques ont mesuré que les cachalots peuvent descendre 5 fois plus profondément que la lumière solaire.
   Quelle côte peuvent atteindre les cachalots ?
2. En 1960, le bathyscaphe Trieste, est descendu $21,8$ fois plus profondément que la lumière solaire.
   Quelle côte avait atteint ce sous-marin ?

Exercice 10 – numerique/relatifs/exoa10

Au large de la Floride, il existe une dépression sous-marine qui atteint $5\,850\,m$ de profondeur. Un engin aquatique télécommandé s'enfonce sous l'eau par palier de $-850\,m$. Il réalise quatre plongées successives.

1. De combien de mètres devra-t-il encore descendre sous l'eau ?
2. Cela nécessitera encore combien de plongées ?

⋆⋆

Exercice 11 – numerique/relatifs/exob1

Effectue les opérations proposées en détaillant les calculs :

$$A = 3 \times (-5) + (-30) \div 5 \qquad B = \left[36 \div (-9) + 2\right] \times 5 - 2$$
$$C = \left[8 \times (-5) + 8\right] \div 4 \qquad D = \left(-4 \times 5 + 2\right) \div \left((-10) \div (-5) + 7\right)$$

Exercice 12 – numerique/relatifs/exob2

Effectue les opérations proposées en détaillant les calculs :

$$E = 3 \times (-5) + (-6) \times 5 \qquad F = [4 \times (-9) + 2] \times 5 - 2$$
$$G = 8 \times (-5) + 3 - (-6) \times 8 \qquad H = (-4 \times 5 + 2) \times (2 \times (-5) + 1)$$

Exercice 13 – numerique/relatifs/exob3

Recopie et complète les tableaux suivants en faisant apparaître les calculs.

a	b	$a \times b$	$a + b$	$a - b$
3	-2			
4	5			
-6	-7			
-4	2			

a	b	c	$a \times b$	$a \times c$	$b \times c$	$a + c$	$b + c$
2	3	-1					
-2	-4	-5					
0	2	4					
4	-1	5					

Exercice 14 – numerique/relatifs/exob4

Un carré magique de produits est un tableau tel que les produits des nombres écrits sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chacune des deux diagonales, sont égaux.
Vérifie si le tableau ci-dessous est un carré magique de produits :

-1	-5	$1,6$
$-3,2$	2	$-1,25$
$2,5$	$-0,8$	-4

Exercice 15 – numerique/relatifs/exob5

Indique la bonne réponse en effectuant les calculs sans calculatrice.

	Réponse A	**Réponse B**
$(50-72)-(27-49)$	-98	0
$-5+(-5)\times 3$	30	-20
$3-6\times(-1)$	3	9
$-12+(-10)\times(-2)$	-7	11
$8\times(-4)-(-6)\times 2$	-29	-13

Exercice 16 – numerique/relatifs/exob6

Effectue les calculs suivants

$$A=[(-3)\times 7+6]\div(-5) \qquad B=[(-40)\div 8+7]\times(-3)$$
$$C=18\div(-6)-5\times(-2) \qquad D=(7-(-3)\times 4)\times(-2)+(-12)$$
$$E=3\times(-5)+(-25)\div 5 \qquad F=[36\div(-9)+2]\times 5-2$$
$$G=8\times(-5)+3-(-48)\div 8 \qquad H=(-4\times 5+2)\div(2\times(-6)+1)$$

Exercice 17 – numerique/relatifs/exob7

Détermine la valeur des expressions suivantes pour $x=2$, $y=-3$, $z=-5$ puis pour $x=-4$, $y=-1$, $z=-2$.

$$A=4\times x-2\times y+3\times z \qquad B=xy+yz+zx$$

Exercice 18 – numerique/relatifs/exob8

1. Calcule les expressions suivantes avec $a=-2$, $b=-3$ et $c=4$.

$$E=2a-3b-5c \qquad F=\frac{5a-c}{b-c} \qquad G=\frac{c-a}{b}-2$$

2. Calcule ensuite $E+F-G$.

Exercice 19 – numerique/relatifs/exob9

Pour $a=-1,5$, $b=2$, $c=-5$, calcule les valeurs des expressions suivantes

$$A=abc \qquad B=ab+c$$
$$C=a(b+c) \qquad D=2a+3b-4c$$

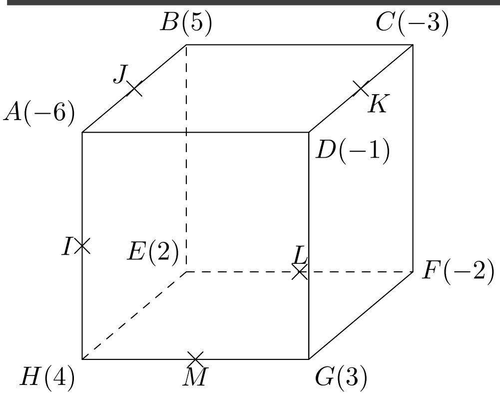
⋆⋆⋆

Exercice 20 – numerique/relatifs/exoc1

Calcule la valeur de chacune des expressions suivantes :

$$D=[-9-(-3)]\times[16\div(-4)] \qquad E=(8\times[-1-(-2)])\div(-4)$$
$$F=\frac{8-(-1)\times 4}{-5+2}$$

Exercice 21 – numerique/relatifs/exoc2



On considère un cube $ABCDEFGH$ sur lequel on place à chaque sommet des nombres relatifs. La valeur de chaque sommet est indiqué sur la figure ci-contre.
On cherche à étudier différents trajets reliant les points I, J, K, L et M en suivant les arêtes du cube. On va donc comparer les trajets en leur donnant une valeur : *la somme des nombres relatifs associés à chaque sommet rencontrés sur le trajet.*

1. Vérifie que le trajet IK en passant par A et D vaut -7.
2. Donne la valeur des trajets IL en 3 sommets.
3. Donne la valeur des trajets IK en 3 sommets.
4. Donne la valeur des trajets JK en 4 sommets.
5. Donne la valeur du trajet JI en 7 sommets.

Exercice 22 – numerique/relatifs/exoc3

Calcule les expressions suivantes

$$A = 11 + 2 \times [(-3) + (-7) \times 3] \qquad B = (-14) \div (-7) + (-3) \div 5$$

$$C = \frac{(-1) \times (-2) - (-3) \times 4}{2 - 2 \times (-6)} \qquad D = \frac{15 + [(-3) \times (-2) + (-5)]}{-2 \times 7 - [(-6) + 8 \times (-3)]}$$

Exercice 23 – numerique/relatifs/exoc4

Calcule les expressions données en utilisant les valeurs $a = -11$; $b = 5$; $c = -2$.

$$A = a - bc \qquad B = (a - b)c$$
$$C = 2a - (3b + 5c) \qquad D = -(a + b) - 2c$$

Exercice 24 – numerique/relatifs/exoc5

1. J'ai choisi un nombre x. Je lui ai retranché 12 et j'ai multiplié le résultat par -9. J'ai ainsi trouvé 900.
   Quelle était la valeur de x ?
2. J'ai choisi un nombre y. Je l'ai multiplié par -100 et j'ai ajouté 1 000 au résultat. J'ai ainsi trouvé 999.
   Quelle était la valeur de y ?

Exercice 25 – numerique/relatifs/exoc6

Indique, en justifiant la réponse, si l'affirmation $4x + 2y > -12$ est vraie pour $x = 0$ et $y = -7$; puis pour $x = 1$ et $y = -5$; puis pour $x = -4$ et $y = 0$.

Exercice 26 – numerique/relatifs/exoc7

1. (a) Jérémy a multiplié la somme de -7 et de 3 par -6. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

   $$-7 + 3 \times (-6) \qquad (-7 + 3) \times (-6) \qquad (3 - 7) \times (-6)$$

   (b) Jérémy a ensuite multiplié la somme de -8 et de 3 par 6. Quel nombre Jérémy a-t-il calculé ?

2. (a) Eva a ajouté 6 au produit de -5 par 4. Parmi les expressions suivantes, choisis celle(s) qui correspond(ent) à son calcul :

$$-5 + 4 \times 6 \qquad ((-5) \times 4) + 6 \qquad 4 \times (-5) + 6$$

(b) Eva a ensuite fait la somme du produit de -6 par 4 et de 5. Quel nombre Eva a-t-elle calculé ?

Exercice 27 – numerique/relatifs/exoc8

Calculez :

1. Le produit des inverses de -2 et 5.
2. L'inverse du produit de -2 et 5.
3. L'opposé de l'inverse de -2.
4. L'inverse de l'opposé de 5.

Exercice 28 – numerique/relatifs/exoc9

Effectue les opérations proposées en détaillant les calculs :

$$E = 3 \times \big[(-5) + (-6)\big] \times 5$$
$$F = \big[4 \times (-9) + 1\big] \div (5 - 2)$$
$$G = (-3) \times \big[5 + 4 \times (-2)\big] + 28 \div (-4)$$
$$H = \big[(-3) \times 2 + 5 \times 8\big] \div \big[5 \times (-3) - 2\big]$$

1.4. Récapitulatif

Addition de 2 nombres relatifs.

Les 2 nombres relatifs ont le même signe.

On garde le signe et ensuite on additionne.

$(+4)+(+3)=7$
$(-5)+(-8)=-13$

Les 2 nombres relatifs n'ont pas le même signe.

Le plus éloigné, sur une droite graduée, de l'origine « l'emporte ».

$(-5)+(+3)=-2$
$(+10)+(-7)=3$

Soustraction de 2 nombres relatifs.

Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé.

$3-(-7)=3+(+7)$
$4-(+5)=4+(-5)$

On effectue ensuite l'addition.

$4-(-9)=4+(+9)$
$4-(-9)=13$

Multiplication de 2 nombres relatifs

Les 2 nombres relatifs ont le même signe.

Le produit est POSITIF.

$-4\times(-7)=28$
$3\times 8=24$

Les 2 nombres ont des signes différents.

Le produit est NÉGATIF.

$-5\times(+3)=-15$
$(+10)\times(-7)=-70$

Division de 2 nombres relatifs

Les 2 nombres relatifs ont le même signe.

Le quotient est POSITIF.

$-28\div(-7)=4$
$24\div 3=8$

Les 2 nombres ont des signes différents.

Le quotient est NÉGATIF.

$(-15)\div 3=-5$
$10\div(-2)=-5$

Chapitre 2

Nombres relatifs en écriture fractionnaire

Sommaire

2.1 Activité **15**
2.1.1 Division et inverse 15
2.1.2 Inverse d'une fraction 15
2.2 Cours **16**
2.2.1 Quotients égaux de 2 nombres relatifs. 16
2.2.2 Addition et soustraction de deux fractions 16
2.2.3 Multiplication de deux fractions 16
2.2.4 Division de deux fractions 17
2.3 Exercices **18**
2.4 Récapitulatif **22**

2.1. Activité

2.1.1 Division et inverse

1. Rappelle la définition de l'inverse d'un nombre relatif non nul. (On pourra donner des exemples.)
2. Recopie et complète les égalités suivantes :

$$5 \times \frac{1}{3} = \ldots \qquad -7 \times \frac{\ldots}{4} = \frac{-7}{4} \qquad 8 \times \frac{1}{\ldots} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{7}{5} = 7 \times \frac{1}{\ldots} \qquad \frac{12}{-7} = \ldots \times \frac{1}{-7} \qquad \frac{-14}{19} = -14 \times \frac{\ldots}{19}$$

3. La deuxième ligne est composée de quotients égaux à des produits. Traduis ces égalités mathématiques par des phrases de la forme *Le quotient de ... par ... est égal...* puis par des phrases de la forme *si je divise ... par ... alors cela revient à ...*
4. Si je souhaite diviser un nombre relatif a par un nombre relatif non nul b, que dois-je faire ?

2.1.2 Inverse d'une fraction

1. Considérons la fraction $\frac{2}{3}$ et cherchons l'inverse de cette fraction. On doit donc trouver le nombre qui vérifie

$$\frac{2}{3} \times ? = 1$$

Recopie et complète les égalités ci-dessous :

$$\frac{2}{3} \times \ldots = \underbrace{\frac{2 \times \ldots}{3 \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{1}{1}}_{\text{détails des calculs}} = 1$$

Donc l'inverse de la fraction $\frac{2}{3}$ est ....

2. Donne les inverses des fractions $\frac{7}{5}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{8}{-9}$, $-\frac{12}{7}$.

2.2. Cours

2.2.1 Quotients égaux de 2 nombres relatifs.

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas lorsque l'on multiplie (ou on divise) ces deux nombres par un même nombre relatif non nul (différent de 0).

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c} \quad (b \neq 0; c \neq 0)$$

<u>Exemples</u> $\frac{0,3}{-20} = \frac{0,3 \times 10}{-20 \times 10} = \frac{3}{-200} = -\frac{3}{200}$ $\qquad \frac{-18}{12} = \frac{(-3) \times 6}{2 \times 6} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$ (Simplification)

2.2.2 Addition et soustraction de deux fractions

Les dénominateurs sont identiques

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le même dénominateur.

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k} \qquad \frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k} \qquad (k \neq 0)$$

<u>Exemples</u> $\frac{-7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-7+2}{3} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$ $\qquad \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1-3}{5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$

Les dénominateurs sont différents

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, on les réduit au même dénominateur et on applique la règle précédente.

<u>Exemples</u> $\frac{-1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{-2}{6} + \frac{15}{6} = \frac{-2+15}{6} = \frac{13}{6}$ On cherche un multiple de 3 et de 2.

$\frac{5}{4} - \frac{7}{6} = \frac{15}{12} - \frac{14}{12} = \frac{15-14}{12} - \frac{1}{12}$ On cherche un multiple de 4 et 6.

2.2.3 Multiplication de deux fractions

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad (b \neq 0;\ d \neq 0)$$

<u>Exemples</u> $\frac{3}{5} \times \frac{-2}{7} = \frac{3 \times (-2)}{5 \times 7} = \frac{-6}{35}$ $\qquad 4 \times \frac{9}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{9}{5} = \frac{4 \times 9}{1 \times 5} = \frac{36}{5}$.

2.2.4 Division de deux fractions

Diviser par un nombre relatif différent de 0, c'est multiplier par l'inverse de ce nombre.

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad (b \neq 0)$$

<u>Exemple</u> $\dfrac{-2}{0,25} = -2 \times \dfrac{1}{0,25} = -2 \times 4 = -8.$

L'inverse de la fraction $\dfrac{c}{d}$ est la fraction $\dfrac{d}{c}$ (avec $c \neq 0$; $d \neq 0$).

Diviser par une fraction $\dfrac{c}{d}$ ($c \neq 0$; $d \neq 0$), c'est multiplier par l'inverse de cette fraction.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

<u>Exemples</u> $\dfrac{3}{4} \div \dfrac{7}{5} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{3 \times 5}{4 \times 7} = \dfrac{15}{28}$ $\quad$ $\dfrac{4}{3} \div 9 = \dfrac{4}{3} \div \dfrac{9}{1} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{27}.$

2.3. Exercices

— ⋆ —

Exercice 1 – numerique/fractions/exoa1

On donne

$$a = \frac{2}{3} \qquad b = -3 \qquad \text{et} \qquad c = -\frac{3}{4}$$

Exprimer sous forme fractionnaire : $a+b+c$, $a+b-c$, $-a-b+c$, $a+bc$, abc.

Exercice 2 – numerique/fractions/exoa2

Les $\frac{4}{5}$ des élèves d'une classe ont participé à une excursion ; les $\frac{2}{3}$ des élèves partis sont des filles.

1. Quelle fraction de la classe représentent les filles qui sont parties en excursion ?
2. Il y a 30 élèves dans la classe. Combien de filles ont participé à l'excursion ?

Exercice 3 – numerique/fractions/exoa3

Martine, Pascale et Agnès veulent acheter ensemble une chaîne HI-FI de 1 995€. Martine peut payer $\frac{1}{3}$ du prix, Pascale $\frac{2}{5}$ et Agnès $\frac{2}{7}$. Est-ce suffisant ?

Exercice 4 – numerique/fractions/exoa4

Après lavage, un drap a rétréci et perdu $\frac{2}{27}$ de sa longueur.

1. Quelle fraction de sa longueur de départ reste-t-il ?
2. Désormais, le drap mesure $2,25\,m$ de long. Calcule sa longueur de départ.

— ⋆⋆ —

Exercice 5 – numerique/fractions/exob1

Quatre enfants découpent un pain d'épice pour leur goûter : Alice en prend le tiers, Benoît les $\frac{3}{5}$ de ce qu'a laissé Alice puis Cécile et Lucas, les jumeaux, se partagent le reste de manière égale.

1. Choisis parmi les trois calculs suivants celui qui permet d'obtenir la fraction de pain d'épice reçue par chacun des jumeaux. Explique ton choix.

$$X = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) \div 2 \quad Y = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times 2 \quad Z = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2}$$

2. Effectue le calcul choisi.

Exercice 6 – numerique/fractions/exob2

La société Livrevite doit distribuer 183 colis pour Noël. Elle décide de confier ce travail à ses deux meilleurs livreurs : Eole et Zéphir. Ceux-ci se partagent les colis.

A la fin de la première journée, Eole a livre les $\frac{2}{5}$ de ses colis, c'est-à-dire 36 colis.

1. Combien Eole doit-il encore livrer de colis les jours suivants ?
2. Combien de colis Zéphir doit-il distribuer ?
3. Sachant que Zéphir a distribué les $\frac{2}{3}$ de ses colis le premier jour, combien doit-il en livrer les jours suivants ?
4. Quelle fraction du nombre total de colis représentent tous les colis distribués par les 2 livreurs le premier jour ?

Exercice 7 – numerique/fractions/exob3

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \qquad B = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) \times \frac{2}{5}$$

Exercice 8 – numerique/fractions/exob4

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \qquad B = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\right) \times \frac{2}{3}$$

Exercice 9 – numerique/fractions/exob5

Pour son rayon de café de luxe, monsieur Robusta achète 168 kilogrammes de café vert. Après transformation, monsieur Robusta constate avec horreur que ce café perd $\frac{6}{35}$ de sa masse.

1. Vérifie que la masse perdue pendant la transformation est égale à $28,8\,kg$.
2. Monsieur Robusta vend ce café transformé 9,30€ le kilogramme. Quelle somme d'argent Monsieur Robusta récupère-t-il si tout son café transformé est vendu ?
3. Le prix d'achat des 168 kilogrammes de café vert représente 55% de la somme obtenue par la vente. Combien ont coûté les 168 kilogramme de café vert à Monsieur Robusta ?

Exercice 10 – numerique/fractions/exob6

4 personnes découvrent un trésor et le partage se fait de la façon suivante : la 1re personne prend un quart du trésor, la deuxième un tiers, la troisième $\frac{1}{5}$ et la dernière personne reçoit le reste soit 117 pièces d'or.

1. Quelle est la fraction du trésor que représente la part de la 4^{e}personne ?
2. Déduis-en que le trésor contenait 540 pièces d'or.
3. Quels sont les nombres de pièces obtenus par chacune des personnes ?

Exercice 11 – numerique/fractions/exob7

On donne les nombres

$$A = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{5} \qquad B = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{5}{3}$$

Calcule les expressions A et B. On écrira les résultats sous la forme de fractions aussi simples que possible.

Exercice 12 – numerique/fractions/exob8

Une balle rebondit aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur où elle a été lâchée.

1. A quelle fraction de la hauteur de chute s'élève-elle au 2^{e} rebond ? au 3^{e} ?
2. Si la balle a été lâchée à une hauteur de $1,62\,m$; à quelle hauteur rebondit-elle après le 4^{e} rebond ?

Exercice 13 – numerique/fractions/exob9

Sébastien a dépensé les $\frac{3}{5}$ de son argent de poche pour l'achat d'un CD et les $\frac{2}{3}$ de ce qui lui reste pour l'achat de bandes dessinées.

1. Quelle fraction de la somme de départ représente la somme qu'il reste après ses achats ?
2. Si lui reste 20€, combien avait-il au départ ?
3. Quel est le prix du CD ? Et celui des BD ?

Exercice 14 – numerique/fractions/exob10

Lors d'un héritage, une certaine somme d'argent est partagée entre 3 personnes : Arnaud, Béatrice et Claude.

Arnaud reçoit les $\frac{8}{15}$ de la somme, Béatrice reçoit les $\frac{3}{4}$ de la part d'Arnaud.
Quelle fraction de la somme totale Claude reçoit-il ?

Exercice 15 – numerique/fractions/exob11

1/ Calcule A et écris la réponse sous forme d'une fraction irréductible. **On fera attention de respecter les priorités opératoires.**

$$A = \frac{5}{12} - \frac{5}{3} \div \frac{7}{9}$$

2/ Calcule B et écris la réponse sous la forme d'un entier relatif. **On fera attention de respecter les priorités opératoires.**

$$B = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{5}$$

Exercice 16 – numerique/fractions/exob12

Effectue les calculs suivants et écris le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$A = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \qquad B = \frac{7}{4} \div \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)$$

Exercice 17 – numerique/fractions/exob13

Un viticulteur stocke sa production dans 3 cuves de même contenance. La première est pleine aux $\frac{2}{7}$, la seconde aux $\frac{3}{8}$ et la troisième est vide aux $\frac{9}{14}$. Une seule cuve aurait-elle été suffisante pour stocker la récolte complète ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 18 – numerique/fractions/exoc1

Lors d'un héritage, 3 enfants souhaitent se partager un terrain et construire chacun une maison sur leur partie.

1. Le 1er enfant souhaite obtenir le tiers du terrain, le 2^{e} enfant le cinquième et le 3^{e} la moitié du terrain. Est-ce possible ? Pourquoi ?
2. Après discussion, les deux premiers enfants obtiennent ce qu'ils demandent et le 3^{e} prend ce qui reste, soit $2100\,m^2$.
   (a) Quelle fraction du terrain reste-t-il pour le 3^{e} enfant ?
   Déduis-en la superficie totale du terrain.
   (b) Calcule la superficie des parties des deux autres enfants.

Exercice 19 – numerique/fractions/exoc2

Ce mois-ci, Emilie a dépensé un quart de son argent de poche pour des livres, un tiers pour le cinéma et un autre tiers pour des dépenses diverses.
A-t-elle dépensé tout son argent ? Si non, calcule la fraction de son argent de poche qu'il lui reste.

Exercice 20 – numerique/fractions/exoc3

Le jus obtenu en pressant des cerises représente les $\frac{3}{4}$ de la masse de celles-ci.
On ajoute à ce jus une masse égale de sucre et l'on fait bouillir pour obtenir de la gelée. Le mélange jus et sucre donne les $\frac{4}{5}$ de sa masse en gelée. Un kilogramme de sucre à confiture coûte 1,08**€** et un kilogramme de cerises coûte 2,81**€**.

1. Avec $1\,kg$ de cerises, quelle masse de gelée obtient-on ?
2. Quel est le prix d'un kilogramme de gelée de cerises ?

Exercice 21 – numerique/fractions/exoc4

Calcule et donne le résultat le plus simple possible de

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \qquad B = \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \div \frac{28}{5} \qquad C = \left(\frac{11}{3} + \frac{11}{7}\right) \div \left(\frac{11}{6} + \frac{11}{4}\right)$$

Exercice 22 – numerique/fractions/exoc5

Trois personnes se partagent un terrain rectangulaire. La première achète les deux septièmes du terrain, la seconde les deux tiers du reste ; la troisième personne achète la dernière partie du terrain.

1. Exprime la part de chaque personne comme fraction de l'aire totale.
2. Quelle personne possède le plus de terrain ?
3. Le terrain mesure $630\,m$ sur $490\,m$. Calcule l'aire de chaque part.
4. Représente le partage sur un dessin à l'échelle $1/10\,000$.

Exercice 23 – numerique/fractions/exoc6

Calcule les expressions suivantes. On fera apparaître toutes les étapes de calcul.

$$C = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \qquad D = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) \div \frac{2}{15}$$

$$E = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \div \frac{4}{3} \qquad F = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right)$$

Exercice 24 – numerique/fractions/exoc7

1. Soit $A = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \div \frac{20}{21}$.
   Calcule A en détaillant les étapes de calculs.
2. Un propriétaire terrien a vendu le quart de sa propriété en 2001 et les quatre-cinquièmes du reste en 2002.
   (a) Quelle fraction de la propriété a été vendue en 2002 ?
   (b) Quelle fraction de la propriété reste invendue à l'issue des deux années ?
   (c) Quelle était la superficie de la propriété sachant que la partie invendue au bout des deux années représente six hectares ?

2.4. Récapitulatif

Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire.

Addition de 2 fractions.

Elles ont le même dénominateur.

On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{7}{3}$$
$$A = \frac{1+7}{3}$$
$$A = \frac{8}{3}$$

Elles n'ont pas le même dénominateur.

On écrit les fractions avec le même dénominateur et on additionne ensuite.

$$B = \frac{2}{5} + \frac{4}{7}$$
$$B = \frac{14}{35} + \frac{20}{35}$$
$$B = \frac{14+20}{35}$$
$$B = \frac{34}{35}$$

Soustraction de 2 fractions.

Elles ont le même dénominateur.

On soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur.

$$A = \frac{7}{4} - \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{7-9}{4}$$
$$A = \frac{-2}{4}$$
$$A = -\frac{1}{2}$$

Elles n'ont pas le même dénominateur.

On écrit les fractions avec le même dénominateur et on soustrait ensuite.

$$B = \frac{5}{6} - \frac{7}{4}$$
$$B = \frac{10}{12} - \frac{21}{12}$$
$$B = \frac{10-21}{12}$$
$$B = \frac{-11}{35}$$

Multiplication de 2 fractions.

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$A = \frac{7}{5} \times \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{7 \times 9}{5 \times 4}$$
$$A = \frac{63}{20}$$

Division de 2 fractions.

Lorsque l'on divise par une fraction, cela revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

$$A = \frac{7}{5} \div \frac{9}{4}$$
$$A = \frac{7}{5} \times \frac{4}{9}$$
$$A = \frac{7 \times 4}{5 \times 9}$$
$$A = \frac{28}{45}$$

Chapitre 3

Les Puissances

Sommaire

3.1 Activité **24**

3.1.1 Opérations sur les puissances de 10 24

3.1.2 Effet de la multiplication par une puissance de 10 24

3.1.3 Ecriture scientifique d'un nombre relatif 24

3.1.4 Opérations sur les puissances d'un entier relatif 25

3.2 Cours **26**

3.2.1 Puissances de 10 26

3.2.2 Puissance d'un entier relatif 27

3.3 Exercices **28**

3.1. Activité

3.1.1 Opérations sur les puissances de 10

Multiplication de 2 puissances de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

(a) $10^3 \times 10^2$
(b) $10^2 \times 10^1$
(c) $10^4 \times 10^4$
(d) $10^5 \times 10^3$
(e) $10^{-2} \times 10^5$
(f) $10^4 \times 10^{-1}$
(g) $10^{-1} \times 10^{-2}$
(h) $10^{-3} \times 10^3$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Division de 2 puissances de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

(a) $\dfrac{10^5}{10^2}$
(b) $\dfrac{10^7}{10^9}$
(c) $\dfrac{10^{-2}}{10^2}$
(d) $\dfrac{10^{-7}}{10^{-5}}$
(e) $\dfrac{10^3}{10^4}$
(f) $\dfrac{10^5}{10^7}$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Puisssance d'une puissance de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

(a) $(10^2)^3$
(b) $(10^{-2})^4$
(c) $(10^4)^2$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

3.1.2 Effet de la multiplication par une puissance de 10

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un nombre décimaux.

(a) $3,5 \times 10^4$
(b) $0,15 \times 10^3$
(c) $5815,1 \times 10^2$

2. Que se passe-t-il alors lorsque l'on multiplie par une puissance de 10 d'exposant positif ?
3. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un nombre décimal.

(a) $3,5 \times 10^{-3}$
(b) $0,15 \times 10^{-2}$
(c) $5815,1 \times 10^{-4}$

4. Que se passe-t-il alors lorsque l'on multiplie par une puissance de 10 d'exposant négatif ?

3.1.3 Ecriture scientifique d'un nombre relatif

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un nombre décimal.

(a) $42,9 \times 10^3$
(b) $0,429 \times 10^5$
(c) $4\,290 \times 10$
(d) $4\,290\,000 \times 10^{-2}$
(e) $4,29 \times 10^4$
(f) $429\,000 \times 10^{-1}$

2. Que remarque-t-on ?

3. Parmi toutes ces écritures d'un même nombre décimal, une va être privilégiée : *celle dont le nombre décimal ne possède qu'un chiffre non nul avant la virgule.*
   Quelle est cette écriture ?
   Une telle écriture s'appelle *l'écriture scientifique du nombre décimal 42 900.*
4. Donne l'écriture scientifique des nombres décimaux suivants :

   (a) 153 (b) 57,9 (c) 0,08

3.1.4 Opérations sur les puissances d'un entier relatif

Multiplication de deux puissances

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

   (a) $2^3 \times 2^2$ (c) $12^4 \times 12^4$ (e) $6^2 \times 3^5$ (g) $7^{-1} \times 7^{-2}$
   (b) $5^2 \times 7^1$ (d) $(-2)^5 \times (-2)^3$ (f) $4^4 \times 4^{-1}$ (h) $9^{-3} \times 9^3$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Division de deux puissances

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

   (a) $\dfrac{2^5}{2^2}$ (c) $\dfrac{5^{-2}}{3^2}$ (e) $\dfrac{7^3}{8^2}$
   (b) $\dfrac{3^7}{3^9}$ (d) $\dfrac{4^{-7}}{4^{-5}}$ (f) $\dfrac{12^5}{12^7}$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Puissance d'une puissance

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

   (a) $(5^2)^3$ (b) $((-5)^{-2})^4$ (c) $(7^4)^2$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

Puissance d'un produit

1. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une puissance.

   (a) $2^3 \times 5^3$ (b) $3^{-2} \times 4^{-2}$ (c) $8^2 + 6^2$ (d) $4^5 \times 6^5$

2. Quelle remarque peut-on faire ?

3.2. Cours

3.2.1 Puissances de 10

Définitions

Une puissance de 10 se note sous la forme 10^m où m est un nombre relatif. Dans cette écriture, m est appelé *l'exposant*.

– **L'exposant est un entier positif**
Soit m un entier positif. Alors

$$10^0 = 1 \text{ et } 10^1 = 10$$

$$10^m = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{m \text{ fois le nombre } 10} = 1\,\underbrace{000\ldots0}_{m \text{ zéros}}$$

Exemples

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000 \qquad 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

– **L'exposant est un entier positif**
Soit m un entier positif. Alors

$$10^{-m} = \frac{1}{10^m} = \underbrace{0,00\ldots0}_{m \text{ zéros}}1$$

Exemples

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001 \qquad 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0,000\,01$$

Formules de calculs

(Admis) Soit m et n 2 nombres entiers relatifs.

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n} \qquad \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n} \qquad (10^m)^n = 10^{m \times n}$$

Exemples

$$10^4 \times 10^{-2} = 10^{4+(-2)} = 10^2$$

$$\frac{10^4}{10^{-2}} = 10^{4-(-2)} = 10^{4+2} = 10^6$$

$$\left(10^4\right)^{-2} = 10^{4\times(-2)} = 10^{-8}$$

Ecriture scientifique d'un nombre décimal

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul (différent de 0) avant la virgule et p un entier relatif

<u>Exemples</u>
L'écriture scientifique de 385 est $3,85 \times 10^2$.
L'écriture scientifique de $A = 35\,48 \times 10^4$ est

$$A = 3,548 \times 10^1 \times 10^4$$
$$A = 3,548 \times 10^{1+4}$$
$$A = 3,548 \times 10^5$$

3.2.2 Puissance d'un entier relatif

Soit n un nombre entier positif.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \quad (n \geq 2) \qquad a^1 = a \qquad a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

<u>Exemples</u>

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \ldots \qquad (-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = \ldots$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} \qquad (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4}$$

Utilisation de la calculatrice
Touche $\boxed{\uparrow}$ ou $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{x^y}$.

$$(-5)^3 = \quad \underbrace{(\,5 \pm\,) \uparrow 3 \;=}_{\text{calculatrice}} \quad -125 \qquad 2^5 = \quad \underbrace{2 \uparrow 5 =}_{\text{calculatrice}} \quad 32$$

Opérations sur les puissances

(Admis) Si a est un entier relatif non nul et si m et n sont des entiers relatifs alors

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \times n} \qquad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

<u>Exemples</u>

$$2^4 \times 2^{-3} = 2^{4+(-3)} = 2^1 = 2 \qquad \frac{4^2}{4^6} = 4^{2-6} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4}$$

$$\left(5^3\right)^{-2} = 5^{3\times(-2)} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6} \qquad 7^3 \times 4^3 = (7 \times 4)^3 = 28^3$$

3.3. Exercices

— ⋆ —

Exercice 1 – numerique/puissances/exoa1

1. Calcule l'aire d'un rectangle de longueur $10^4\ cm$ et de largeur $10^{-2}\ cm$.
2. Calcule l'aire d'un triangle de côté de base $0,82 \times 10^3\ dm$ et de hauteur relative à ce côté $2,4 \times 10^4\ dm$.

Exercice 2 – numerique/puissances/exoa2

Ecris sous la forme 10^n avec n un entier relatif :

$$A = 10^3 \times 10^5 \qquad B = \frac{10^7}{10^{-3}} \qquad C = \frac{10^2 \times 10^4}{10^3}$$

$$D = \frac{100 \times 10^3}{10^{-2}} \qquad E = 10 \times \left(10^2\right)^5 \qquad F = (-10)^2 \times (-10)^{-3}$$

Exercice 3 – numerique/puissances/exoa3

Sachant que 1 kilo de viande coûte $16\,000\,000 \times 10^{-6}$**€** et que 10^4 saucisses coûtent $6\,000$**€**, combien vais-je payer pour une commande de $0,87 \times 10^{-3}$ tonnes de viande accompagnées de $70\,000 \times 10^{-4}$ saucisses ?

Exercice 4 – numerique/puissances/exoa4

Ecris les expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance.

$$A = 5^2 \times 5^3 \qquad B = \frac{7^4}{7^2} \qquad C = 8^2 + 6^2$$

$$D = \frac{2^3 \times 2}{2^5} \qquad E = \frac{3^2 \times 27}{81^2} \qquad F = 5^7 \times 2^4 \times 5^{-3}$$

Exercice 5 – numerique/puissances/exoa5

Calcule la valeur de l'expression $C = 4x^2 - 5x + 2,7$ pour $x = 3$.
Calcule la valeur de l'expression $D = 5x^3 + 6x^2 - 10$ pour $x = 10$.

— ⋆⋆ —

Exercice 6 – numerique/puissances/exob1

1. Donne l'écriture décimale de

$$4,05 \times 10^4 \qquad\qquad 10,02 \times 10^{-3}$$

2. Donne l'écriture scientifique de

$$12,45 \qquad\qquad 0,0234$$

3. Ecris sous forme d'une puissance de 10 les expressions suivantes. Ensuite, donne les résultats sous forme décimale et scientifique.

$$A = 2,5 \times 10^2 \times 4 \times 10^5 \qquad B = \frac{21 \times 10^3}{0,7 \times 10^{-7}} \qquad C = 4 \times 10^5 + 6 \times 10^3$$

Exercice 7 – numerique/puissances/exob2

La luminosité du Soleil est de 4×10^{26} Watts, celle d'une centrale électrique est 4 milliards de Watts. Combien faut-il de centrales électriques pour éclairer de la même façon que le Soleil ? On donnera le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

Exercice 8 – numerique/puissances/exob3

La distance moyenne d de la Tere au Soleil est d'environ 149,5 millions de kilomètres.

1. Donne la notation scientifique de d.
2. Le rayon R de la Terre mesure approximativement 6 400 kilomètres.
   Calcule à une unité près par défaut le quotient $\frac{d}{R}$.
3. Sachant que la vitesse de propagation de la lumière est environ égale à 300 000 kilomètres par seconde, calcule en minutes et secondes le temps t mis par la lumière émise par le Soleil pour nous parvenir sur Terre. Ce temps sera donné à une seconde près par excès.

Exercice 9 – numerique/puissances/exob4

Effectue le calcul suivant en faisant apparaître toutes les étapes intermédiaires :

$$G = 7,5 \times 10^3 + 35 \times 10^{-2}$$

Exercice 10 – numerique/puissances/exob5

1. Je parcours $8\,m$ en 1 seconde.
   Combien de temps vais-je mettre pour parcourir $100\,m$?
2. La lumière parcourt $3 \times 10^5\,km$ en 1 seconde ?
   Combien de temps va mettre la lumière pour parcourir la distance Soleil-Terre, c'est-à-dire $1,5 \times 10^8\,km$?

Exercice 11 – numerique/puissances/exob6

1. En détaillant les calculs, donne la notation scientifique puis l'écriture décimale de :

$$C = \frac{4 \times 10^6 \times 3,3 \times 10^{-7}}{6 \times 10^3}$$

2. Le physicien Avogadro a montré qu'il y avait environ $6,03 \times 10^{23}$ molécules d'eau dans $18\,g$ d'eau. Combien y a-t-il de molécules d'eau dans un millionième de gramme d'eau ? Donner ce résultat en notation scientifique.

Exercice 12 – numerique/puissances/exob7

Donne l'écriture décimale et l'écriture scientifique des expressions suivantes

$$E = 5,5 \times 10^7 \times 0,4 \times 10^{-9} \qquad F = \frac{4 \times 10^{12} \times 9 \times 10^{-4}}{1,2 \times 10^3}$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 13 – numerique/puissances/exoc1

Un atome est formé d'un noyau et d'électrons qui gravitent autour du noyau. Représentons par une boule de $8\,cm$ de diamètre le noyau d'un atome qui mesure en réalité $4 \times 10^{-12}\,mm$ de diamètre.

1. Quelle échelle utilise-t-on ? (C'est le nombre par lequel on a multiplié le diamètre du noyau).
2. A quelle distance devrait être placé, sur le dessin, un électron qui tourne en réalité à $5 \times 10^{-8}\,mm$ du noyau ?
3. A cette échelle, un électron est représenté par une minuscule boule de $0,2\,mm$ de diamètre. Quel est le diamètre réel, en mm, d'un électron ?

Exercice 14 – numerique/puissances/exoc2

1. Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$A = 45\,000 \qquad B = 0,000\,073 \qquad C = 47\,000 \times 10^3 \qquad D = 0,052 \times 10^{-4}$$

2. Calcule et donne le résultat en écriture scientifique : $E = 15 \times \left(10^7\right)^2 \times 3 \times 10^{-5}$
3. Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$$F = \frac{10^{-8} \times 0,7 \times 10^{12}}{21 \times 10^3}$$

Exercice 15 – numerique/puissances/exoc3

$\mathcal{C}_1$ est un disque de rayon R. Le rayon de $\mathcal{C}_2$ est le double de celui de $\mathcal{C}_1$; celui de $\mathcal{C}_3$ est le double de celui de $\mathcal{C}_2$, etc...

1. Calculer le périmètre $\mathcal{P}_1$ et l'aire $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{C}_1$ en fonction de R.
   Que valent $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{A}_1$ si $R = 3$?
2. Calculer le périmètre et l'aire de $\mathcal{C}_4$ en fonction de R. Comparer avec les résultats de $\mathcal{C}_1$.

Chapitre 4

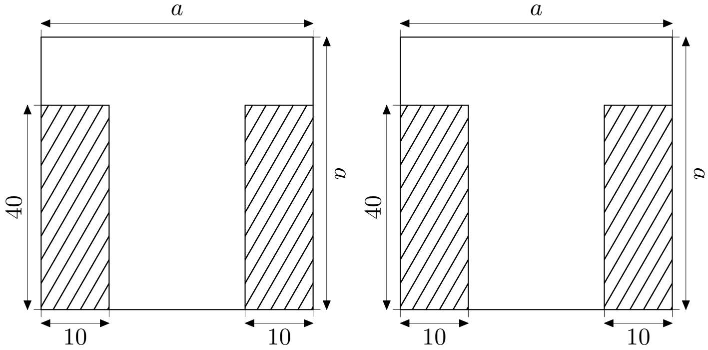
Calcul littéral

Sommaire

4.1 Activités **32**
4.1.1 De l'intérêt du calcul littéral 32
4.1.2 De l'intérêt du développement 32
4.1.3 Des sommes, des différences et des parenthèses 34
4.1.4 La double distributivité 35
4.2 Cours **36**
4.2.1 Simple distributivité 36
4.2.2 Suppression des parenthèses 36
4.2.3 Réduction d'une expression littérale 36
4.2.4 Double distributivité 37
4.3 Exercices **38**

4.1. Activités

4.1.1 De l'intérêt du calcul littéral



Pour fabriquer un T-Shirt, il faut 2 carrés d'étoffe de côté « a ». La longueur « a » dépend bien entendu de la taille du T-Shirt. On enlève dans chaque carré deux rectangles de 40 cm de long et 10 cm de large comme indiqué sur les croquis, afin d'obtenir deux « T » de tissu.

1. Pour un T-Shirt de taille XS, la longueur a vaut 50 cm.

Surface des deux carrés du départ : S_1 = ...
Surface des 4 rectangles supprimés : S_2 = ...
Surface de tissu utile pour un T-Shirt XS : S= ....

2. Pour un T-Shirt de taille S, la longueur a vaut 60 cm.

Surface des deux carrés du départ : S_1 = ...
Surface des 4 rectangles supprimés : S_2 = ...
Surface de tissu utile pour un T-Shirt S : S= ....

3. Pour un T-Shirt de taille M, la longueur a vaut 70 cm.

Surface des deux carrés du départ : S_1 = ...
Surface des 4 rectangles supprimés : S_2 = ...
Surface de tissu utile pour un T-Shirt M : S= ....

4. Pour ne pas avoir à répéter trop souvent les mêmes calculs, on va essayer d'exprimer **en fonction** de « a » l'aire de tissu utile pour confectionner un T-Shirt. On obtiendra alors <u>*une expression littérale*</u>.

Surface des deux carrés du départ : S_1 = ...
Surface des 4 rectangles supprimés : S_2 = ...
Surface de tissu utile pour un T-Shirt : S= ....

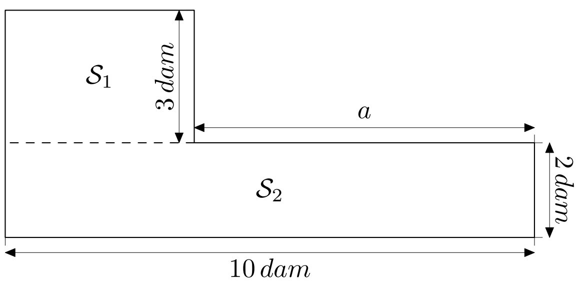
   (a) Complète le tableau :

Si $a = 50$ alors S = ...
Si $a = 60$ alors S = ...
Si $a = 70$ alors S = ...

   (b) Calcule les surfaces utiles pour un T-Shirt...

...taille L ($a = 80$) : S = ...
...taille XL ($a = 90$) : S = ...
...taille XXL ($a = 100$) : S = ...
...taille XXXL ($a = 110$) : S = ...

4.1.2 De l'intérêt du développement



Le croquis, ci-contre, représente une parcelle de terrain dont une longueur « a » est variable. La surface de terrain dépend bien entendu de la longueur « a ». Ce terrain est composée de 2 rectangles.

1. Calcule la surface totale du terrain lorsque $a = 1\,dam$.

Surface : $S_1 =$ ....
Surface : $S_2 =$ ....
Surface totale : $S=$ ....

2. Calcule la surface totale du terrain lorsque $a = 7,5\,dam$.

Surface : $S_1 =$ ....
Surface : $S_2 =$ ....
Surface totale : $S=$ ....

3. Calcule la surface totale du terrain lorsque $a = 3,75\,dam$.

Surface : $S_1 =$ ....
Surface : $S_2 =$ ....
Surface totale : $S=$ ....

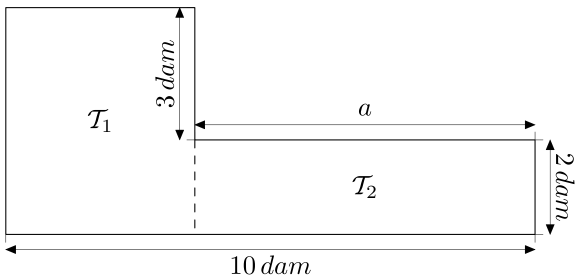
4. Pour ne pas avoir à répéter trop souvent les mêmes calculs, on va essayer d'exprimer **en fonction** de « a » l'aire de ce terrain. On obtiendra alors <u>*une expression littérale*</u>.

Surface $S_1 =$ ....
Surface $S_2 =$ ....
Surface totale $S =$ $S =$ $S =$ $S =$

(a) Complète le tableau :

Si $a = 5\,dam$ alors $S =$ ....
Si $a = 2\,dam$ alors $S =$ ....
Si $a = 8,5\,dam$ alors $S =$ ....

(b) Le fermier s'aperçoit qu'il peut découper son terrain d'une nouvelle façon et se demande si les réponses obtenues avec ce nouveau découpage sont identiques à ceux des calculs précédents.



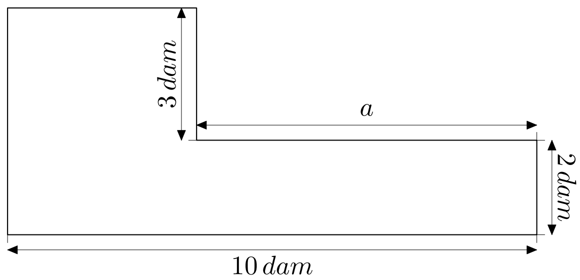
Complète alors le tableau en exprimant les surfaces T_1, T_2 **en fonction** de « a ».

Surface $T_1 =$ ....
Surface $T_2 =$ ....
Surface totale $S =$ $S =$ $S =$ $S =$

(c) Que remarque-t-on ? ....

5. Un professeur de Mathématiques bien connu, passant par là, certifie au fermier qu'il y a un troisième découpage possible. Pouvez-vous aider le fermier à trouver ce découpage et montrer

que ce découpage mène aux mêmes résultats que précédemment ?



$$S =$$
$$S =$$

4.1.3 Des sommes, des différences et des parenthèses

Opposé d'une somme

Soit 2 nombres relatifs a et b et intéressons-nous à leur somme $a+b$ et plus particulièrement à l'opposé de cette somme.

$$-(a+b) = \ldots \times (a+b) = \ldots \times a + \ldots \times b = \ldots a \ldots b$$

Opposé d'une différence

Soit 2 nombres relatifs a et b et intéressons-nous à leur différence $a-b$.
Puisque *soustraire un nombre, c'est*...
alors nous pouvons écrire

$$a - b = a \ldots\ldots\ldots$$

et dans ce cas

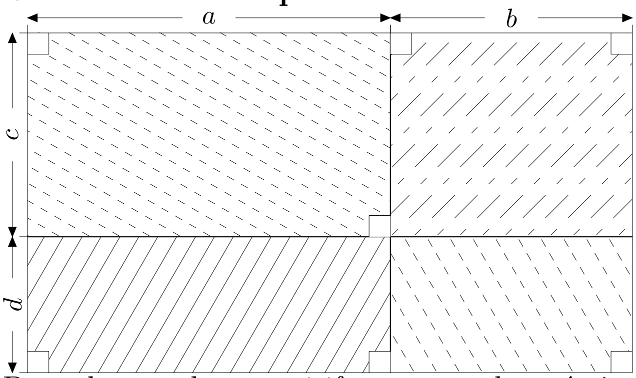
$$-(a-b) = -(a \ldots\ldots\ldots) = -a \ldots\ldots$$

Suppression de parenthèses dans une suite d'additions ou de soustraction

1. Examinons le cas de l'expression
$$A = 3 - (2 + x)$$
Nous sommes dans le cas de l'opposé d'une somme et en appliquant la propriété ci-dessus, on a
$$A = 3 - 2 - x$$
$$A1 - x$$
Fais de même avec les expressions $B = 5 - (3 - x)$ et $C = x - (2x + 3)$.
2. Examinons le cas de l'expression
$$D = 3 + (5 + x)$$
Comment transformer cette expression ? Par exemple en écrivant
$$D = 3 + \ldots \times (5 + x)$$
et en ....
Ce qui donne
$$D = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4.1.4 La double distributivité

Cas des nombres positifs



On considère la figure ci-contre qui représente un rectangle composé de 4 pièces.

1. Quelle est la nature de ces 4 pièces ?
2. Exprime de deux façons différentes l'aire du rectangle $ABCD$.

Pour des nombres *positifs*, on peut donc écrire

$$(a+b)\times(c+d) = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

Cas des nombres relatifs

L'approche géométrique n'étant plus correcte, considérons alors l'expression de départ

$$(a+b)\times(c+d) = \boxed{(a+b)}\times(c+d)$$
$$(a+b)\times(c+d) = \boxed{(a+b)}\times c + \boxed{(a+b)}\times d$$
$$(a+b)\times(c+d) = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

4.2. Cours

Un expression littérale est une expression mathématique qui contient une (ou des) lettre(s). Par exemple, $2x + 3$, $-3y + 5t$,...

4.2.1 Simple distributivité

Soit k, a et b 3 expressions quelconques. Alors

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Exemples Développer $C = 3(x + 1)$ et $D = -4(1 - x)$

$$C = 3(x+1) \qquad (k = 3; a = x; b = 1)$$
$$C = 3 \times x + 3 \times 1 \qquad (k \times a + k \times b)$$
$$C = 3x + 3$$

$$D = -4(1-x) \qquad (k = -4; a = 1; b = -x)$$
$$D = -4 \times 1 + (-4) \times (-x) \qquad (k \times a + k \times b)$$
$$D = -4 + 4x$$

Application : Regroupement de termes

Exemples :

$$A = 2x + 3x \qquad B = 5x - 8x$$
$$A = (2 + 3)x \qquad B = (5 - 8)x$$
$$A = 5x \qquad B = -3x$$

4.2.2 Suppression des parenthèses

Règle 1 Dans une suite d'additions et de soustractions, on peut supprimer les parenthèses précédées du signe + (ainsi que ce +) sans changer l'expression entre parenthèses.

Exemples $a + (b + c) = a + b + c \qquad a + (-b + c) = a - b + c \qquad (a + b) - c = a + b - c$

Règle 2 Dans une suite d'additions et de soustractions, on peut supprimer les parenthèses précédées du signe $-$ (ainsi que ce $-$) à condition de changer **tous** les signes de l'expression entre parenthèses.

Exemples $a - (b + c) = a - b - c \qquad a - (-b + c) = a + b - c$

4.2.3 Réduction d'une expression littérale

> Réduire une expression littérale, c'est l'écrire le plus simplement possible avec le moins de termes possibles.

Exemples

Réduire l'expression $A = 3x^2 + x - (x^2 + 3x - 1)$

$$A = 3x^2 + x - (x^2 + 3x - 1)$$
$$A = 3x^2 + x - x^2 - 3x + 1$$
$$A = 3x^2 - x^2 + x - 3x + 1$$
$$A = 2x^2 - 2x + 1$$

Développer et réduire $B = 3(x + 1) + 2(-x + 2)$

$$B = 3(x + 1) + 2(-x + 2)$$
$$B = 3 \times x + 3 \times 1 + (2 \times (-x) + 2 \times 2)$$
$$B = 3x + 3 + (-2x + 4)$$
$$B = 3x + 3 - 2x + 4$$
$$B = 3x - 2x + 3 + 4$$
$$B = x + 7$$

4.2.4 Double distributivité

Soit a, b, c et d 4 expressions mathématiques. Alors

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

<u>Exemples</u>

$$A = (x + 2) \times (x + 3)$$
$$A = x \times x + x \times 3 + 2 \times x + 2 \times 3$$
$$A = x^2 + 3x + 2x + 6$$
$$A = x^2 + 5x + 6$$

$$B = (2x + 3) \times (x - 5)$$
$$B = 2x \times x + 2x \times (-5) + 3 \times x + 3 \times (-5)$$
$$B = 2x^2 + (-10x) + 3x + (-15)$$
$$B = 2x^2 - 10x + 3x - 15$$
$$B = 2x^2 - 7x - 15$$

$$C = (3x - 1) \times (5 - 2x)$$
$$C = 3x \times 5 + 3x \times (-2x) + (-1) \times 5 + (-1) \times (-2x)$$
$$C = 15x + (-6x^2) + (-5) + 2x$$
$$C = 15x - 6x^2 - 5 + 2x$$
$$C = -6x^2 + 17x - 5$$

4.3. Exercices

Exercice 1 – numerique/calcullitteral/exoa1

Ecris en fonction de x :

1. le double de x augmenté de 1 ;
2. la somme de 3 et du triple de x ;
3. le tiers de x diminué de 5 ;
4. le produit de 5 par la somme de x et de 4 ;
5. la somme de 6 et du produit de 7 par x.

Exercice 2 – numerique/calcullitteral/exoa2

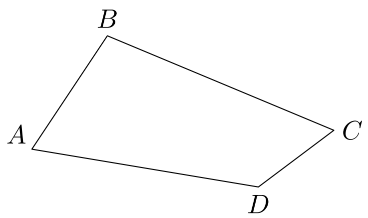
La distance de freinage d'un véhicule jusqu'à l'arrêt total est donnée par la formule

$$D = \frac{4V^2}{1000K}$$

D : distance de freinage en m.
V : vitesse du véhicule en km/h.
K : coefficient d'adhérence de la route.

Calcule la distance de freinage pour qu'un véhicule qui roule à 110 km/h sur une route dont le coefficient d'adhérence est 0,25 puisse s'arrêter totalement.

Exercice 3 – numerique/calcullitteral/exoa3



L'unité est le centimètre. La figure n'est pas en vraie grandeur.

On donne $AB = x$.

Dans le quadrilatère $ABCD$, BC est le double de AB, CD mesure 3 cm de moins que AB et AD mesure 5 cm de plus que AB.

1. Exprime les longueurs BC, CD et AD en fonction de x.
2. Exprime le périmètre $\mathcal{P}$ de $ABCD$ en fonction de x.
   Réduis l'expression obtenue.

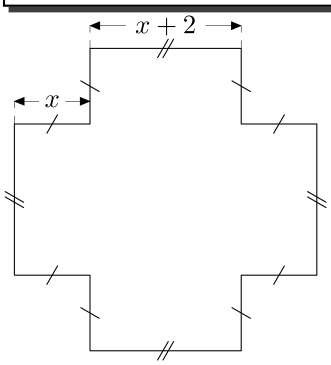
Exercice 4 – numerique/calcullitteral/exoa4

Ecris le plus simplement possible les expressions suivantes.

$A = (x + 5) - (5 - y)$ $\quad B = x - (-5 + y) - 5$ $\quad C = x - (-y + 5) - 5$

$D = (x - 5) - (-y - 5)$ $\quad E = -(5 - x) + 5 - y$ $\quad F = (-5 + y) - (-5 - x)$

Exercice 5 – numerique/calcullitteral/exoa5



1. Ecris le périmètre de la figure ci-contre en fonction de x.
2. Calcule le périmètre de la figure pour toutes les valeurs entières paires de x de 1 à 10.

Exercice 6 – numerique/calcullitteral/exoa6

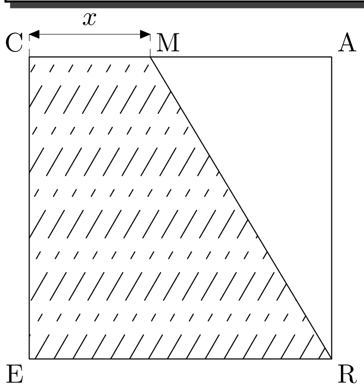
Développe et réduis les expressions suivantes :

$A = 3(x + 5)$ $\quad B = -4(x + 3)$ $\quad C = -2(t - 9)$

$D = 5(2a + 4)$ $\quad E = 7 + 2(3x + 1)$ $\quad F = -3a + 5(2 - a)$

$G = 4(8 + 3x) + 5(8 - x)$ $\quad H = 3(2x + 1) - 2(6x - 1)$

Exercice 7 – numerique/calcullitteral/exoa7



Sur la figure ci-contre, $CARE$ est un carré de côté $8\,cm$. M est un point du segment $[AC]$ tel que $CM = x$ (en cm).

1. Exprime en fonction de x la longueur AM.
2. Exprime en fonction de x l'aire du trapèze $CMRE$.
3. Calcule cette aire pour $x = 2$.

Exercice 8 – numerique/calcullitteral/exoa8

Voici un programme de calcul : *choisir un nombre, le multiplier par 3, retrancher 2, multiplier le tout par 5, ajouter 10.*

1. Applique ce programme de calculs aux nombres 3 ; -1 et $\dfrac{2}{3}$.
2. Quelle remarque peut-on faire ? Cette remarque est-elle toujours vraie ? *On pourra choisir x comme valeur de départ.*

Exercice 9 – numerique/calcullitteral/exoa9

Développe et réduis les expressions suivantes.

$$A = (x+2) \times (x+3) \qquad B = (2x+1)(x+4)$$
$$C = (3x+1)(x-2) \qquad D = (3-x)(x-1)$$
$$E = 2x + 3(5x-2) \qquad F = (2x+3)(3x+2) + 7x^2 - 2x + 3$$

Exercice 10 – numerique/calcullitteral/exoa10

Applique le programme de calcul ci-dessous en prenant 5, puis 9, puis -2, puis x comme nombre de départ. Quelle observation peut-on faire ?

Programme de calcul

- Choisir un entier relatif.
- Calculer le produit de son suivant immédiat par son précédent immédiat.
- Ajouter 1.
- Retrancher le carré du nombre de départ.
- Annoncer le résultat.

⋆⋆

Exercice 11 – numerique/calcullitteral/exob1

1. Réduis les expressions suivantes :

$$O = -6 + x - 3 + 2x \qquad P = -2x - (x+1) \qquad R = 4x + (2x-1) - (2x-4)$$

2. Développe et réduire les expressions suivantes :

$$S = 3(2+4x) \qquad T = 1 - 2(x+4) \qquad U = 2(x-1) + 3(2-2x)$$

3. Donne les valeurs de O, P, R, S, T, U pour la valeur $x = -1$.

Exercice 12 – numerique/calcullitteral/exob2

Deux élèves ont développé et réduit l'expression $A = 5x(2-x) - 3x^2$.

1. Brigitte a répondu $A = 2x^2 + 10x$. Teste cette égalité pour $x = 2$.
   Que peux-tu conseiller à Brigitte ?
2. Alain a répondu $A = 6x - 6x^2$
   (a) Teste cette égalité pour $x = 2$. La réponse d'Alain te semble-t-elle correcte ?
   (b) Teste cette égalité pour $x = 1$. Que conseilles-tu alors à Alain ?
3. Donne le bon développement de l'expression A.

Exercice 13 – numerique/calcullitteral/exob3

1. Développe et réduis les expressions suivantes

$$A = (x+3)\times(x+2) \qquad B = (2x-1)^2$$
$$C = 1 + (x+3)\times(2x+4) \qquad D = x + 4 - (x-1)\times(x+1)$$

2. Calcule la valeur de A pour $x = 1$ et celle de B pour $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 14 – numerique/calcullitteral/exob4

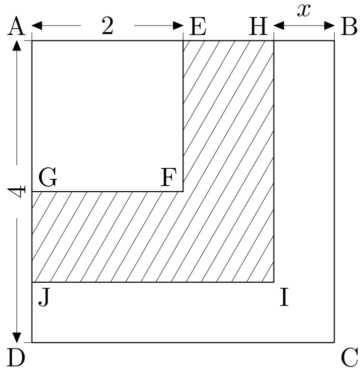
1. Pense à un nombre (par exemple 5). Ajoute 7 à ce nombre. Multiplie le résultat par 3. Retranche 20 au résultat. Retranche le triple du nombre auquel tu as pensé. Divise le résultat par 2.
   Combien trouves-tu ?
2. Démontre que quel que soit le nombre que tu choisis au départ, le résultat trouvé est le même (on pourra appeller x le nombre du départ).

Exercice 15 – numerique/calcullitteral/exob5

Soit un segment $[AB]$ de longueur x (en centimètre). Un rectangle a les dimensions suivantes : sa largeur mesure $3\,cm$ de plus que la longueur $[AB]$ et sa longueur mesure le double de sa largeur.

1. Ecris en fonction de x le périmètre du rectangle.
2. Démontre que le périmètre de ce rectangle est le triple de sa longueur.

Exercice 16 – numerique/calcullitteral/exob6



Dans la figure ci-contre $AEFG$, $AHIJ$ et $ABCD$ sont des carrés.

1. Exprime en fonction de x la longueur AH.
   Déduis-en l'aire de $AHIJ$.
2. Exprime en fonction de x l'aire de la surface hachurée. On développera le résultat.
3. Calcule l'aire de la surface hachurée pour $x = 2$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

Exercice 17 – numerique/calcullitteral/exob7

1. Simplifie les expressions suivantes :

$$A = (5x+2) - (6x+4) \qquad B = (-3x-4) - (-8x+3)$$
$$C = -(5+3x) + (-x+4) \qquad D = (-5x+3) + (4x-5)$$

2. Développe et réduis les expressions suivantes :

$$E = 2(3c-5) - 6(4c+3) \qquad F = 5(-4c+2) + 2(3c-4)$$

Exercice 18 – numerique/calcullitteral/exob8

Dans un porte-monnaie, il y a 23 pièces. Il n'y a que des pièces de 10 francs et des pièces de 5 francs. On appelle x le nombre de pièces de 10 francs.

1. Exprime, fonction de x le nombre de pièces de 5 francs.
2. Montre et explique pourquoi la somme d'argent S_1 que représentent les pièces de 10 francs est $S_1 = 10 \times x$.
3. Exprime, en fonction de x, la somme S_2 que représentent les pièces de 5 francs.
4. Exprime, en fonction de x, la somme d'argent S qu'il y a dans le porte-monnaie.
   Développe et réduis l'expression de S.
5. Si $x = 11$, que vaut S ?

Exercice 19 – numerique/calcullitteral/exob9

Voici un message codé

Δ	$\forall$	$\exists$	&	$\star$	Ω	Φ	Ψ	$\otimes$	$\emptyset$	Σ	@	θ	$\square$

A chaque expression de la colonne de gauche, associe l'expresion de la colonne de droite qui lui est égale. Utilise alors les lettres trouvées pour décoder le message.

Δ	$6x - 7 + 9x + 4$	$14x - 2$ (D)
$\forall$	$-5x - 3 + 2x - 5$	$17x - 23$ (X)
$\exists$	$4x^2 - 3x + 7 + 6x + 5x^2 + 2$	$10x - 2$ (L)
&	$2(3x + 5) + 4(2x - 3)$	$10x^2 + 14x - 12$ (R)
$\star$	$-3(4x - 2) - 2(3x - 4)$	$-5x^2 + 3x - 6$ (E)
Ω	$2x(5x + 3) - (8x^2 + 2)$	$15x - 3$ (F)
Φ	$2(5x - 3) + 4$	$-8x^2 + 24x - 8$ (I)
Ψ	$3(7x - 5) - (2x + 4) \times 2$	$9x^2 + 3x + 9$ (N)
$\otimes$	$4x^2 - 2 - (9x^2 - 3x + 4)$	$-2x + 10$ (C)
$\emptyset$	$(5x - 3)(2x + 4)$	$2x^2 + 6x - 2$ (E)
Σ	$4x - 2(3x - 5)$	$-3x - 8$ (I)
@	$(3x - 2)(-6x + 4) + 10x^2$	$-10x^2 + 16x + 10$ (E)
θ	$(4 - 5x)(2x - 8) + 2x^2 - 3$	$-18x + 14$ (E)
$\square$	$5x + (3 - 2x)(2 + 5x) + 4$	$-8x^2 + 48x - 35$ (C)

Exercice 20 – numerique/calcullitteral/exob10

L'abonnement dans une bibliothèque est de 20€ par an. Il faut payer en plus 0,35€ par livre emprunté.

1/ Si le nombre de livres empruntés est 10, quelle sera la dépense ?

2/ Soit x le nombre de livres empruntés par Stéphanie en 2002.

(a) Exprime, en fonction de x, le prix payé par Stéphanie en 2002.

(b) Elle constate, à la fin de l'année 2002, qu'elle a dépensé 34€ pour la bibliothèque. Combien a-t-elle lu de livres de la bibliothèque ?

Exercice 21 – numerique/calcullitteral/exob11

Stéphanie, Pierre et Loïc ont de l'argent dans les poches. Stéphanie a 3€ de plus que Pierre. Loïc a 2 fois plus d'argent que Stéphanie.
Stéphanie et Loïc mettent leur argent en commun et constatent qu'ils ont 6 fois plus d'argent que Pierre.

1/ Soit x la somme d'argent de Pierre. Que représente chacune des expressions suivantes :

$$A = 2(x + 3) \qquad B = x + 3 \qquad C = x + 3 + 2(x + 3)$$

2/ Trouve la somme d'argent de Pierre. Déduis-en alors les sommes d'argent de Stéphanie et Loïc.

Exercice 22 – numerique/calcullitteral/exob12

1. Réduis les expressions suivantes :

$$A = (8 + x) - (3 - x) \qquad B = a - 5 - (3 + a) + (a + 4)$$
$$C = (3x^2 - 6) - (1 + x^2) \qquad D = 2x^2 + x + (3x - x^2)$$

2. Développe et réduis les expressions suivantes :

$$E = 3(x + 1) + 4x + 1 \qquad F = x + 3(x + 4)$$
$$G = x - 5(x + 5) \qquad H = 1 + 3(2 - x)$$

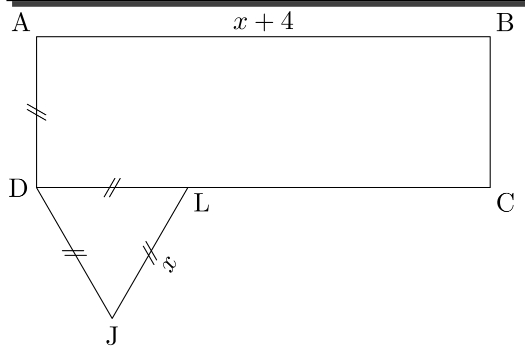
Exercice 23 – numerique/calcullitteral/exob13

1. Développe et réduis les expressions suivantes

$$A = 8 + 4(x - 3) \qquad B = 1 - 3(x + 2)$$
$$C = \frac{1}{2}(x - 8) + 5 \qquad D = 2(2 - 4x) + 4(1 - x)$$
$$E = 3(x + 3) - 2(3x - 1) \qquad F = -4(x + 1) + x(2 - x)$$

2. Calcule chacune des expressions pour $x = 3$, en utilisant l'écriture qui parait la plus simple.

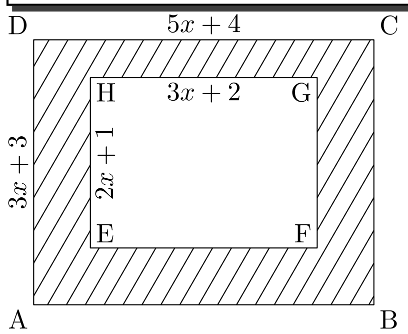
Exercice 24 – numerique/calcullitteral/exob14



La figure ci-contre comporte un triangle équilatéral et un rectangle.

1. Exprime le périmètre de cette figure en fonction de x.
2. Si $x = 3$, quel est le périmètre de cette figure ?

Exercice 25 – numerique/calcullitteral/exob15



Sur la figure ci-contre, toutes les dimensions sont exprimées en centimètre et les quadrilatères $ABCD$ et $EFGH$ sont des rectangles.

1/ Si $x = 2$, quelle est l'aire de la partie hachurée ?

2/ Exprime l'aire de la partie hachurée en fonction de x. Développe et réduis l'expression trouvée.

3/ Utilise la formule de la question 2 pour calculer l'aire de la partie hachurée pour $x = 2$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 26 – numerique/calcullitteral/exoc1

Développe et réduis les expressions suivantes

$$G = (x + 3)(x + 4) \qquad H = (2x - 1)(3x + 5) \qquad I = (x + 1)^2 - (2x + 4)$$

Exercice 27 – numerique/calcullitteral/exoc2

Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 6\,cm$, $BC = 10\,cm$.

1. Soit M un point du segment $[BC]$ tel que $BM = x$.
   On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du triangle AMD.

(a) Exprime, en fonction de x, l'aire du triangle rectangle AMB.

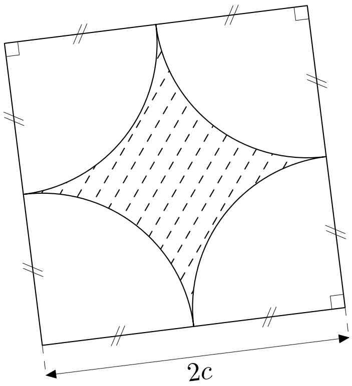
(b) Exprime, en fonction de x, l'aire du triangle rectangle DMC.

(c) Déduis-en l'expression de $\mathcal{A}$ en fonction de x. Que remarque-t-on ?

2. On considère maintenant le rectangle $ABCD$ et les points E et F respectivement sur les segments $[AB]$ et $[DC]$ tel que $AE = DF = x$. Soit I le milieu du segment $[AD]$ (on fera une nouvelle figure). Montre que l'aire $\mathcal{B}$ du pentagone $BEIFC$, exprimée en cm^2 est

$$\mathcal{B} = 60 - 5x$$

Exercice 28 – numerique/calcullitteral/exoc3



1. Exprime le périmètre de la figure hachurée en fonction de la variable c.
2. Quelle est la valeur de ce périmètre lorsque $c = 3\,cm$?
3. Exprime l'aire de la figure hachurée en fonction de la variable c.
4. Quelle est la valeur de cette aire si le côté du carré est de $8\,cm$?

Exercice 29 – numerique/calcullitteral/exoc4

1. (a) Développe et réduis les expressions suivantes :

$$A = (x+2)(2x+5) \qquad B = (3x-4)(2x-3)$$
$$C = (2x-1)(3x+4) + (2x+1)(3x-4) \qquad D = (x+1)^2 - (2x+3)^2$$

(b) Calcule la valeur de C et D pour $x = 1$ puis pour $x = -1$.

2. (a) Développe et réduis l'expression suivante $E = (x+2)(x-1) - x^2$.

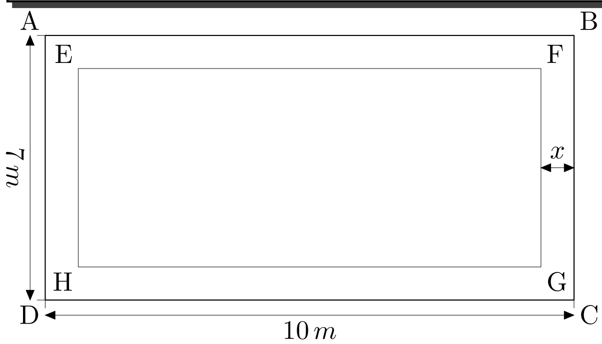
(b) Explique comment, sans calculatrice, obtenir le produit $20\,002 \times 19\,999 - 20\,000^2$?

Exercice 30 – numerique/calcullitteral/exoc5

Un groupe d'amis collectionne des cartes de téléphone. Stéphane en a x. Calire en a deux fois plus que Stéphane. Jérôme en a 5 de moins que Stéphane. Céline en a deux de plus que Stéphane. Cyril en a trois fois plus que Jérôme. Amélie en a deux fois plus que Céline.

1. Ecris, en fonction de x, le nombre total de cartes possédées par le groupe d'amis.
2. Si Stéphane a 10 cartes, quel est le nombre de cartes possédées par le groupe d'amis.

Exercice 31 – numerique/calcullitteral/exoc6



La figure ci-contre représente une piscine rectangulaire $ABCD$ de 10 mètres sur 7 mètres. Cette piscine a une bordure de largeur x (en mètre).

1. Exprime en fonction de x l'aire du bassin $EFGH$ en fonction de x.
2. Si la bordure a une largeur de $0,75\,m$, quelle est l'aire du bassin ?

Chapitre 5

Equations du 1^{er} degré à 1 inconnue

Sommaire

5.1 Activités **45**
5.1.1 Egalité et opérations (addition, soustraction) 45
5.1.2 Ecrire des égalités 45
5.1.3 Problème et équation 45
5.2 Cours **47**
5.2.1 Egalités et opérations 47
5.2.2 Equation du 1^{er} degré à 1 inconnue 47
5.2.3 Mise en équation d'un problème 48
5.3 Exercices **50**

5.1. Activités

5.1.1 Egalité et opérations (addition, soustraction)

1. A la 29^{e} journée de Ligue 1 de Football, Lyon possédait 70 points et le PSG en avait 68.
   (a)
   (b) Que peut-on dire de leur nombre de points ?
   (c) Dans ce cas, combien de points les séparaient ?
2. Durant la 30^{e} journée de Ligue 1 de Football, Lyon a marqué 1 point et le PSG 3 points.
   (a) Combien de points séparent les 2 équipes au classement général ?
   (b) Que peut-on dire de leur nombre de points ?

   <u>Si</u> la différence de deux nombres est .... <u>alors</u> ces deux nombres sont ....
3. Soit deux expressions mathématiques a et b égales. Ce que nous écrirons

   $$a = b \text{ ou } a - b = 0$$

   Soit c une expression mathématique quelleconque.
   (a) Que peut-on dire de $a + c$ et b ? Sont-ils égaux ou différents ?

   $$(a + c) - b = a + c - b = \ldots\ldots\ldots = \ldots$$

   Donc $a + c$ et b sont ....
   (b) Que peut-on dire de $a + c$ et $b + c$? Sont-ils égaux ou différents ?

   $$(a + c) - (b + c) = a + c - \ldots\ldots\ldots\ldots = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots$$

   Donc $a + c$ et $b + c$ sont ....

5.1.2 Ecrire des égalités

Traduis chacune des phrases suivantes par une égalité. (On ne demande pas de trouver la valeur manquante.)

1. Un triangle équilatéral mesure $x\,cm$ de côtés. Son périmètre est $18\,cm$.
2. Un triangle ABC rectangle en A est tel que $AB = x\,cm$ et $AC = 6\,cm$. Son aire est $18\,cm^2$.
3. Un rectangle a une largeur qui mesure $l\,cm$ et une longueur qui mesure $2\,cm$ de plus que sa largeur. Son périmètre est $25\,cm$.
4. J'ai acheté 3 livres et 4 cahiers pour un montant de 15€. Le prix d'un cahier est moins cher de 2€ que le prix d'un livre.
5. J'ai x ans. Dans 3 ans, j'aurais le double de l'âge que j'ai maintenant.
6. J'ai 40 pièces au total. x pièces valent 1€, les autres valent 2€. Je possède 65€.

5.1.3 Problème et équation

1. Deux amis, Pierre et Jacques ont fait des achats dans la même librairie :
   – Pierre a acheté 3 cahiers et 4 crayons pour 15€,
   – Jacques a acheté 2 cahiers et 6 crayons pour 15€ également.

Ils sont tous les deux d'accord sur le prix d'un crayon (1,5€) mais leur avis sont différents pour le prix d'un cahier : Pierre pense qu'un cahier coûte 2,5€ tandis que Jacques assure que ce prix est de 3,25€.
Qui a raison ?
Que doit-on faire ?

2. Quelques jours plus tard, Pierre revient à la même librairie acheter 5 livres et 16 crayons. Le libraire, mathématicien à ses heures perdues, dit à Pierre : « *Tiens ! Le prix total de tes articles est le même que celui de ton copain Jacques qui est venu tout à l'heure : il a acheté 9 livres et 2 crayons.*
Si tu me dis combien tu dois payer alors je t'offre les stylos ! »
Hélas, Pierre ne se souvient plus du prix des livres. Aidons-le !
   (a) Est-ce possible que le prix d'un livre soit 8€ ? 9€ ? 10€ ? 11€ ? 12€ ?
   (b) Comment faire pour aider efficacement Pierre ?

5.2. Cours

5.2.1 Egalités et opérations

Lorsque deux quantités sont égales, cela se traduit mathématiquement par *une égalité.*

$$\underbrace{\text{expression A}}_{1^{\text{er}}\text{ membre}} = \underbrace{\text{expression B}}_{2^{\text{e}}\text{ membre}}$$

On ne change pas une égalité si on ajoute (ou on soustrait) le même nombre aux deux membres de l'égalité.

<u>Si</u> $a = b$ <u>alors</u> $a + c = b + c$.
<u>Si</u> $a = b$ <u>alors</u> $a - d = b - d$.

<u>Exemple</u> :

$$-1\text{ cahier}\quad \begin{array}{rcl} 2\text{ cahiers} + 2\text{ livres} &=& 1\text{ cahier} + 15€ \\ 1\text{ cahier} + 2\text{ livres} &=& 15€ \end{array}\quad -1\text{ cahier}$$

On ne change pas une égalité si on multiplie (ou on divise) par le même nombre <u>**non nul**</u> les deux membres de l'égalité.

<u>Si</u> $a = b$ et $c \neq 0$ <u>alors</u> $a \times c = b \times c$.
<u>Si</u> $a = b$ et $d \neq 0$ <u>alors</u> $a \div d = b \div d$.

<u>Exemple</u> :

$$\div 2\quad \begin{array}{rcl} 2\text{ cahiers} + 2\text{ livres} &=& 30€ \\ 1\text{ cahier} + 1\text{ livre} &=& 15€ \end{array}\quad \div 2$$

5.2.2 Equation du 1$^{\text{er}}$ degré à 1 inconnue

Une équation est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, le plus souvent représenté par une lettre.

<u>Exemple</u> : $2x = 3$, $-2 + 3x = 7 + 4x$ sont des équations.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu qui vérifient l'égalité. Chacune de ces valeurs est appelée une solution de l'équation.

<u>Exemple</u> Soit l'équation $2x + 5 = 3x + 2$.
Si $x = 1$ alors

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5 = 2 \times 1 + 5 = 2 + 5 = 7 \\ 3x + 2 = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5 \end{array}\right\} 7 \neq 5$$

Pour $x = 1$, $2x + 5 \neq 3x + 2$ donc 1 n'est pas solution de l'équation $2x + 5 = 3x + 2$.
Si $x = 3$ alors

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5 = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11 \\ 3x + 2 = 3 \times 3 + 2 = 9 + 2 = 11 \end{array}\right\} 7 = 5$$

Pour $x = 3$, $2x + 5 = 3x + 2$ donc 3 est solution de l'équation $2x + 5 = 3x + 2$.

Equations de référence

Pour ces éqations, a, b, c et d sont des nombres et l'inconnue est notée x.

$\boxed{\text{Cas n°1}}$

$$a \times x = b \quad (a \neq 0)$$

$$\begin{aligned} 3x &= 7 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{7}{3} \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -5x &= 8 \\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{8}{-5} \\ x &= -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Cas n°2}}$

$$a \times x + b = c \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

$$\begin{aligned} -2x - 5 &= 9 \\ -2x \underbrace{-5+\mathbf{5}} &= 9+\mathbf{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x &= 14 \qquad \text{Cas n°1} \\ \frac{-2x}{-2} &= \frac{1}{4}{-2} \\ x &= -7 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Cas n°3}}$

$$a \times x + b = c \times x + d \quad (a \neq 0, c \neq 0)$$

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 7x - 9 \\ 3x - \mathbf{7}x + 5 &= \underbrace{7x - \mathbf{7}x} - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x + 5 &= -9 \qquad \text{Cas n°2} \\ -4x \underbrace{+5-\mathbf{5}} &= 9-\mathbf{5} \\ -4x &= 4 \\ \frac{-4x}{-4} &= \frac{4}{-4} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

5.2.3 Mise en équation d'un problème

> Mettre en équation un problème, c'est traduire mathématiquement par une équation ce qui est dit en français.

Exemple *Un père de 45 ans a 3 enfants âgés de 6, 9 et 12 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?*

Choix de l'inconnue Soit x le nomnbre d'années cherché.

Mise en équation du problème Dans x années,

- L'âge du père sera $45 + x$;
- Les âges des enfants seront $6 + x$, $9 + x$ et $12 + x$.

On obtient donc l'équation suivante :

$$\underbrace{45 + x}_{\text{âge du père}} = \underbrace{6 + x + 9 + x + 12 + x}_{\text{Somme des âges des enfants}}$$

Résolution de l'équation

$$\begin{aligned}
45 + x &= 6 + x + 9 + x + 12 + x \\
45 + x &= 27 + 3x \\
45 \underbrace{+x-x} &= 27 + 3x-x \\
45 &= 27 + 2x \\
45-\mathbf{27} &= \underbrace{27-\mathbf{27}}+2x \\
18 &= 2x \\
\frac{18}{2} &= \frac{2x}{2} \\
9 &= x
\end{aligned}$$

Conclusion Dans 9 ans, l'âge du père (45+9=54) sera égal à la somme des âges de ces enfants (6+9+9+9+12+9=15+18+21=54).

5.3. Exercices

★

Exercice 1 – numerique/equations/exoa1

Résous les équations suivantes

$$\begin{array}{rcc} -4+x=5 & 2x+1=7 & -2x+3=x \\ -3x=9 & -3+4x=8 & -3x+17=4x-11 \end{array}$$

Exercice 2 – numerique/equations/exoa2

Résous les équations suivantes :

$$-3x+2=8 \qquad 2x+4=7x-11$$

Exercice 3 – numerique/equations/exoa3

Résoudre les équations suivantes :

1/ $7x=5$ **2/** $2x+7=3$ **3/** $3x-2=6x+8$

★★

Exercice 4 – numerique/equations/exob1

Dans une assemblée, les $\frac{3}{4}$ des participants sont des femmes, les $\frac{2}{3}$ des hommes portent des lunettes et l'on compte 10 hommes qui ne portent pas de lunettes.
Combien y-a-t-il de participants au total ?

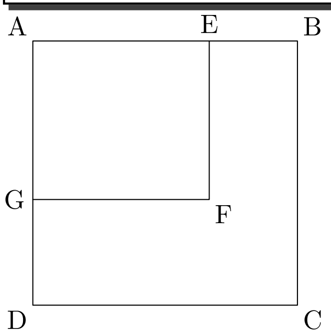
Exercice 5 – numerique/equations/exob2

On a chargé dans un camion trois types de caisses : des rouges qui pèsent chacune $60\,kg$, des bleues qui pèsent chacune $50\,kg$ et des vertes qui pèsent chacune $40\,kg$. Il y a trois fois plus de caisses bleues que de rouges et deux fois plus de caisses vertes que de bleues.
Le chargement de ce camion a une masse de $900\,kg$. Détaille son chargement.

Exercice 6 – numerique/equations/exob3

Sur un parking, on peut observer 50 véhicules en stationnement. Ces véhicules sont tous des motos ou des automobiles.
Si le nombre total de roues est 180, quel est le nombre d'automobiles sur ce parking ?

Exercice 7 – numerique/equations/exob4



L'unité de longueur est le mètre.
Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de 60 de côté ; AE mesure 40 et on pose $DG=x$.

1. Exprime en fonction de x l'aire du rectangle $AEFG$.
2. Trouve la valeur de x pour que l'aire du carré $ABCD$ soit le quadruple de celle du rectangle $AEFG$.

Exercice 8 – numerique/equations/exob5

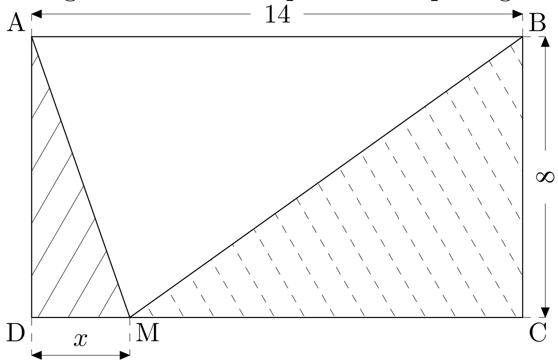
1/ Résoudre l'équation suivante

$$5x+3\times(40-x)=180$$

2/ Simon a 40 livres, les uns ont une épaisseur de $5\,cm$, les autres une épaisseur de $3\,cm$. S'ils les range sur un même rayon, ils occupent une longueur égale à $1,80\,m$.
Quel est le nombre de livres de $5\,cm$? Quel est le nombre de livres de $3\,cm$?
On appelera x le nombre de livres de $5\,cm$ d'épaisseur.

Exercice 9 – numerique/equations/exob6

Un agriculteur veut partager son terrain en trois parcelles : une pour lui et une pour chacun de ses 2 fils. La figure ci-dessous représente le partage envisagé par l'agriculteur.



On dispose des informations suivantes :
- $ABCD$ est un rectangle ;
- M appartient au segment $[CD]$;
- $DM = x$;
- les surfaces hachurées sont les surfaces destinées aux fils.

Aide l'agriculteur à choisir x pour que les deux fils aient la même superficie de terrain.

— ⋆⋆⋆ —

Exercice 10 – numerique/equations/exoc1

Soit n et $n+1$ deux nombres entiers consécutifs. Si on ajoute 5 à chacun de ces deux nombres, leur produit augmente de 160.
Quels sont ces deux nombres ?

Exercice 11 – numerique/equations/exoc2

Détermine, si possible, trois nombres entiers consécutifs tels que le produit du premier et du troisième soit égal au carré de deuxième.

Exercice 12 – numerique/equations/exoc3

« Aujourd'hui, tu es deux fois plus âgé que moi, dit un fils à son père. Et dans 10 ans, poursuit-il, la somme de nos âges égalera le double de ton âge actuel. » Quel est l'âge actuel du fils ?

Exercice 13 – numerique/equations/exoc4

Jean a obtenu 18; 09; 12 en Devoir Maison (coefficient 1) et 08 en Devoir Surveillé (coefficient 3). Combien doit-il obtenir au prochain Devoir Surveillé pour avoir 10 de moyenne ? De quel pourcentage a-t-il réduit ou augmenté sa note de Devoir Surveillé ?

Chapitre 6

Ordre

Sommaire

6.1 Activité **53**
6.1.1 Ordre et opérations 53
6.2 Cours **54**
6.2.1 Vocabulaire 54
6.2.2 Ordre et addition 54
6.2.3 Ordre et multiplication 54
6.3 Exercices **55**

6.1. Activité

6.1.1 Ordre et opérations

Au mois de Janvier, Claire et Alain ont respectivement 54€ et 42 € d'économies.
Ecrivons $A = 54$ francs et $C = 42$ francs. Alain a plus d'argent que Claire ; ce que l'on note $A > C$.

1. Si $A > C$, que peut-on dire du signe de $A - C$?
2. (a) Claire et Alain recoivent chacun 25€. Ecris leur nouvelles économies en fonction de A et C puis écris les inégalités correspondantes.

   (b) Claire et Alain dépensent chacun 25€. Ecris leur nouvelles économies en fonction de A et C puis écris les inégalités correspondantes.

   (c) Claire et Alain recoivent chacun B€. Alain a donc $(A + B)$€ et Claire $(C + B)$€. Qui a le plus d'argent ? Comparons les deux sommes.

$$(A + B) - (C + B) = A + \dots\dots - \dots\dots\dots\dots = A - \dots > \dots$$

   (d) Complète alors la propriété suivante

> *Dans une inégalité, on peut* ....
> *ou* .... *un même nombre*
> *aux deux membres de l'inégalité* ....
> .... *le sens de l'inégalité.*
>
> $\underline{\text{Si}}$ $A > C$ $\underline{\text{alors}}$ $\begin{cases} A + B \dots C + B \\ A - D \dots C - D \end{cases}$

   (e) Complète

$\underline{\text{Si}} \quad x > 4 \quad \underline{\text{alors}} \quad x - 3 > \dots$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x - 3 > \dots$

$\underline{\text{Si}} \quad x - 4 < 7 \quad \underline{\text{alors}} \quad x - 4 + 4 \dots 7 + 4$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \dots 11$

   (a) Claire et Alain doublent chacun leurs économies. Ecris leur nouvelles économies en fonction de A et C puis écris les inégalités correspondantes.

   (b) Claire et Alain dépensent chacun les $\frac{2}{3}$ de leurs économies. Ecris leur nouvelles économies en fonction de A et C puis écris les inégalités correspondantes.

   (c) Claire et Alain multiplient leur économie par un nombre positif k. Claire a alors $k \times C$€ et Alain a $k \times A$. Qui a le plus d'argent ? Comparons les deux produits.

$$k \times A - k \times C = \underbrace{k}_{\dots 0} \times \underbrace{\dots\dots\dots\dots}_{\dots 0} \dots 0$$

   Donc Alain a ...... d'argent que Claire.

> *Dans une inégalité, on peut* ....
> *par un même nombre* POSITIF *les deux membres de l'inégalité* ....
> .... *le sens de l'inégalité.*
>
> $\underline{\text{Si}}$ $A > C$ et $B \dots 0$ $\underline{\text{alors}}$ $A \times B \dots C \times B$

   (d) Complète

$\underline{\text{Si}} \quad x > -5 \quad \underline{\text{alors}} \quad 2 \times x \dots 2 \times (-5)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \times x \cdots -10$

$\underline{\text{Si}} \quad 4 \times x < 14 \quad \underline{\text{alors}} \quad x \dots \frac{14}{4}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \dots 3,5$

6.2. Cours

6.2.1 Vocabulaire

Comparer deux nombres, c'est dire si l'un est plus grand ou plus petit que l'autre ou si les deux nombres sont égaux.

Pour cela, on utilise les signes $>$, $<$, $\leqslant$ (plus petit ou égal) et $\geqslant$ (plus grand ou égal).

Lorsque deux quantités sont inégales, cela se traduit mathématiquement par *une inégalité*.

$$\underbrace{\text{expression A}}_{1^{\text{er}}\text{ membre}} < \underbrace{\text{expression B}}_{2^{\text{e}}\text{ membre}}$$

Soit deux nombres relatifs a et b. Dire que :
- $a > b$ signifie que $a - b > 0$;
- $a < b$ signifie que $a - b < 0$.

6.2.2 Ordre et addition

Si on ajoute (ou on soustrait) le même nombre aux 2 membres de l'inégalité alors on garde le sens de l'inégalité.

Si $a < b$ alors $a + c < b + c$ Si $a \geqslant b$ alors $a - d \geqslant b - d$

Exemple :

$$\begin{array}{c} 2 \text{ cahiers } + 2 \text{ livres } \leqslant 1 \text{ cahier } + 15€ \\ \downarrow -1\text{ cahier} \qquad\qquad \downarrow -1\text{ cahier} \\ 1 \text{ cahier } + 2 \text{ livres } \leqslant 15€ \end{array}$$

6.2.3 Ordre et multiplication

Si on multiplie (ou on divise) par un nombre **strictement positif** les 2 membres de l'inégalité alors on garde le sens de l'inégalité.

Si $a < b$ et $c > 0$ alors $a \times c < b \times c$

Exemples :

$$\begin{array}{c} \pi < 4 \\ \downarrow \times 2 \qquad \downarrow \times 2 \\ 2 \times \pi < 2 \times 4 \\ 2\pi < 8 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \pi > 3 \\ \\ 2 \times \pi > 2 \times 3 \\ 2\pi > 6 \end{array}$$

Attention à ne pas multiplier par un nombre négatif. $3 > 2$ mais $-4 \times 3 = 12$, $-4 \times 2 = -8$ et $-12 \not> -8$.

6.3. Exercices

★

Exercice 1 – numerique/ordre/exoa1

On sait que $m < p$. Compléte, si possible, par $<$ ou $>$.

1/ $m + 5 \ldots p + 5$

2/ $m + 12 \ldots p + 12$

3/ $m - 12 \ldots p - 10$

4/ $p - 7 \ldots m - 7$

5/ $m + 15 \ldots p + 17$

6/ $m + 6 \ldots p + 5$

Exercice 2 – numerique/ordre/exoa2

On sait que $s > t$. Complète par $<$ ou $>$.

1/ $4s \ldots 4t$

2/ $0,5t \ldots 0,5s$

3/ $\frac{s}{3} \ldots \frac{t}{3}$

4/ $3t \ldots 3s$

Exercice 3 – numerique/ordre/exoa3

On sait que $x < y$. Complète par $<$ ou $>$.

1/ $3x \ldots 3y$

2/ $x - 5 \ldots y - 5$

3/ $3x + 7 \ldots 3x + 7$

4/ $4x + 15 \ldots 4y + 15$

5/ $2x + 10 \ldots 2y + 12$

Exercice 4 – numerique/ordre/exoa4

Recopie et complète :

– Si $x - 4 < 5$ alors $x < \ldots$

– Si $x + 4 < 5$ alors $x < \ldots$

– Si $x - 4 < -5$ alors $x < \ldots$

– Si $x + 4 < -5$ alors $x < \ldots$

Exercice 5 – numerique/ordre/exoa5

Un nombre vérifie $0,74 < x < 0,75$.
Trouve un encadrement pour chacun des nombres suivants.

1/ $x + 1$

2/ $x - 1$

3/ $3x$

4/ $3x + 4$

5/ $2x - 3$

★★

Exercice 6 – numerique/ordre/exob1

On veut poser de la moquette sur un sol rectangulaire. On mesure la longueur L et la largeur l (en m) :

$$L = 4,21 \text{ et } l = 3,75$$

Cependant, on a pu se tromper de $2\,cm$ en plus ou en moins sur la longueur.
Trouve un encadrement de l'aire de la pièce.

Exercice 7 – numerique/ordre/exob2

La mesure du rayon d'un disque est de $3,5\,cm$. Sachant que $3,14 < \pi < 3,15$, trouve un encadrement au centième du périmètre et de l'aire de ce cercle.

★★★

<u>Exercice 8</u> – numerique/ordre/exoc1

Fabrice et Claire se demandent quelle est la longueur L de leur salle de classe, mais pour la mesurer ils ne disposent que de leurs pieds comme « instrument ».
Fabrice, dont le pied mesure $26\,cm$, a réussi à le reporter 29 fois, mais pas 30.
Claire, dont le pied mesure $24\,cm$, a réussi à le reporter 31 fois, mais pas 32.
Quel encadrement de L ont-ils trouvé ?

<u>Exercice 9</u> – numerique/ordre/exoc2

On donne $1,1 < x < 1,2$ et $3,5 < y < 3,6$.
Trouve un encadrement de $x + y$ et xy.

Deuxième partie

Géométrique

Chapitre 7

Triangle rectangle et cercle

Sommaire

7.1 Activités . . . **59**

7.1.1 Cercle circonscrit à un triangle rectangle . . . 59

7.1.2 Comment obtenir un triangle rectangle à partir d'un cercle ? . . . 59

7.2 Cours . . . **61**

7.2.1 Rappels . . . 61

7.2.2 Cercle circonscrit à un triangle rectangle . . . 61

7.2.3 Triangle rectangle inscrit dans un cercle . . . 61

7.3 Exercices . . . **62**

7.1. Activités

7.1.1 Cercle circonscrit à un triangle rectangle

1. Construis plusieurs triangles rectangles et leur cercle circonscrit. Où semblent être placés les centres de ces cercles ?

   Il semble que...
   ....

2. Comment prouver cette observation ? Appelons O le milieu du segment $[BC]$ et soit E le symétrique de A par rapport à O.
   (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABEC$? Justifie.
   (b) Que représente alors le point O pour le quadrilatère $ABEC$? Justifie.

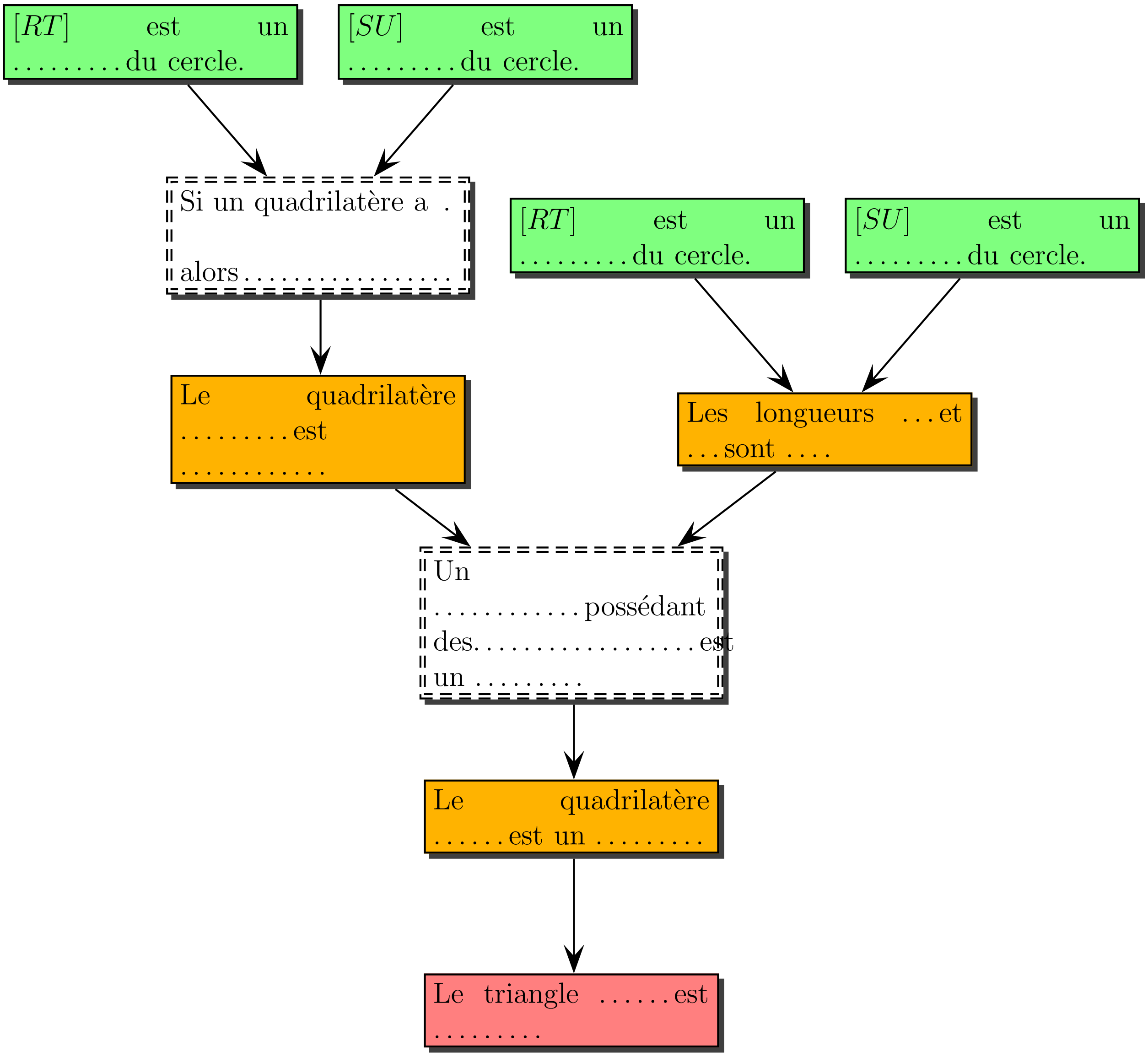
   Si un triangle est rectangle alors..
   ....

7.1.2 Comment obtenir un triangle rectangle à partir d'un cercle ?

1. Soit un cercle de centre O et de rayon $4\,cm$. Essayer de construire un triangle rectangle dont tous les sommets sont sur le cercle.

   Il semble ....
   ....

2. Comment prouver cette idée ?
   (a) Quelles sont les données de cette idée ? Fais une figure qui correspond à ces données :
   – Trace un cercle de ....$[RT]$.
   – Place un point S sur le ....
   – Construis le point U, diamètralement opposé au point S.
   (b) Recopie et complète l'organigramme de démonstration ci-dessous.



Dans un cercle, on obtient un triangle rectangle en ....
....

7.2. Cours

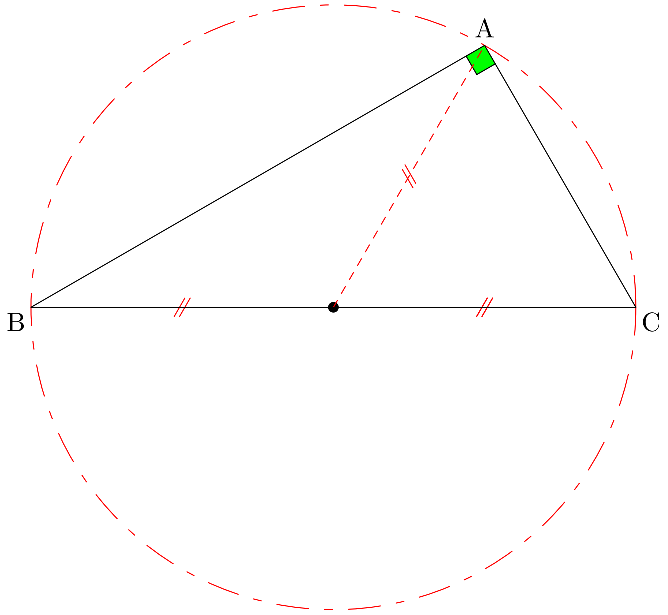
7.2.1 Rappels

Le cercle circonscrit à un triangle ABC est le cercle passant par les 3 sommets du triangle. Son centre est le point d'intersection des 3 médiatrices du triangle.

Le triangle ABC est **inscrit** dans le cercle $\mathcal{C}$ si le cercle $\mathcal{C}$ est circonscrit au triangle ABC.

7.2.2 Cercle circonscrit à un triangle rectangle

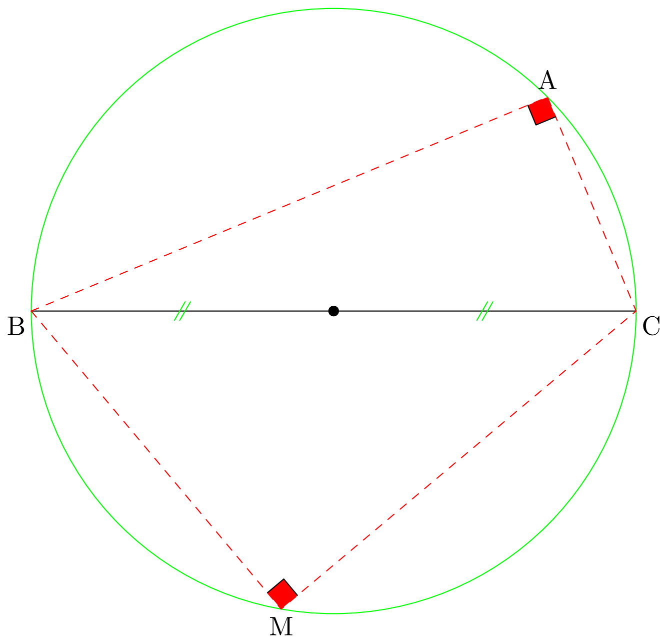
Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse et a pour diamètre l'hypoténuse de ce triangle rectangle.



Comme le triangle ABC est rectangle en A alors A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

7.2.3 Triangle rectangle inscrit dans un cercle

Si l'on rejoint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre de ce cercle alors on obtient un triangle rectangle.



Comme A est un point du cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

Comme M est un point du cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle MBC est rectangle en M.

7.3. Exercices

— ⋆ —

Exercice 1 – geometrique/trianglerectanglecercle/exoa1

Soit EFC un triangle tel que $EF = 6\,cm$, $EC = 4\,cm$, $FC = 8\,cm$. Dans le triangle EFC, la hauteur issue de E coupe la droite (FC) en E' et la hauteur issue de F coupe la droite (EC) en F'.

1. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle $EE'F$? Quel est le rayon de ce cercle ?
2. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle $FF'E$? Quel est le rayon de ce cercle ?
3. Explique alors pourquoi les points E, F, E', F' sont sur un même cercle.

Exercice 2 – geometrique/trianglerectanglecercle/exoa2

Soit un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et $[BC]$ un diamètre de ce cercle. Sur le cercle $(\mathcal{C})$, on place un point I tel que $\widehat{BCI} = 23°$.

1. Fais une figure.
2. Calcule la mesure des angles $\widehat{IBO}$, $\widehat{IOC}$, $\widehat{OIC}$, $\widehat{OIB}$ et $\widehat{IOB}$.

— ⋆⋆ —

Exercice 3 – geometrique/trianglerectanglecercle/exob1

Construis un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AA']$ tel que $AA' = 10\,cm$. Place ensuite le point M' sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $AM' = 6\,cm$ et B, le point du segment $[AA']$ tel que $AB = 2\,cm$.
La perpendiculaire à la droite (AM') passant par B coupe la droite (AM') en M.
Démontre que les droites (MB) et$(A'M')$ sont parallèles.

Exercice 4 – geometrique/trianglerectanglecercle/exob2

Soit P, A, U trois points alignés. Une droite passant par A coupe le cercle de diamètre $[PA]$ en I et le cercle de diamètre $[AU]$ en T.
Démontre que les droites (PI) et (UT) sont parallèles.

Exercice 5 – geometrique/trianglerectanglecercle/exob3

Soit deux droites (AB) et (d) perpendiculaires en C. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[AB]$. Le cercle $\mathcal{C}'$ a pour diamètre $[CB]$ et D est un point d'intersection de la droite (d) et du cercle $\mathcal{C}$.

1. Construis la figure avec $AB = 8\,cm$ et $AC = 3\,cm$.
2. Le cercle $\mathcal{C}'$ et le segment $[BD]$ se coupent en E. Montre que les droites (AD) et (CE) sont parallèles.
3. La perpendiculaire en D à la droite (CD) coupe la droite (CE) en F. Montre que le quadrilatère $ACFD$ est un parallélogramme.

Exercice 6 – geometrique/trianglerectanglecercle/exob4

1. Construis un triangle ULM tel que $UM = 8\,cm$, $UL = 7\,cm$ et $LM = 6\,cm$. Trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[UM]$. Ce cercle coupe le segment $[UL]$ en U et I et le segment $[LM]$ en M et J.
2. Montre que les triangles UIM et UJM sont rectangles.
3. Les segments $[UJ]$ et $[MI]$ se coupent en H.
   Montre que le point I est un point du cercle $\mathcal{C}_2$ de diamère $[UH]$ et J est un point du cercle $\mathcal{C}_3$ de diamètre $[MH]$.

Exercice 7 – geometrique/trianglerectanglecercle/exob5

1. Trace un triangle RST rectangle en S et place le milieu M du segment $[RT]$. Trace le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[SM]$. Il coupe les segment $[RS]$ en I, le segment $[ST]$ en J et le segment $[RT]$ en H.

2. Montre que la droite (SH) est la hauteur du triangle RST relative au segment $[RT]$.
3. Montre que le quadrilatère $SIMJ$ est un rectangle.

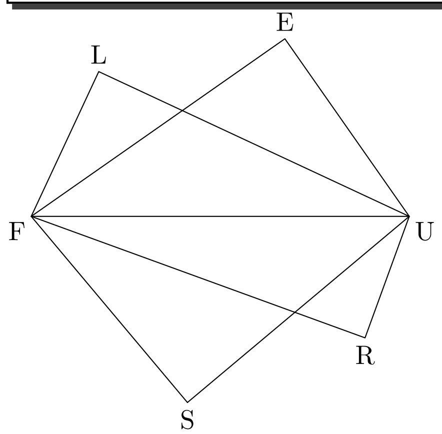
⋆⋆⋆

Exercice 8 – geometrique/trianglerectanglecercle/exoc1

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon $4\,cm$. Deux points A et B sont diamétralement opposés sur le cercle $(\mathcal{C})$. Le point D est un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $BD = 2\,cm$. Le point E est le symétrique du point B par rapport au point D.

1. Démontre que la droite (AD) est la médiatrice du segment $[EB]$.
2. Soit F le symétrique du point O par rapport à la droite (AD).
   Démontre que les points A, F et E sont alignés.
3. Détermine la nature du quadrilatère $AODF$.

Exercice 9 – geometrique/trianglerectanglecercle/exoc2



Dans la figure ci-contre, on a :

$$\widehat{LFE} = \widehat{LUE} = \widehat{SUR} = \widehat{SFR}$$
$$\widehat{EFR} = \widehat{EUF} = 55^\circ; \widehat{LFS} = 115^\circ;$$
$$\widehat{UFR} = 20^\circ; \widehat{RUF} = 70^\circ$$

1. Quelle est la nature du triangle LFU ?
2. Montre que les points F, L, E, U, R et S sont sur un même cercle dont on précisera le diamètre.
3. Construis cette figure avec $FU = 9\,cm$.

Chapitre 8

Théorème des milieux

Sommaire

8.1 Activités **65**

8.1.1 Théorème des milieux 65

8.1.2 Théorème des milieux – Organigramme de démonstration 65

8.1.3 Théorème des milieux – Suite 66

8.1.4 Un triangle, un milieu d'un côté et une parallèle à un des côtés 67

8.1.5 Un triangle, un milieu d'un côté et une parallèle à un des côtés – Organigramme de démonstration 67

8.2 Cours **69**

8.2.1 Le théorème des milieux 69

8.2.2 Milieu et parallèle 69

8.3 Exercices **70**

8.1. Activités

8.1.1 Théorème des milieux

On considère un triangle ABC quelconque et on appelle I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$.

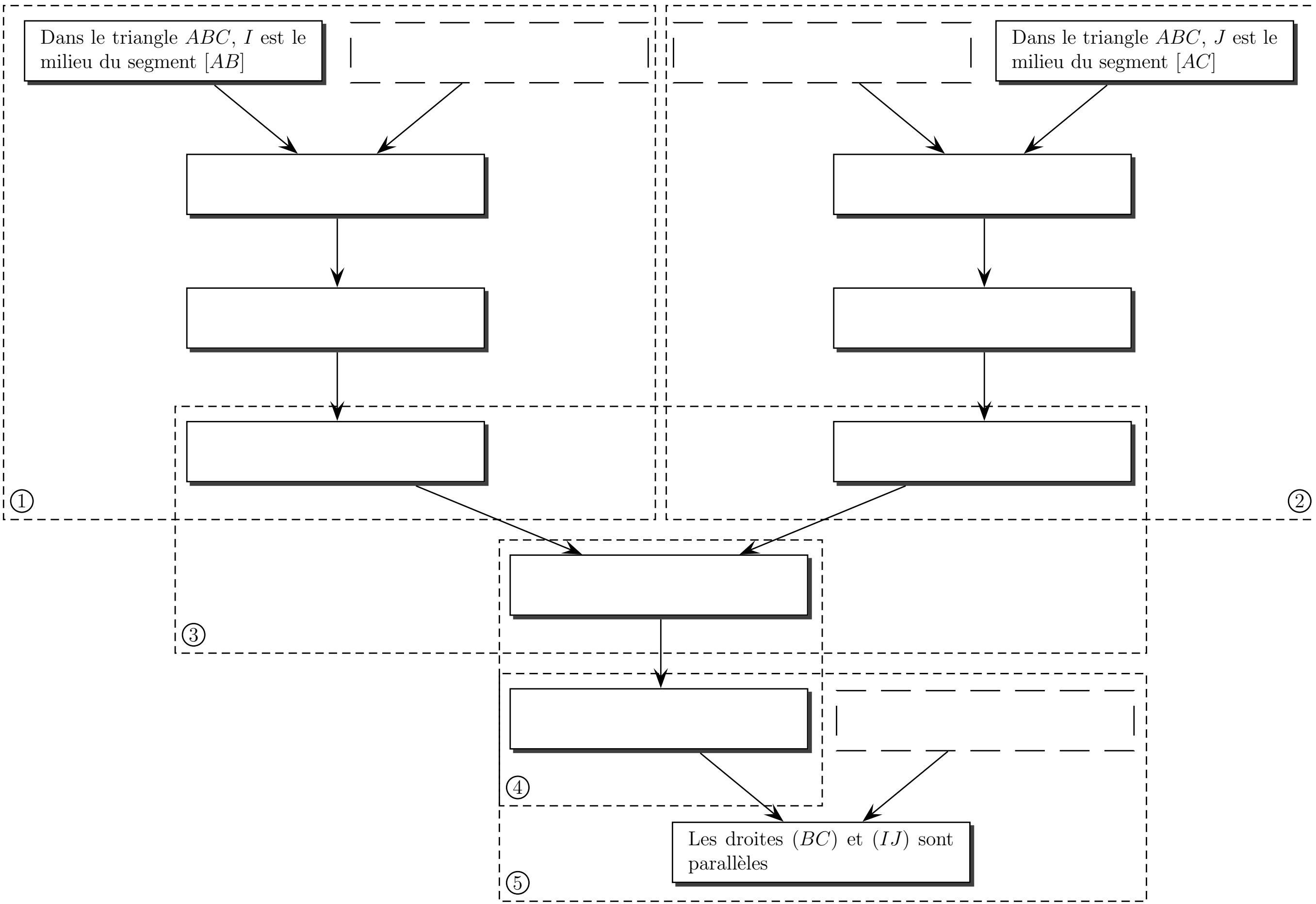
1. Fais plusieurs figures avec des triangles ABC différents. Que remarque-t-on ?

   Il semble que...

2. Comment prouver cette affirmation ? Considérons la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Elle coupe le segment $[BC]$ en H.
   (a) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle AHB ? Justifie.
   (b) Que peut-on en déduire pour le point I par rapport au segment $[AH]$?
   (c) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle AHC ? Justifie.
   (d) Que peut-on en déduire pour le point J par rapport au segment $[AH]$?
   (e) Que représente la droite (IJ) pour le segment $[AH]$? Justifie.
   (f) Que peut-on en conclure pour les droites (IJ) et (BC) ? Justifie.

8.1.2 Théorème des milieux – Organigramme de démonstration

Voici un « déductogramme » : c'est un organigramme qui sert à démontrer une propriété. D'ailleurs, sur le déductogramme ci-dessous, les données du problème et sa conclusion sont déjà placées.



1/ Colorie en vert les données du problème et en rouge sa conclusion.

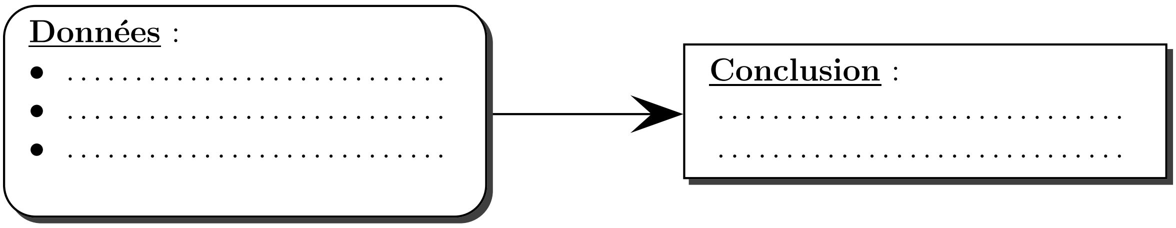
2/ Fais une figure correspondante aux données du problème.

3/ Voici, ci-dessous, une liste de propriétés géométriques. A l'aide de ces propriétés, complète les cases vides du déductogramme. **Attention, il y a des propriétés qui ne sont pas utiles pour cette démonstration ou même fausses.**

J appartient à la médiatrice du segment $[AH]$.	La droite (IJ) est la médiatrice du segment $[AH]$.	La droite (AH) est la médiatrice du segment $[IJ]$.
J est le centre du cercle circonscrit au triangle AHC.	I est le centre du cercle circonscrit au triangle AHB.	H appartient au cercle de diamètre $[AB]$.
$JA = JH$	$IA = IH$	Les droites (IJ) et (AH) sont parallèles.
Les droites (IJ) et (AH) sont perpendiculaires.	I appartient à la médiatrice du segment $[AH]$.	H appartient au cercle de diamètre $[AC]$.

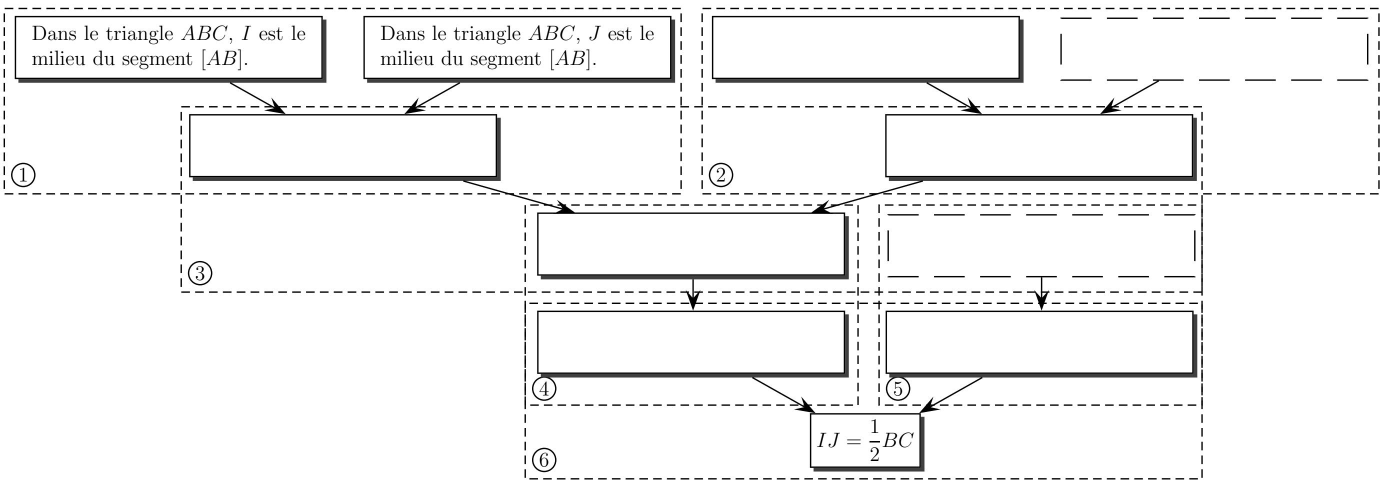
4/ Une fois que ton déductogramme a été complété et corrigé, rédige la démonstration, étapes par étapes, de ce problème.

5/ Complète alors le schéma suivant :



8.1.3 Théorème des milieux – Suite

Ce « déductogramme » complète le théorème précédent. Une nouvelle fois,ci-dessous, les données du problème et sa conclusion sont déjà placées.



1/ Colorie en vert les données du problème et en rouge sa conclusion.

2/ Fais une figure correspondante aux données du problème.

3/ Voici, ci-dessous, une liste de propriétés géométriques. A l'aide de ces propriétés, complète les cases vides du déductogramme. **Attention, il y a des propriétés qui ne sont pas utiles pour cette démonstration ou même fausses.**

Les droites (IK) et (AC) sont parallèles.	Dans le triangle ABC, J est le milieu du segment $[AC]$.	$BC = 2 \times CK$
$BC = 2 \times BK$.	Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.	$IJCK$ est un parallélogramme.
$IJKB$ est un parallélogramme.	$BK = \frac{1}{2}BC$	$IB = JK$
$IJ = BK$	$AJ = JC$	Les droites (JK) et (AB) sont parallèles.

4/ Une fois que ton déductogramme a été complété et corrigé, rédige la démonstration, étapes par étapes, de ce problème.

5/ Complète alors le schéma suivant :

Données :
- . . . .
- . . . .
- . . . .

$\longrightarrow$

Conclusion :
. . . .
. . . .

8.1.4 Un triangle, un milieu d'un côté et une parallèle à un des côtés

On considère un triangle ABC quelconque et on appelle R le milieu du segment $[AB]$. La parallèle à la droite (BC) passant par R coupe le segment $[AC]$ en S.

1. Fais plusieurs figures avec des triangles ABC différents. Que remarque-t-on ?

Il semble que. . . . .

2. Comment prouver cette affirmation ? Soit E le symétrique de S par rapport à R.
   (a) Quelle est la nature du quadrilatère $SAEB$? Justifie.
   (b) Déduis-en que $EB = AS$.
   (c) Quelle est la nature du quadrilatère $SEBC$? Justifie.
   (d) Déduis-en que $EB = SC$.
   (e) Conclue sur la position du point S sur le segment $[AC]$.

8.1.5 Un triangle, un milieu d'un côté et une parallèle à un des côtés – Organigramme de démonstration

Voici, sur la page suivante, un autre « déductogramme » pour un autre théorème. Sur celui-ci, également, les données du problème et sa conclusion sont déjà placées.

1/ Colorie en vert les données du problème et en rouge sa conclusion.

2/ Fais une figure correspondante aux données du problème.

3/ Voici, ci-dessous, une liste de propriétés géométriques. A l'aide de ces propriétés, complète les cases vides du déductogramme. **Attention, il y a des propriétés qui ne sont pas utiles pour cette démonstration ou même fausses.**

$AJBE$ est un parallélogramme.	$AJEB$ est un parallélogramme.	$AJ = JC$
$EB = JC$	E est le milieu du segment $[IJ]$.	I est le milieu du segment $[EJ]$.
$AJ = EB$	Les droites (EA) et (BJ) sont parallèles.	Les droites (EB) et (JC) sont parallèles.
$AJ = EB$	$EJCB$ est un parallélogramme.	$EJBC$ est un parallélogramme.

4/ Une fois que ton déductogramme a été complété et corrigé, rédige la démonstration, étapes par étapes, de ce problème.

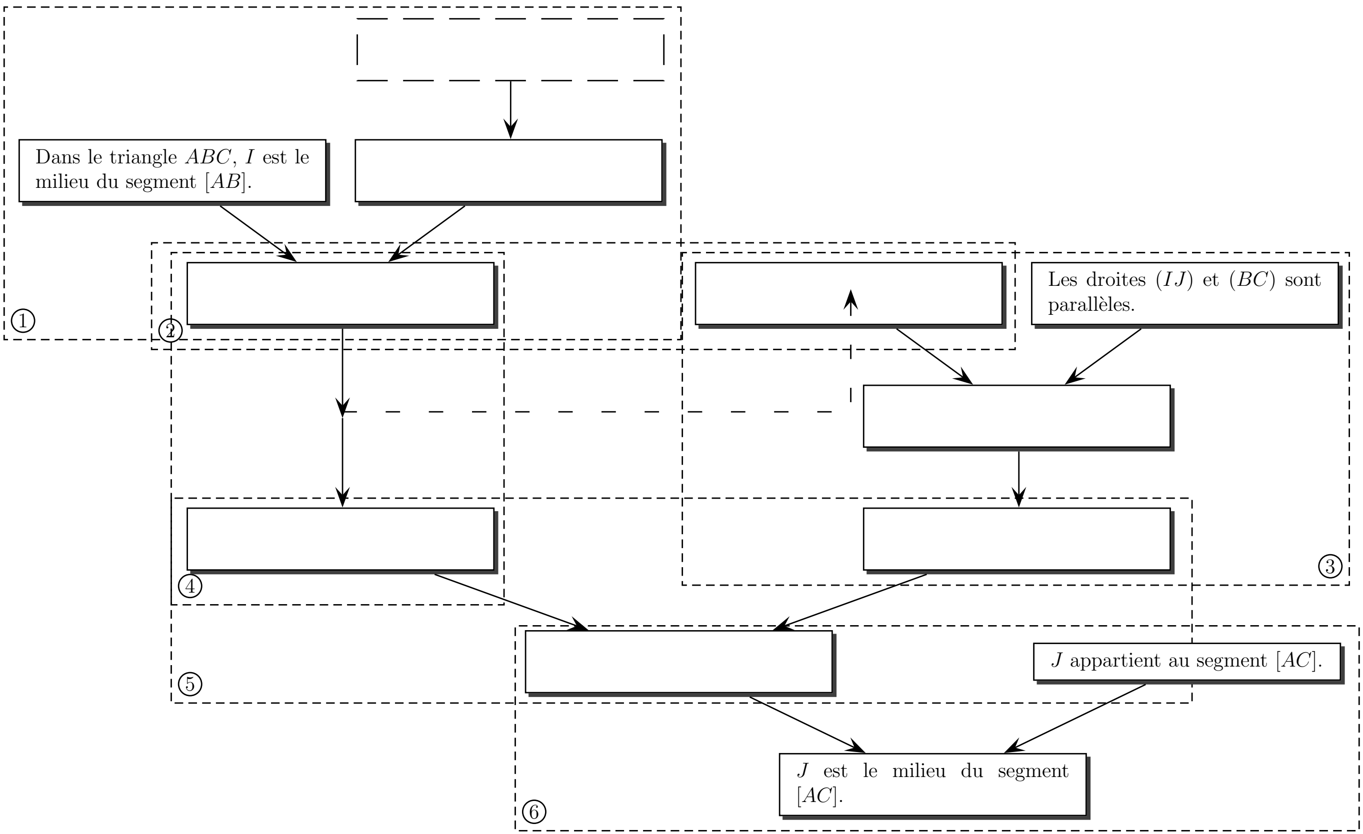
5/ Complète alors le schéma suivant :

Données :
- ....
- ....
- ....

→ **Conclusion** :

....

....

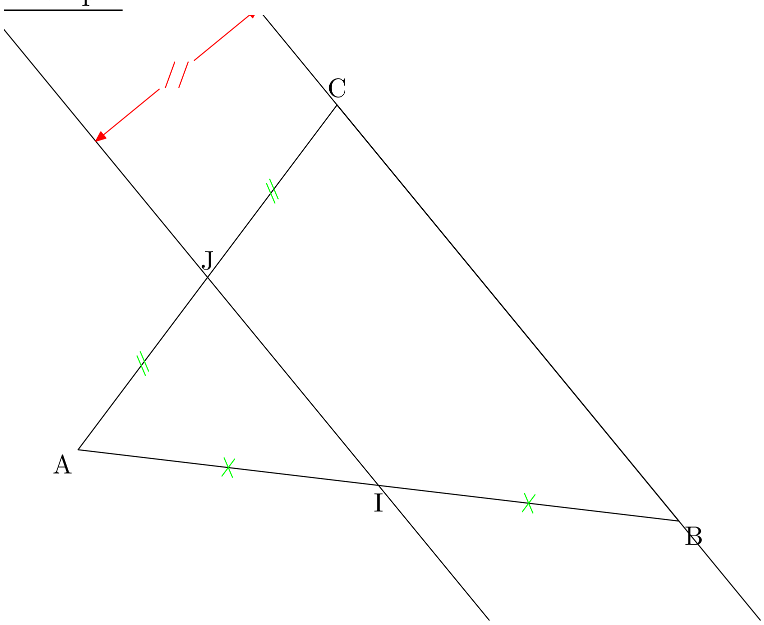


8.2. Cours

8.2.1 Le théorème des milieux

Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au 3^{e}côté.
De plus, la longueur du segment joignant ces deux milieux est égale à la moitié de la longueur du 3^e côté.

Exemple

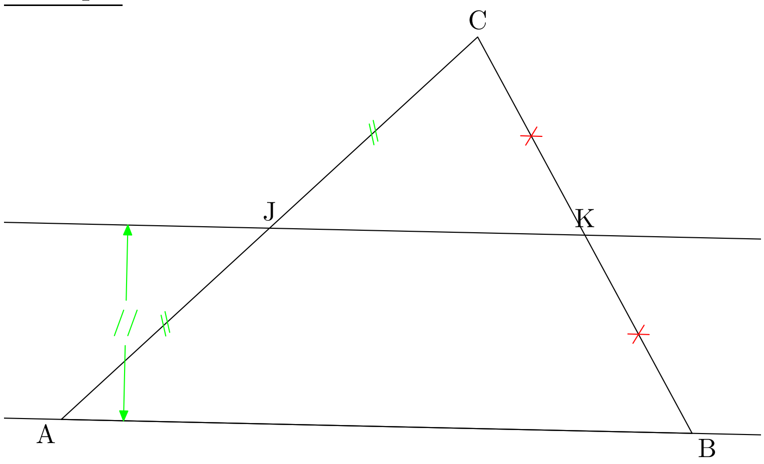


Dans le triangle ABC, I est le milieu du segment $[AB]$ et J est le milieu du segment $[AC]$. Donc les droites (IJ) et (BC) sont parallèles d'après le théorème des milieux.
De plus, $IJ = \dfrac{1}{2} \times BC$.

8.2.2 Milieu et parallèle

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

Exemple



Dans le triangle ABC, la parallèle à la droite (AB) passant par J, milieu du segment $[AC]$, coupe le segment $[BC]$ en K.
Donc le point K est le milieu du segment $[BC]$.

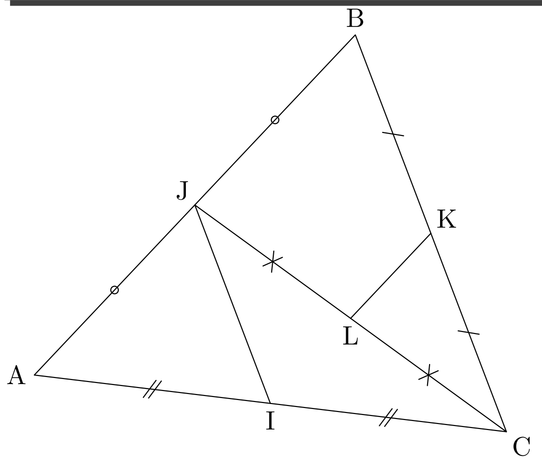
8.3. Exercices

★

Exercice 1 – geometrique/milieux/exoa1

1. Trace un triangle EFG tel que $FG = 7cm$; $FE = 5cm$; $GE = 6cm$.
2. Place le point A symétrique de E par rapport à F. Place le point S symétrique de E par rapport à G.
3. Que peut-on dire des droites (FG) et (AS) ? Justifie.
4. Quelle est la longueur du segment $[AS]$? Justifie.

Exercice 2 – geometrique/milieux/exoa2



Sur la figure ci-contre, on a $AB = 8\,cm$ et $BC = 6\,cm$.

1. Démontre que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et calcule la longueur IJ.
2. Démontre que les droites (LK) et (AB) sont parallèles et calcule la longueur LK.

Exercice 3 – geometrique/milieux/exoa3

1. Construis un triangle EFG tel que $EF = 7\,cm$, $\widehat{EFG} = 65°$, $\widehat{FEG} = 45°$.
   Soit K le milieu du segment $[EF]$. La parallèle à la droite (EG) passant par K coupe le segment $[FG]$ en L.
2. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{FGE}$.
3. Prouve que L est le milieu du segment $[FG]$.

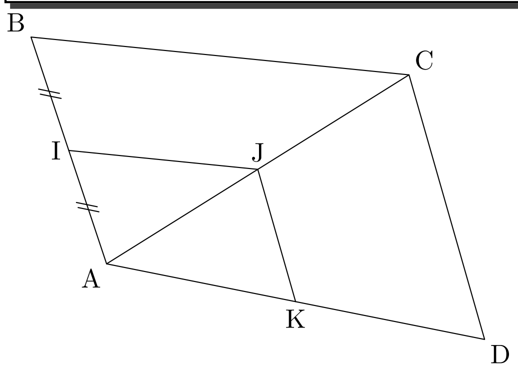
★★

Exercice 4 – geometrique/milieux/exob1

Trace un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un diamètre $[IJ]$ de ce cercle. Place un point M sur le cercle $\mathcal{C}$ et le milieu K du segment $[JM]$.

1. Montre que les droites (OK) et (IM) sont parallèles.
2. Montre que les points O et K sont des points de la médiatrice du segment $[JM]$.
3. Montre que le triangle JMI est rectangle en M.

Exercice 5 – geometrique/milieux/exob2



Dans la figure ci-contre, I est le milieu du segment $[AB]$, la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC) et la droite (JK) est parallèle à la droite (CD).

1. Que peut-on dire du point J ? Justifie.
2. Que peut-on dire du point K ? Justifie.
3. Que peut-on en déduire pour les droites (IK) et (BD) ? Justifie.

Exercice 6 – geometrique/milieux/exob3

Soit ABC un triangle et M un point quelconque du segment $[AB]$. La parallèle à la droite (BC) passant par M coupe la droite (AC) en N. K est le symétrique du point M par rapport au point B. On appelle L le point d'intersection des droites (BC) et (KN).

1. Fais une figure.
2. Prouve que L est le milieu du segment $[KN]$.

Exercice 7 – geometrique/milieux/exob4

On considère un triangle ABC tel que $CB = 6\,cm$, $BA = 4\,cm$ et $\widehat{CBA} = 120°$.
Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

1. Fais une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Place le point D sur le segment $[BC]$ tel que $BD = 1\,cm$.
3. Place le point E sur la droite (BC), en dehors du segment $[BC]$, tel que $BE = 4\,cm$.
4. Prouve que la droite (IJ) coupe les segments $[AD]$ et $[AE]$ en leur milieu.

⋆⋆⋆

Exercice 8 – geometrique/milieux/exoc1

Soit un triangle OBE.
Soit A le symétrique de B par rapport à O. Soit C le symétrique de E par rapport à O.
Soit D le symétrique de O par rapport à B. Soit F le symétrique de O par rapport à E.

1. Fais une figure.
2. Prouve que les droites (AC) et (BE) sont parallèles.
3. Que peut-on dire des droites (BE) et (DF) ? Justifie.
4. Conclue que les droites (AC) et (DF) sont parallèles et que

$$AC = \frac{1}{2}DF$$

Exercice 9 – geometrique/milieux/exoc2

On considère un cercle de diamètre $[AB]$. Soit C un point de ce cercle et D le symétrique de A par rapport à C. La parallèle à la droite (BC) passant par le point D coupe la droite (AB) en E.

1. Réalise une figure.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Démontre que B est le milieu du segment $[AE]$.
4. Quelle est le centre du cercle circonscrit au triangle ADE ?
5. Exprime l'aire $\mathcal{A}'$ du disque de diamètre $[AE]$ en fonction de l'aire $\mathcal{A}$ du disque de diamètre $[AB]$.

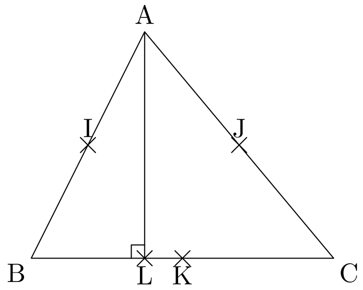
Exercice 10 – geometrique/milieux/exoc3

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On appelle I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Fais plusieurs figures en modifiant le quadrilatère $ABCD$. Quelle conjecture[1] peut-on faire ?
2. Démontre cette conjecture[2].
3. Quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) faut-il pour obtenir un rectangle $IJKL$?

[1] Supposition mathématique (il semble que. . .) que l'on pense pouvoir démontrer.
[2] Ce théorème est connu sous le nom de **Théorème de Varignon**

Exercice 11 – geometrique/milieux/exoc4



On considère la figure ci-contre dans laquelle I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ du triangle ABC. L est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Reproduis la figure ci-contre avec $BC = 6\,cm$, $AB = 5\,cm$ et $AC = 4\,cm$. On la complétera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Démontre que $LI = IB = IA$.
3. Démontre que $KJ = \dfrac{AB}{2}$.
4. La parallèle à la droite (BC) passant par A coupe la parallèle à la droite (JK) passant par C en F. Quelle est la nature du quadrilatère $AFCB$?

Chapitre 9

L'égalité des 3 rapports

Sommaire

9.1 Activités **74**

9.1.1 Approche du théorème 74

9.2 Cours **75**

9.2.1 L'égalité des 3 rapports 75

9.2.2 Application : calcul de longueur 75

9.3 Exercices **77**

9.1. Activités

9.1.1 Approche du théorème

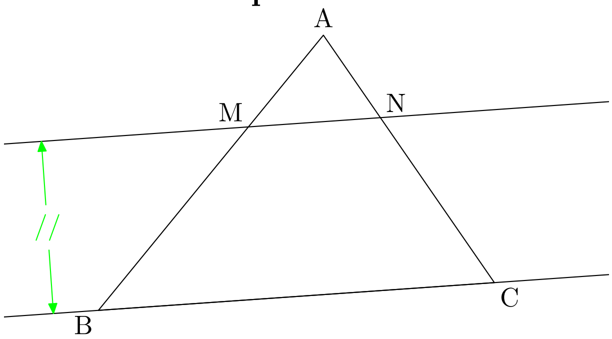
Expérience connue

Soit un triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. La parallèle à la droite (AB) passant par I coupe la droite (AC) en J.

Que peut-on dire du point J ? Quelles égalités peux-tu écrire entre CI et CB d'une part et CJ et CA d'autre part ?

> Est-il possible de généraliser ce théorème à des cas où le point I n'est pas au milieu du segment $[AB]$?

Etude d'un cas particulier



On considère la figure ci-contre où M est un point du segment $[AB]$ tel que $AB = 3 \times AM$. La parallèle à la droite (BC) passant par M coupe la droite (AC) en N.

Est-ce que $AC = 3 \times AN$ **?**

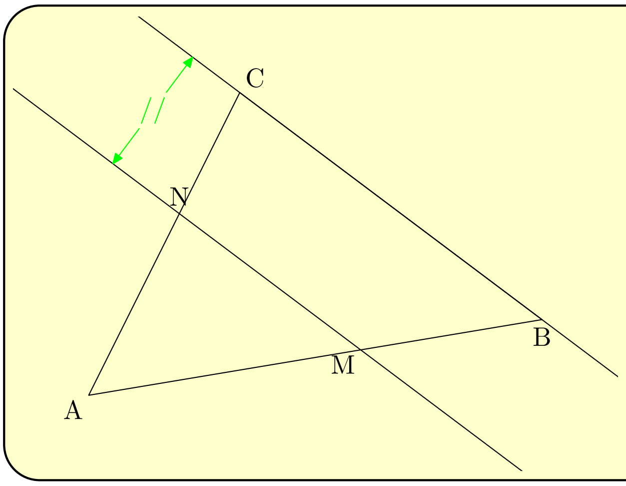
Pour cela, considérons le point L, milieu du segment $[BM]$ et traçons la parallèle à la droite (BC) passant par L ; elle coupe le segment $[AC]$ en J.

1. Que représente le point N pour le segment $[AJ]$? Justifie.
2. A l'aide du point P, intersection des droites (BN) et (LJ), démontre que J est le milieu du segment $[NC]$.
3. Explique alors pourquoi $AC = 3 \times AN$.

9.2. Cours

9.2.1 L'égalité des 3 rapports

Formulation



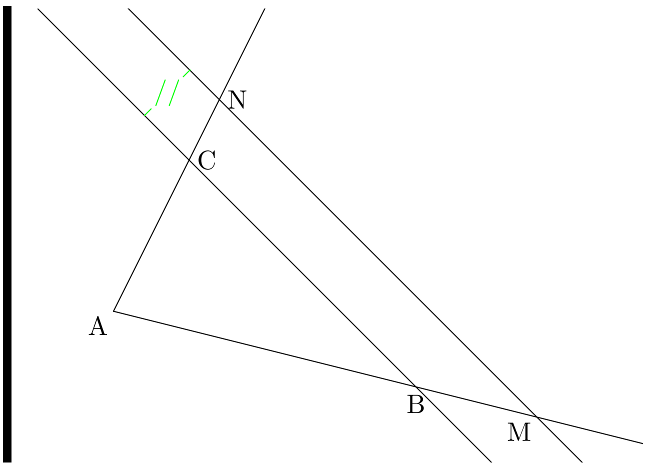
Dans un triangle ABC, si M est un point du côté $[AB]$, N un point du côté $[AC]$ et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{\text{côtés du triangle } AMN}{\text{côtés correspondants du triangle } ABC}$$

Remarques

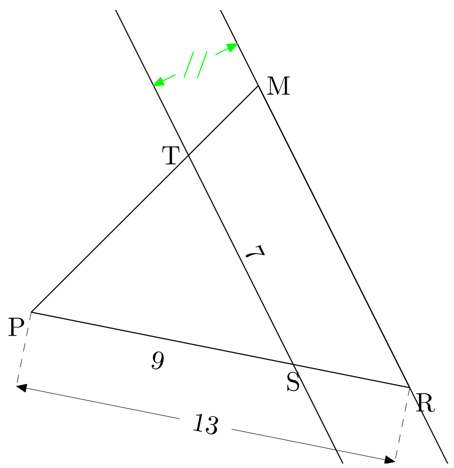
On dit aussi, dans cette configuration, que les longueurs des côtés du triangle AMN sont *proportionnels* aux côtés correspondants du triangle ABC.



Dans le cas où M et N appartiennent aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ avec la droite (MN) parallèle à la droite (BC), on a encore

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

9.2.2 Application : calcul de longueur



L'unité est le centimètre. Les droites (SV) et (RU) sont parallèles.
Calculer la longueur RU.

Dans le triangle PUR, S est un point du segment $[PR]$ et V est un point du segment $[PU]$ tels que les droites (SV) et (RU) soient parallèles. Donc, d'après « l'égalité des 3 rapports », on a

$$\frac{PS}{PR} = \frac{PV}{PU} = \frac{SV}{RU} \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{9}{13} = \frac{PV}{PU} = \frac{7}{RU}$$

On utilise

$$\frac{9}{13} = \frac{7}{RU}$$

Les produits en croix sont égaux

$$9 \times RU = 7 \times 13$$
$$9 \times RU = 91$$
$$RU = \frac{91}{9}$$

La longueur RU mesure environ $10,1\,cm$.

9.3. Exercices

★

Exercice 1 – geometrique/thales/exoa1

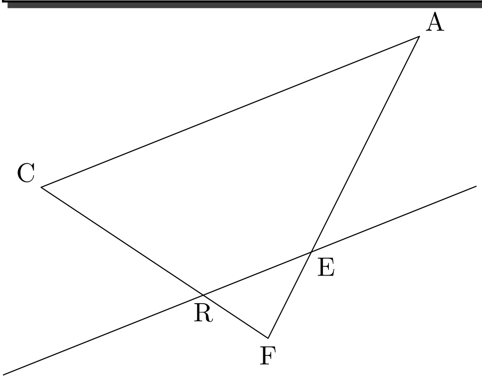
1. Construis un triangle ABC tel que $AB = 8\,cm$, $AC = 12\,cm$ et $BC = 10\,cm$.
2. Soit E le point du segment $[AB]$ tel que $AE = 3,2\,cm$. La parallèle à la droite (BC) passant par E coupe le droite (AC) en D.
   Calcule la longueur AD.

Exercice 2 – geometrique/thales/exoa2

Construis un triangle RST tel que $RS = 8,8\,cm$, $RT = 5,6\,cm$ et $ST = 4,8\,cm$. Soit M le point du segment $[RS]$ tel que $RM = 6,6\,cm$.
La parallèle à la droite (ST) passant par M coupe le segment $[RT]$ en N.

1. Calcule la longueur MN.
2. Calcule la longueur RN. Déduis-en la longueur NT.

Exercice 3 – geometrique/thales/exoa3



Dans la figure ci-contre (qui n'est pas en vraie grandeur), les droites (ER) et (AC) sont parallèles. On sait également que $FE = 3,5\,cm$, $FR = 4,2\,cm$, $FA = 6\,cm$, $AC = 4,8\,cm$.

1. Calcule les longueurs ER et RC.
2. Reproduis la figure en vraie grandeur sur la feuille blanche.

Exercice 4 – geometrique/thales/exoa4

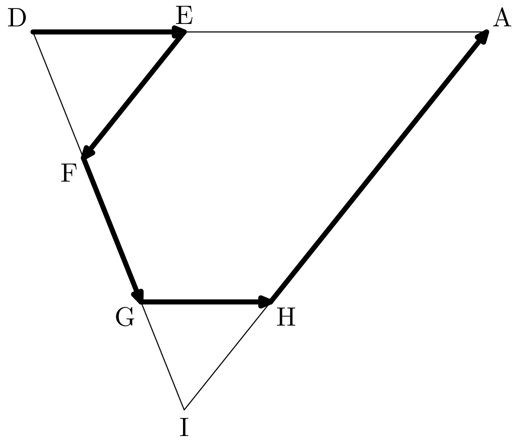
Soit EFG un triangle rectangle en F tel que $EF = 6cm$ et $FG = 8cm$. Soit I le point du segment $[EF]$ tel que $EI = 2cm$. La perpendiculaire à la droite (EF) passant par I coupe le segment $[EG]$ en J.
Déterminer le rapport $\dfrac{EJ}{EG}$.

★★

Exercice 5 – geometrique/thales/exob1

Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que $EF = 4\,cm$, $FH = 5\,cm$ et $EH = 6\,cm$.
Soit K le point du segment $[EH]$ tel que $HK = 1,2cm$.
La parallèle à la droite (EF) passant par K coupe le segment $[FH]$ en J.
Calculer les longueurs HJ et JK.

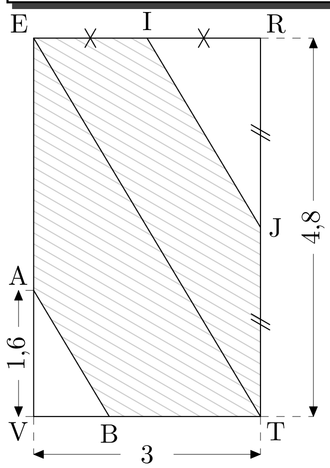
Exercice 6 – geometrique/thales/exob2



Pour une épreuve d'orientation, Aurore reçoit le plan ci-contre. Sachant que les droites (EF) et (IA) sont parallèles ainsi que les droites (GH) et (DA), quelle est la longueur du parcours $DEFGHA$?

D : Départ A : arrivée.
$DA = 600\,m$, $DE = 200\,m$, $IG = 90\,m$, $DI = 315\,m$, $IA = 390\,m$.

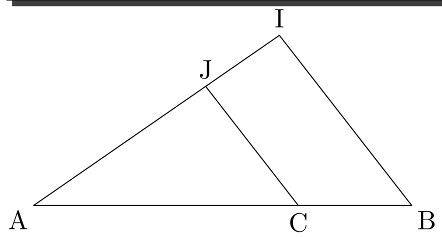
Exercice 7 – geometrique/thales/exob3



La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
Les longueurs sont données en centimètre.
$VERT$ est un rectangle. Les droite (AB) et (ET) sont parallèles. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[ER]$ et $[TR]$.

1. Calcule la longueur VB.
2. Calcule l'aire de la surface hachurée.

Exercice 8 – geometrique/thales/exob4



Sur la figure ci-contre, on a $AB = 7\,m$, $AC = 4,9\,m$ et $IB = 3\,m$. Les droites (JC) et (IB) sont parallèles.
Démontre que le triangle JCB est isocèle.

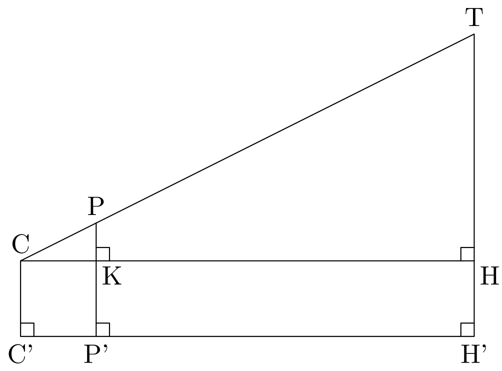
Exercice 9 – geometrique/thales/exob5

Soit ABC un triangle tel que $BC = 6\,cm$. Soit I le milieu du segment $[BC]$ et P le point du segment $[BC]$ tel que $BP = 1cm$.
La parallèle à la droite (AI) passant par P coupe la droite (AC) en N et la droite (AB) en M.

1. Fais une figure.
2. Montre que $\dfrac{PM}{AI} = \dfrac{1}{3}$.
3. Montre que $\dfrac{AI}{PN} = \dfrac{3}{5}$.

⋆⋆⋆

Exercice 10 – geometrique/thales/exoc1



Dans la figure ci-contre, on donne les mesures suivantes : $CC' = 1,6\,m$; $PP' = 2,4\,m$; $C'P' = 2,4\,m$ et $P'H' = 8,4\,m$.

1. Calcule les longueurs PK et CH.
2. Déduis-en la longueur TH puis la longueur TH'.

Exercice 11 – geometrique/thales/exoc2

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de diamètre $[AM]$ tel que $AM = 12\,cm$. N est un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $AN = 8\,cm$. La droite (d_1) est la perpendiculaire à la droite (AN) passant par O : elle coupe la droite (AN) en C.

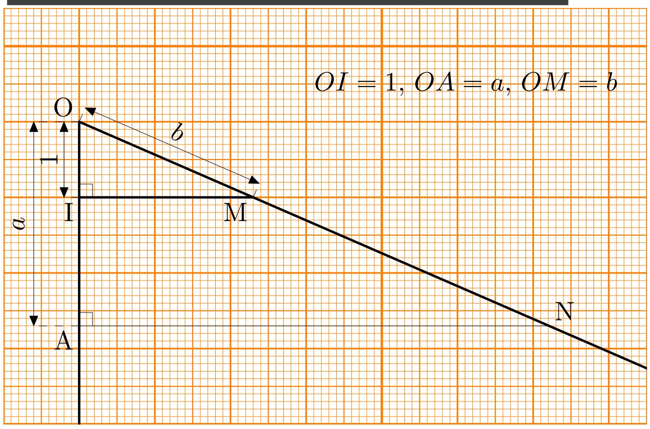
1. Démontre que les droites (OC) et (MN) sont parallèles.
2. Déduis-en la position du point C sur le segment $[AN]$.
3. D est le point du segment $[AO]$ tel que $AD = 2\,cm$. La parallèle à la droite (MN) passant par D coupe la droite (AN) en E.
   Calcule la longueur EC.

Exercice 12 – geometrique/thales/exoc3

Soit $IJKL$ un parallélogramme et M un point du segment $[IL]$. La droite (JM) coupe la diagonale $[IK]$ en N. La parallèle à la droite (IJ) passant par N coupe la droite (IL) en E.

1. (a) Compare les rapports $\dfrac{EN}{IJ}$ et $\dfrac{MN}{MJ}$.
   (b) Compare les rapports $\dfrac{IN}{IK}$ et $\dfrac{EN}{IJ}$.
   (c) Déduis-en alors que
   $$\frac{IN}{IK} = \frac{MN}{MJ}$$
2. (a) Compare les rapports $\dfrac{IN}{IK}$ et $\dfrac{IE}{IL}$.
   (b) En utilisant la question 1, montre que $\dfrac{IE}{IL} = \dfrac{ME}{MI}$
   (c) Déduis-en que
   $$MI \times IE = ME \times IL$$

Exercice 13 – geometrique/thales/exoc4



1. En observant la figure, exprime la longueur ON en fonction de a et b. Que représente cette longueur ON pour a et b ?
2. Réalise la figure ci-contre avec $a = 4,8$ et $b = 3,5$.
   En mesurant ON, donne une valeur approchée du produit $4,8 \times 3,5$.
3. Réalise une construction pour trouver une valeur approchée du quotient de $7,9$ par $3,7$.

Exercice 14 – geometrique/thales/exoc5

1. Construis un triangle ABC tel que $BC = 10\,cm$, $BA = 8\,cm$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

2. Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A coupe la droite (BC) en H.
   La perpendiculaire à la droite (AC) passant par H coupe la droite (AC) en G.
   La perpendiculaire à la droite (BC) passant par G coupe la droite (BC) en F.
   La perpendiculaire à la droite (AC) passant par F coupe la droite (AC) en E.
3. (a) Montre que les droites (AH) et (GF) sont parallèles.
   (b) Montre que
   $$\frac{CG}{CA} = \frac{CF}{CH} = \frac{GF}{AH}$$
4. Montre que
   $$\frac{CE}{CG} = \frac{CF}{CH} = \frac{EF}{GH}$$
5. Déduis des questions 3b et 4 que
   $$\frac{EF}{GH} = \frac{FG}{AH}$$

Chapitre 10

Le Théorème de Pythagore

Sommaire

10.1 Activités **82**

10.1.1 Carré d'un nombre positif 82

10.1.2 Deux carrés pour un grand carré 82

10.1.3 Démontrer qu'un triangle est rectangle 83

10.2 Cours **85**

10.2.1 Enoncé du théorème 85

10.2.2 Application : calcul de longueur 85

10.2.3 La réciproque du théorème de Pythagore 85

10.3 Exercices **87**

10.1. Activités

10.1.1 Carré d'un nombre positif

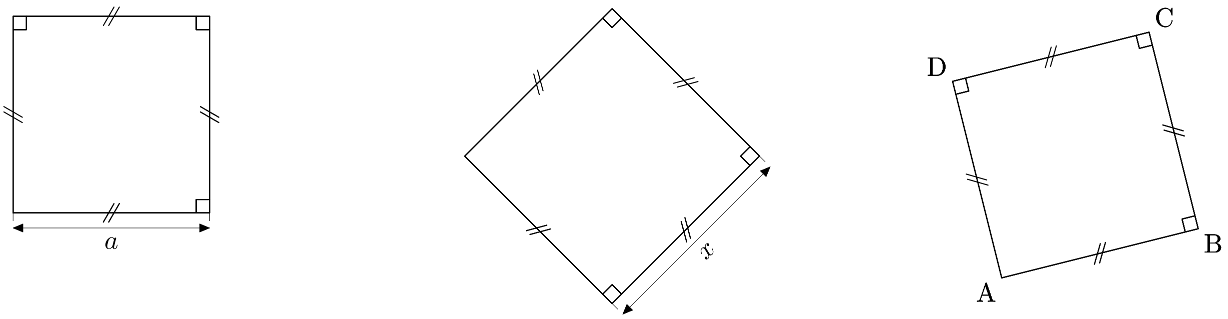
On sait que $10^2 = 10 \times 10 = 100$. Sur le même principe, complète les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rr} 3^2 = 3 \times \ldots = \ldots & 4^2 = \ldots \times \ldots = \ldots \\ 7^2 = \ldots \times \ldots = \ldots & 12^2 = \ldots \times \ldots = \ldots \\ \ldots^2 = \ldots \times \ldots = 25 & \ldots^2 = \ldots \times \ldots = 36 \\ \ldots^2 = \ldots \times \ldots = 64 & \ldots^2 = \ldots \times \ldots = 100 \end{array}$$

Définition 1 *Le* **carré** *d'un nombre positif est le produit du nombre par lui-même.*

$$a^2 = a \times a \qquad (a > 0)$$

Dans chacun des cas suivants, exprime l'aire des carrés en fonction de leur côté.



$\mathcal{A}_{ABCD} = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\mathcal{A}_{ABCD} = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\mathcal{A}_{ABCD} = \ldots\ldots\ldots$

$\mathcal{A}_{ABCD} = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\mathcal{A}_{ABCD} = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\mathcal{A}_{ABCD} = \ldots\ldots\ldots$

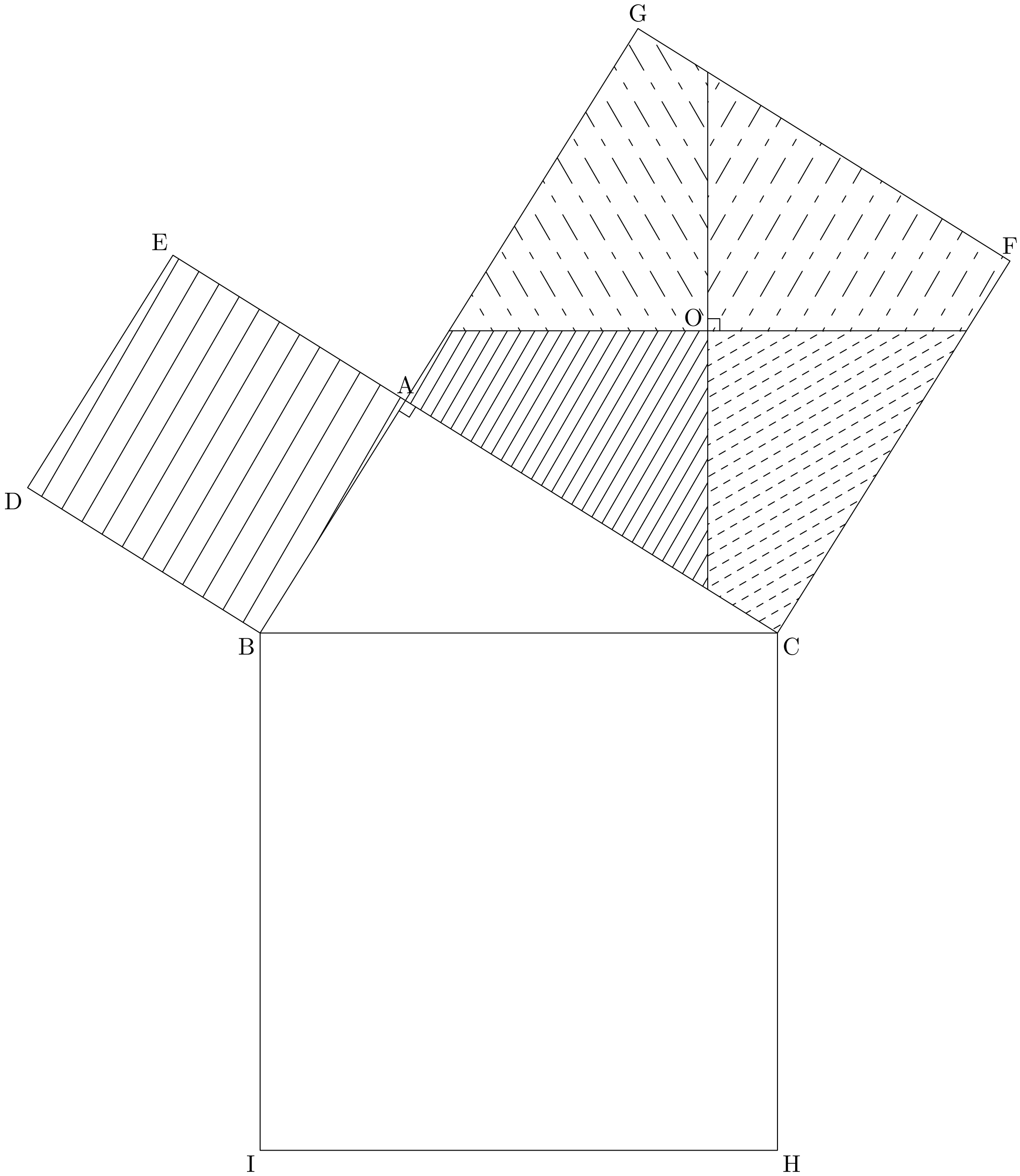
10.1.2 Deux carrés pour un grand carré

Soit un triangle ABC, rectangle en A tel que $AB = 5\,cm$ et $AC = 8\,cm$. A l'extérieur du triangle ABC, on construis les carrés $ABDE$, $ACFG$, $BCHI$. Soit O le centre du carré $ACFG$. Par O, on trace la parallèle à la droite (BC) et la perpendiculaire à la droite (BC).

Reproduis, sur feuille libre, la figure ci-après.

On obtient alors 5 pièces de « puzzle » : les 4 pièces du carré $ACFG$ auxquelles on ajoute le carré $ABDE$ (ce sont les pièces hachurées).

Peut-on, avec ces 5 pièces, former le carré $BCHI$?



10.1.3 Démontrer qu'un triangle est rectangle

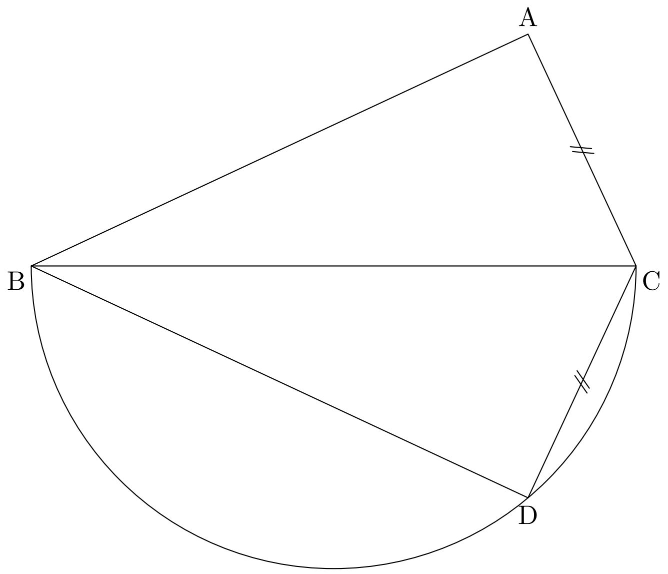
Préambule

Rappel : Deux points A et B sont symétriques par rapport à une droite (d) lorsque la droite (d) est la médiatrice du segment $[AB]$.

0/ (a) Rappelle la définition d'une médiatrice.

(b) Si A, B, D sont trois points distincts, que peut-on dire si $AD = DB$?

Activité



Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle tel que

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 \tag{10.1}$$

On construit, de l'autre côté de A, le demi-cercle de diamètre $[BC]$ et on place sur ce demi-cercle, le point D tel que $CD = CA$.

1/ (a) Quelle est la nature du triangle BCD ?

(b) Ecris le théorème de Pythagore correspondant à ce triangle.

(c) Déduis-en que $BD = BA$ à l'aide de l'égalité 10.1.

2/ (a) Quel est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC) ? Justifie.

(b) Quel est le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite (BC) ? Justifie.

(c) Pourquoi peut-on en déduire que le triangle ABC est rectangle en A ?

Conclusion

3/ (a) Quelles sont les données de l'activité ?

(b) Quelle est la conclusion de l'activité ?

(c) Cite le théorème ainsi démontré.

Application

4/ (a) Est-ce que le triangle ABC tel que $BC = 13\,cm$, $AC = 12\,cm$ et $AB = 5\,cm$ est un triangle rectangle ?

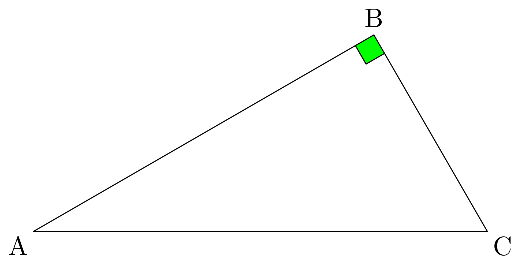
(b) Est-ce que le triangle ABC tel que $BC = 6\,cm$, $AC = 7,5\,cm$ et $AB = 4,5\,cm$ est un triangle rectangle ?

(c) Est-ce que le triangle DEF tel que $DE = 5\,cm$, $DF = 8\,cm$ et $EF = 6\,cm$ est rectangle ?

10.2. Cours

10.2.1 Enoncé du théorème

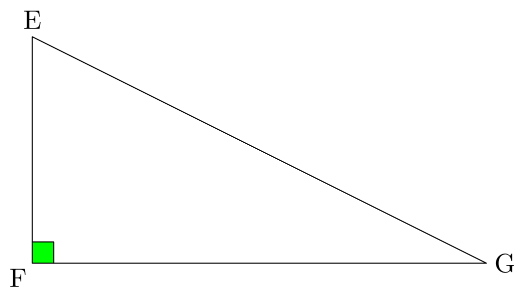
Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.



Dans le triangle ABC rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

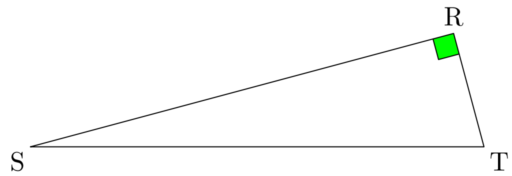
10.2.2 Application : calcul de longueur



Dans le triangle EFG rectangle en F, le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\begin{aligned} EG^2 &= EF^2 + FG^2 \\ EG^2 &= 6^2 + 8^2 \\ EG^2 &= 36 + 64 \\ EG^2 &= 100 \\ EG &= 10 \end{aligned}$$

La longueur EG mesure $10\,cm$.



Dans le triangle RST rectangle en R, le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\begin{aligned} ST^2 &= SR^2 + RT^2 \\ 9^2 &= 7^2 + RT^2 \\ 81 &= 49 + RT^2 \\ RT^2 &= 81 - 49 \\ RT^2 &= 32 \\ RT &= \sqrt{32} \\ RT &\approx 5,66 \end{aligned}$$

La longueur RT mesure environ $5,66\,cm$.

On appelle **racine carrée** d'un nombre positif a, le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, tel que son carré soit égal à a.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

10.2.3 La réciproque du théorème de Pythagore

Dans un triangle ABC tel que BC soit le plus grand côté, <u>si</u> $BC^2 = AC^2 + AB^2$ <u>alors</u> le triangle ABC est rectangle en A.

<u>Exemples</u>

1. *Est-ce que le triangle RST tel que $RS = 3\,cm$, $ST = 4\,cm$ et $TR = 5\,cm$ est un triangle rectangle ?*

Dans le triangle RST, $[RT]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} TR^2 = 5^2 = 25 \\ \\ RS^2 + ST^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \end{array}\right\} TR^2 = RS^2 + ST^2$$

Comme $TR^2 = RS^2 + ST^2$, le triangle RST est rectangle en S d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

2. *Est-ce que le triangle EHI tel que $EH = 10,5\,cm$, $EI = 8\,cm$ et $HI = 6\,cm$ est un triangle rectangle ?*

Dans le triangle EHI, $[EH]$ est le plus grand côté.

$$\left.\begin{array}{l} EH^2 = 10,5^2 = 110,25 \\ \\ EI^2 + IH^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \end{array}\right\} EH^2 \neq EI^2 + IH^2$$

Donc le triangle EHI n'est pas un triangle rectangle.

10.3. Exercices

Exercice 1 – geometrique/pythagore/exoa1

Recopie et complète les phrases suivantes :

1. Comme ABC est un triangle rectangle en B alors

$$\ldots^2 = \ldots^2 + \ldots^2$$

2. Comme DEF est un triangle rectangle en D alors
   ....
3. Comme IJK est un triangle rectangle en K alors
   ....
4. Comme RST est un triangle rectangle en S alors
   ....
5. Comme LMN est un triangle rectangle en L alors
   ....
6. Comme XYZ est un triangle rectangle en Y alors
   ....

Exercice 2 – geometrique/pythagore/exoa2

Construis un triangle ABC rectangle en A sachant que $AB = 4,8\,cm$ et $AC = 6,4\,cm$. Calcule ensuite la longueur BC.

Exercice 3 – geometrique/pythagore/exoa3

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 12\,cm$ et $AC = 16\,cm$.
   Calcule la longueur BC.
2. Soit DEF un triangle rectangle en E tel que $DE = 35\,cm$ et $EF = 12\,cm$.
   Calcule la longueur DF.
3. Soit IJK un triangle rectangle en K tel que $IK = 7\,cm$ et $JK = 2,4\,cm$.
   Calcule la longueur IJ.
4. Soit LNM un triangle rectangle en M tel que $MN = 25,5\,cm$ et $LM = 3,2\,cm$.
   Calcule la longueur LN.

Exercice 4 – geometrique/pythagore/exoa4

1. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 7,2\,cm$ et $BC = 15,3\,cm$. Calcule la longueur AC.
2. Soit DEF un triangle rectangle en D tel que $DE = 16,8\,cm$ et $EF = 23,2\,cm$. Calcule la longueur DF.
3. Soit IJK un triangle rectangle en J tel que $IK = 44,9\,cm$ et $JK = 35,1\,cm$. Calcule la longueur IJ.
4. Soit LMN un triangle rectangle en L tel que $LM = 6,8\,cm$ et $MN = 6,89\,cm$. Calcule la longueur LN.

Exercice 5 – geometrique/pythagore/exoa5

1. Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $AB = 7,4\,cm$ et $BC = 6,5\,cm$.
   Calcule un arrondi au mm de la longueur AC.
2. Soit DEF un triangle rectangle en E tel que $DE = 34,4\,cm$ et $EF = 72,8\,cm$.
   Calcule un arrondi au mm de la longueur DF.

Exercice 6 – geometrique/pythagore/exoa6

1/ ABC est un triangle tel que $AB = 4,5\,cm$; $AC = 2,7\,cm$; $BC = 3,6\,cm$.
Démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle.

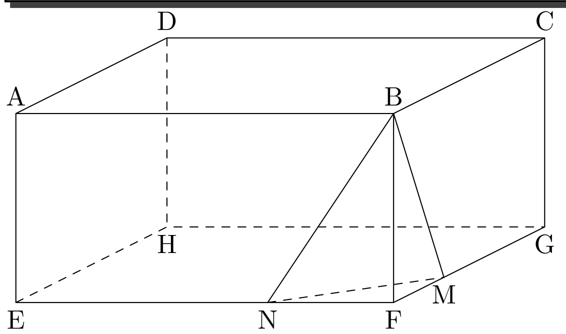
2/ DEF est un triangle tel que $DE = 28\,cm$; $DE = 35,1\,cm$; $EF = 44,9\,cm$.
Démontre que le triangle DEF est un triangle rectangle.

3/ IJK est un triangle tel que $IJ = 2,04\,cm$; $IK = 5,96\,cm$; $JK = 5,6$.
Démontre que le triangle IJK est un triangle rectangle.

4/ RST est un triangle tel que $RS = 76\,cm$; $ST = 76,1\,cm$; $RT = 3,9$.
Démontre que le triangle RST est un triangle rectangle.

★★

Exercice 7 – geometrique/pythagore/exob1



$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. On donne

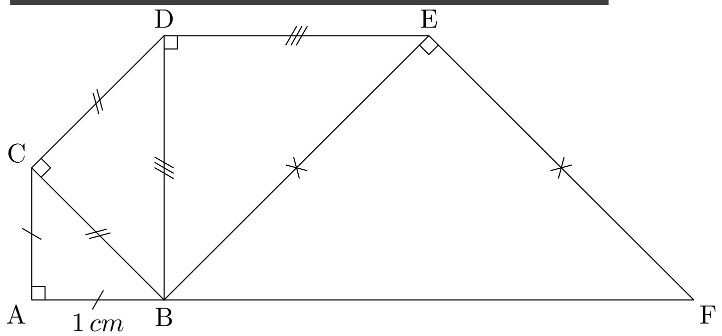
$FE = 12\,cm$ $\quad FG = 9\,cm$

$FB = 3\,cm$ $\quad FN = 4\,cm$

$FM = 3\,cm$

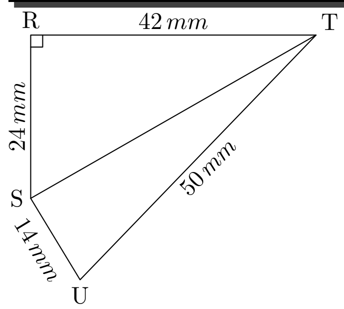
1. Construis la face $EFGH$ en vraie grandeur.
2. Construis un patron de ce parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
3. Calcule la longueur MN.
4. Calcule l'aire du triangle FMN.
5. Calcule la longueur EG puis déduis-en la longueur EC.

Exercice 8 – geometrique/pythagore/exob2



Calcule les longueurs BC, BD, BE et BF.

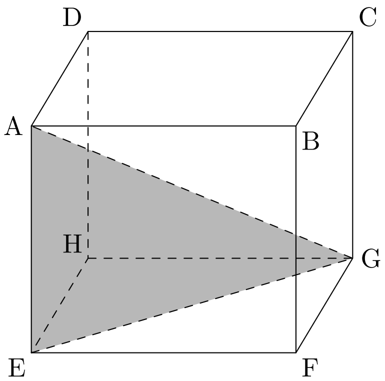
Exercice 9 – geometrique/pythagore/exob3



1/ Construis en vraie grandeur la figure ci-contre.

2/ Le triangle STU semble rectangle. L'est-il vraiment ? Justifie la réponse.

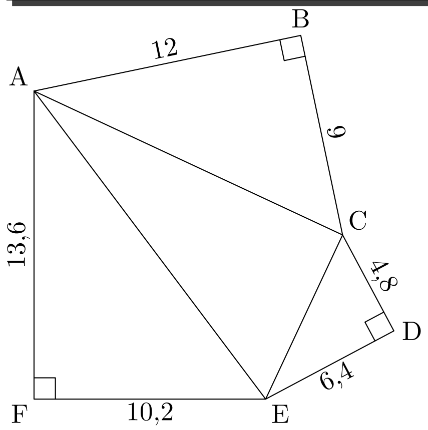
Exercice 10 – geometrique/pythagore/exob4



Le dessin ci-contre représente, en perspective cavalière, un cube d'arête $3\,cm$.

1. (a) Quelle est, dans la réalité, la nature du triangle EFG ? Justifie la réponse.
   (b) Prouve que $EG^2 = 18$.
2. (a) Quelle est, dans la réalité, la nature du triangle AEG ? (On ne demande pas de preuve.)
   (b) Calcule la longueur de la diagonale $[AG]$ du cube, arrondie au millimètre.

Exercice 11 – geometrique/pythagore/exob5



Sur la figure ci-contre les longueurs sont données en centimètre.

1/ Quelle est la nature du triangle ACE ? Justifie.

2/ Reproduis la figure à l'échelle 1/2.

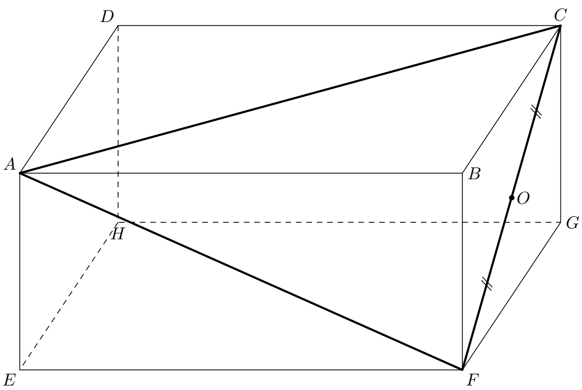
Exercice 12 – geometrique/pythagore/exob6

Dans un rectangle de longueur $7\,cm$ et de largeur x, le périmètre est de $18\,cm$.

1. Quelle est la valeur de x ? Construire alors le rectangle en vrai grandeur.
2. Calculer la longueur de la diagonale d'un tel rectangle.

⋆ ⋆ ⋆

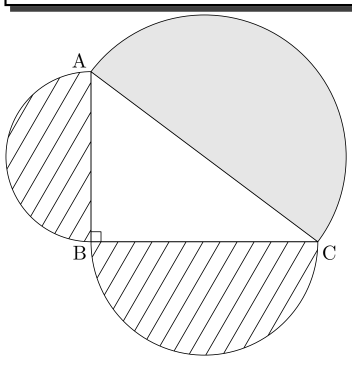
Exercice 13 – geometrique/pythagore/exoc1



Soit $ABCDEFGH$ le parallélépipède rectangle représenté ci-contre tel que $AB = 12\,cm$ et $BC = BF = 5\,cm$.

1. Calcule la longueur AC.
2. Quelle est la nature du triangle ACF ? Justifie.
3. Soit O le milieu du segment $[CF]$. Prouve que les droites (AO) et (CF) sont perpendiculaires.
4. Calcule la longueur AO. On calculera d'abord la longueur CO.
5. Quel est le volume, en litre, de ce parallélépipède rectangle ?

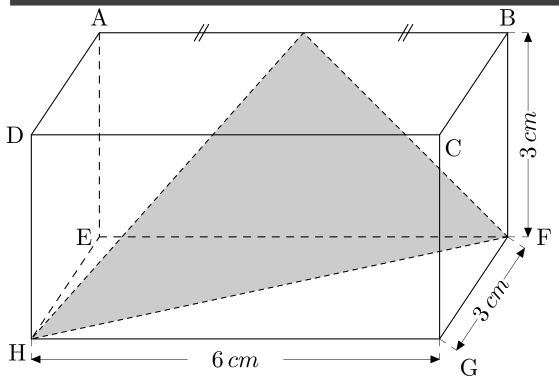
Exercice 14 – geometrique/pythagore/exoc2



Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 4,8\,cm$ et $AC = 6,4\,cm$.

1. Calcule la longueur BC.
2. Montre que la somme des aires hachurées est égale à l'aire grisée.
3. En posant $AB = a$, $AC = b$ et $BC = a$, démontre que le résultat obtenu à la question 2 est vrai dans le cas général.

Exercice 15 – geometrique/pythagore/exoc3



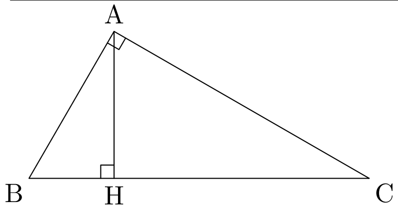
Dans le pavé droit ci-dessous, le point M est le milieu de l'arête $[AB]$.

1/ Est-il exact que $DM = MF = CF$?

2/ (a) Donne les valeurs exactes de MH^2, HF^2 et MF^2.

(b) Le triangle MFH est-il rectangle ? Justifie.

Exercice 16 – geometrique/pythagore/exoc4



Sur la figure ci-contre, on donne $AB = 6\,cm$ et $BH = 3\,cm$. Le segment $[AH]$ est la hauteur relative à l'hypoténuse $[BC]$.

1. Calcule la longueur AH.
2. Sachant que HC est le triple de BH, calcule la longueur BC.
3. Calcule la longueur AC.
4. Calcule l'aire du triangle ABC.
5. Reproduis la figure en vraie grandeur. On appellera O le milieu du segment $[BC]$ et A' le symétrique de A par rapport au point O.
6. Quelle est la nature du quadrilatère $ABA'C$? Justifie la réponse.

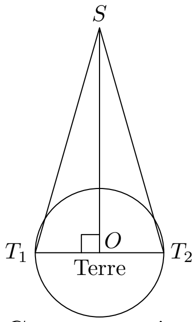
Chapitre 11

Cosinus d'un angle aigu

Sommaire

11.1 Activités **92**
11.2 Cours **93**
11.2.1 Vocabulaire 93
11.2.2 Cosinus d'un angle aigu 93
11.2.3 Applications 93
11.3 Exercices **95**

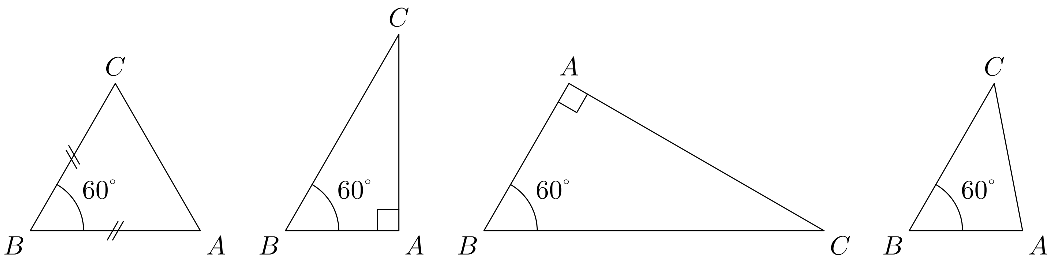
11.1. Activités



En 260 Av J.C., Aristarque de Samos entreprit de mesurer la distance de la Terre au Soleil. Après réflexions et approximations, il aboutit à la figure ci-contre (qui n'est pas à l'échelle).
Le point O est le centre de la Terre, le point S représente le Soleil. Les points T_1 et T_2 sont deux points particuliers à la surface de la Terre.
Il connaissait déjà le rayon de la Terre mais ne pouvant mesurer réellement les longueurs T_1S et ST_2, il mesura, à l'aide d'un téléscope, les angles $\widehat{ST_1T_2}$ et $\widehat{T_1T_2S}$.

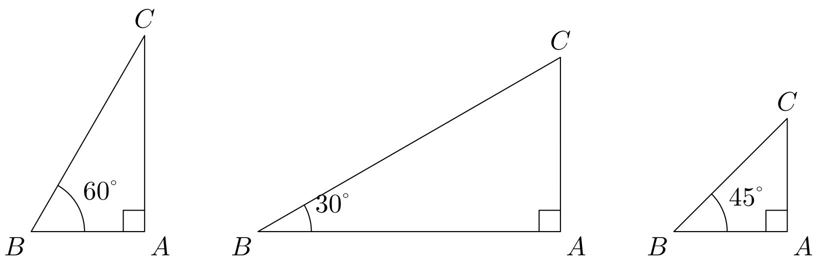
Comment, à partir de ces données, calculer la longueur SO ?

1. Dans chacun des cas suivants, mesure les longueurs BA et BC puis évalue le rapport $\dfrac{BA}{BC}$.



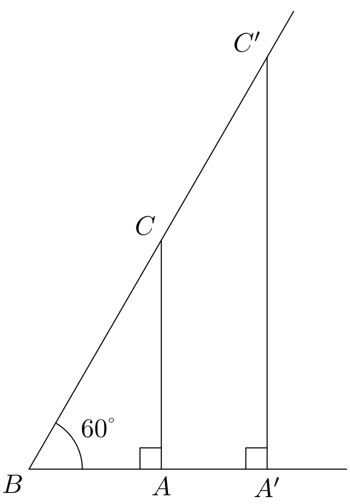
Que remarque-t-on ?...
....

2. Dans chacun des cas suivants, mesure les longueurs BA et BC puis évalue le rapport $\dfrac{BA}{BC}$.



Que remarque-t-on ?...
....

3. Pourquoi cette dernière remarque ? Sur la figure ci-dessous, on a dessiné deux triangles rectangles ABC et $A'BC'$ qui possèdent chacun un angle de 60°.



(a) Que peut-on dire des droites (CA) et $(C'A')$?

(b) Que peut-on dire des rapports $\dfrac{BA}{BA'}$ et $\dfrac{BC}{BC'}$? Pourquoi ?

(c) Puisque $\dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{BC}{BC'}$, posons $k = \dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{BC}{BC'}$. On obtient alors

$AB = k \times \ldots \qquad BC = k \times \ldots$

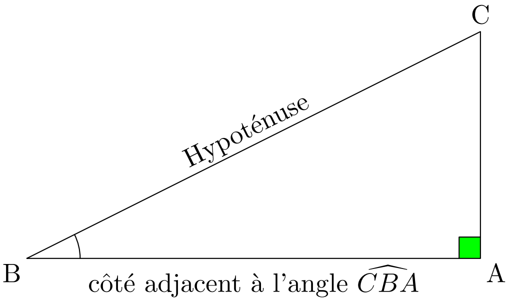
et on peut écrire

$$\frac{AB}{BC} = \ldots\ldots$$

<u>Conclusion</u> : Les rapports ...... et ...... sont bien......... et ne dépendent que du........................ et de..................

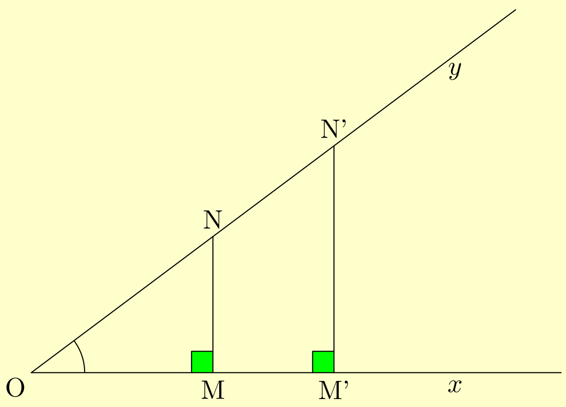
11.2. Cours

11.2.1 Vocabulaire



Si ABC est un triangle rectangle en A alors
- $[BA]$ est le **côté adjacent** de l'angle $\widehat{ABC}$,
- $[AC]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$,
- $[BC]$ est l'**hypoténuse** du triangle rectangle.

11.2.2 Cosinus d'un angle aigu



Soit $\widehat{xOy}$ un angle aigu.
Si OMM' et ONN' sont deux triangles rectangles qui ont le même angle aigu $\widehat{xOy}$ alors

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OM'}{ON'}$$

Cette valeur commune est appelée « **le cosinus de l'angle** $\widehat{xOy}$ » et se note $\cos\widehat{xOy}$.

$$\cos\widehat{xOy} = \frac{OM}{ON} = \frac{OM'}{ON'}$$

Si ABC est un triangle rectangle en A alors

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{Côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{Hypoténuse du triangle rectangle } ABC}$$

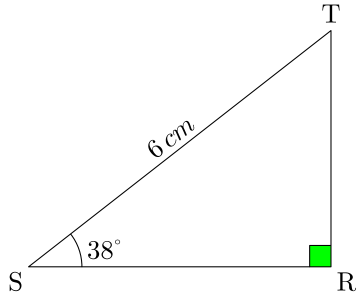
11.2.3 Applications

Pour les calculs, on utilise le mode « **degré** » de la calculatrice.

Calculer une longueur

<u>Cas n°1</u>

Le triangle RST est rectangle en R donc



$$\cos \widehat{RST} = \frac{RS}{ST}$$

$$\frac{\boxed{\cos 38}}{1} = \frac{RS}{6}$$

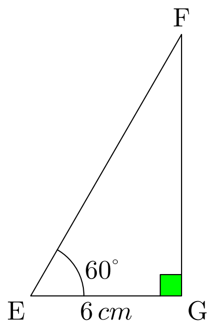
Les produits en croix sont égaux

$$RS = 6 \times \boxed{\cos 38}$$

$$RS \simeq 4,73\,cm$$

<u>Cas n°2</u>

Le triangle EFG est rectangle en G donc



$$\cos \widehat{EFG} = \frac{EG}{EF}$$

$$\frac{\boxed{\cos 60}}{1} = \frac{6}{EF}$$

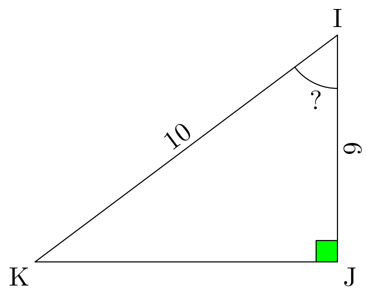
Les produits en croix sont égaux

$$EF \times \boxed{\cos 60} = 6$$

$$EF = \frac{6}{\boxed{\cos 60}}$$

$$EF = 12\,cm$$

Calculer un angle



Le triangle IJK est rectangle en J donc

$$\cos \widehat{KIJ} = \frac{IJ}{IK}$$

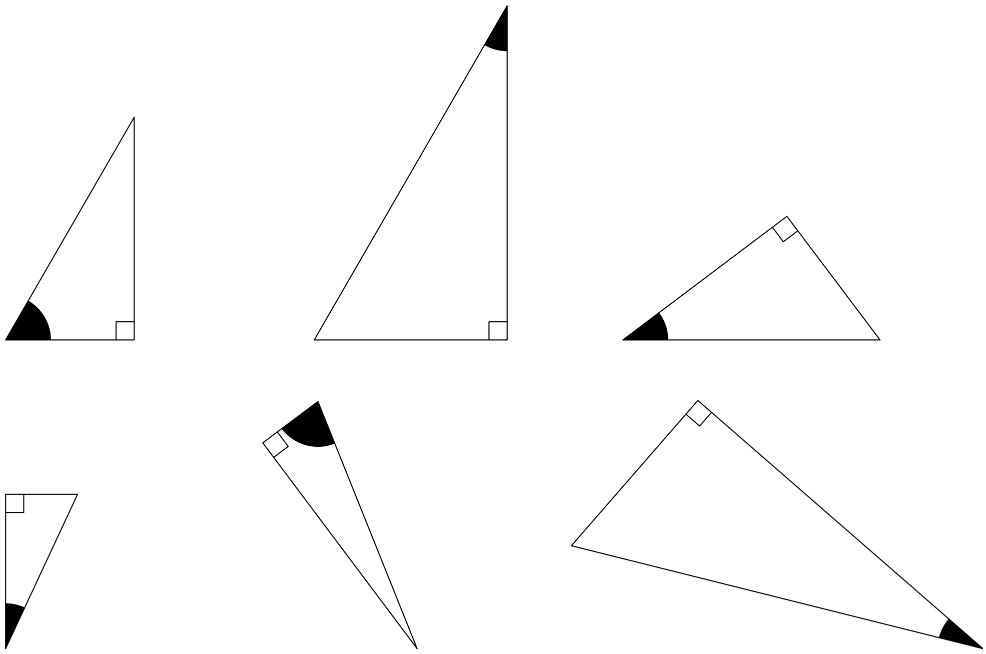
$$\cos \widehat{KIJ} = \frac{6}{10}$$

$$\widehat{KIJ} \simeq 53^\circ$$

11.3. Exercices

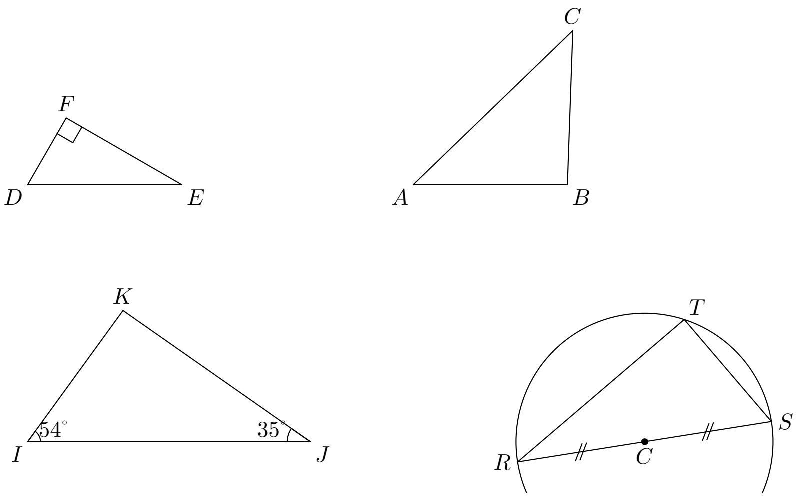
Exercice 1 – geometrique/cosinus/exoa1

Pour chaque triangle rectangle ci-dessous, indique où se trouve le côté adjacent à l'angle coloré et l'hypoténuse du triangle rectangle.



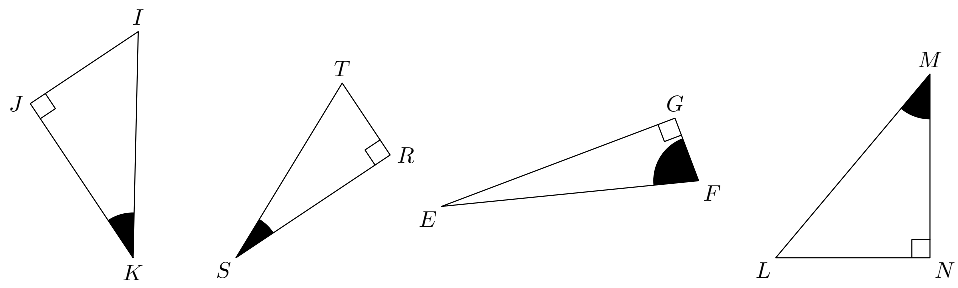
Exercice 2 – geometrique/cosinus/exoa2

Peux-tu envisager d'utiliser le cosinus dans les triangles suivants ? Justifie la réponse.

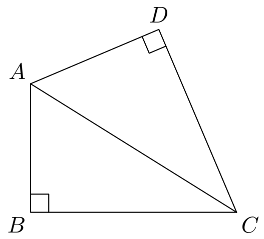


Exercice 3 – geometrique/cosinus/exoa3

Dans chaque triangle rectangle ci-dessous, ecris l'expression du cosinus de l'angle coloré.



Exercice 4 – geometrique/cosinus/exoa4



Les triangles ABC et ACD ci-contre sont rectangles respectivement en B et en D.

1. Pour chacun des angles suivants, précise son côté adjacent et le triangle rectangle considéré :

   (a) $\widehat{BAC}$; (b) $\widehat{ADC}$; (c) $\widehat{ACD}$; (d) $\widehat{ACB}$.

2. Ecris l'expression du cosinus de chacun de ces angles.

Exercice 5 – geometrique/cosinus/exoa5

Soit RST un triangle rectangle en R tel que $RS = 7,2\,cm$ et $ST = 9\,cm$.

1. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{RST}$. On donnera la valeur approchée au degré près.
2. Calcule la longueur TR.

Exercice 6 – geometrique/cosinus/exoa6

1. Construis un triangle RST rectangle en S tel que $RS = 4\,cm$ et $RT = 8\,cm$.
2. Calcule la longueur ST.
3. Détermine les angles de ce triangle rectangle.

Exercice 7 – geometrique/cosinus/exoa7

Dans chacun des cas, on fera la figure correspondante en vraie grandeur.

1. Soit RST un triangle rectangle en R tel que $RT = 4\,cm$ et $\widehat{RTS} = 30^\circ$.
   Calcule la longueur ST.
2. Soit IJK un triangle rectangle en K tel que $IJ = 9\,cm$ et $\widehat{IJK} = 45^\circ$.
   Calcule la longueur KJ.

Exercice 8 – geometrique/cosinus/exoa8

Sur un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 10\,cm$, place un point C tel que l'angle $\widehat{ABC} = 50^\circ$.

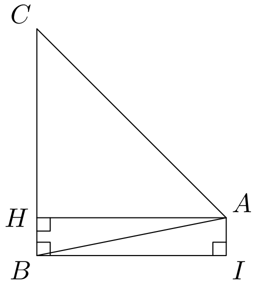
1. Montre que le triangle ABC est rectangle.
2. Calcule les longueurs BC et AC. (On donnera les valeurs arrondies au millimètre.)

⋆⋆

Exercice 9 – geometrique/cosinus/exob1

Durant la tempête de Décembre 1999, un arbre s'est brisé en B. Son extrémité E est tombé à $12\,m$ des racines R en faisant un angle de 30°avec le tronc (qui est resté perpendiculaire au sol). Quelle était la hauteur de l'arbre avant la tempête ?

Exercice 10 – geometrique/cosinus/exob2



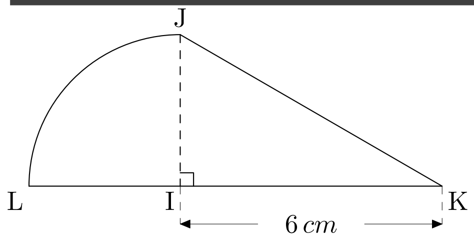
En voyage à Paris, on veut photographier La Tour Eiffel (Voir Schéma ci-contre). Le segment $[BC]$ représente La Tour Eiffel ; l'appareil-photo est au point A.
On a les mesures suivantes :
$BC = 300\,m,\ BI = 350\,m,\ AI = 1,5\,m.$
Calcule l'angle $\widehat{BAC}$ sous lequel on voit La Tour Eiffel.

Exercice 11 – geometrique/cosinus/exob3

Dans chacun des cas, construis un triangle EFG, rectangle en F, en respectant les indications.

1. Calcule la longueur GF sachant que $EG = 10\,cm$ et $\widehat{EGF} = 35^\circ$.
2. Calcule la longueur EG sachant que $EF = 8\,cm$ et $\widehat{EGF} = 39^\circ$.
3. Calcule la longueur FG sachant que $EF = 4\,cm$ et $\widehat{FEG} = 75^\circ$.

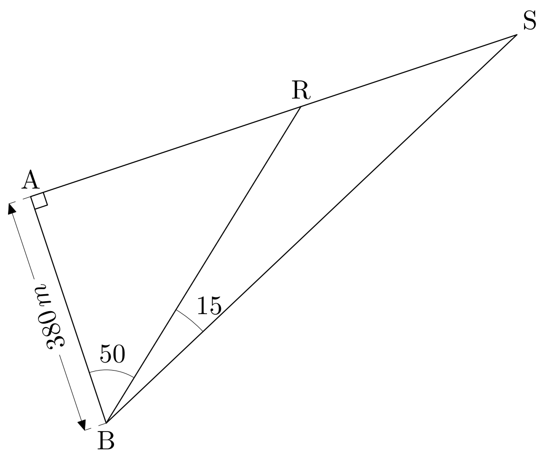
Exercice 12 – geometrique/cosinus/exob4



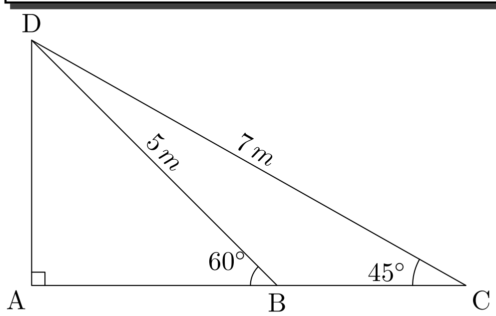
Calcule le périmètre et l'aire de la figure ci-contre qui est constitué d'un triangle rectangle et d'un quart de disque.
L'angle $\widehat{IJK}$ vaut 60°.

Exercice 13 – geometrique/cosinus/exob5

A l'aide des indications portées sur la figure ci-dessous, calcule la longueur RS.**On indiquera correctement toutes les données nécessaires à l'utilisation d'un théorème ou d'une propriété.**



Exercice 14 – geometrique/cosinus/exob6

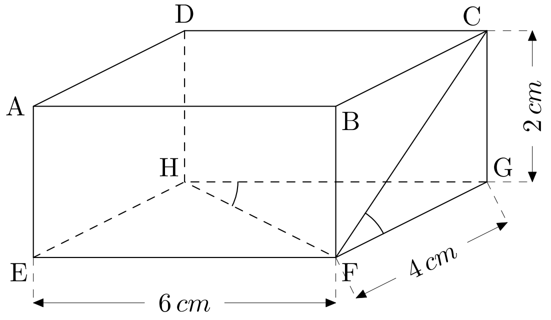


A l'aide de la figure ci-contre, calcule la longueur BC.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 15 – geometrique/cosinus/exoc1

La figure ci-dessous représente un pavé droit. Calcule une valeur approchée des mesures des angles $\widehat{CFG}$ et $\widehat{GHF}$.



Chapitre 12

Droites remarquables du triangle

Sommaire

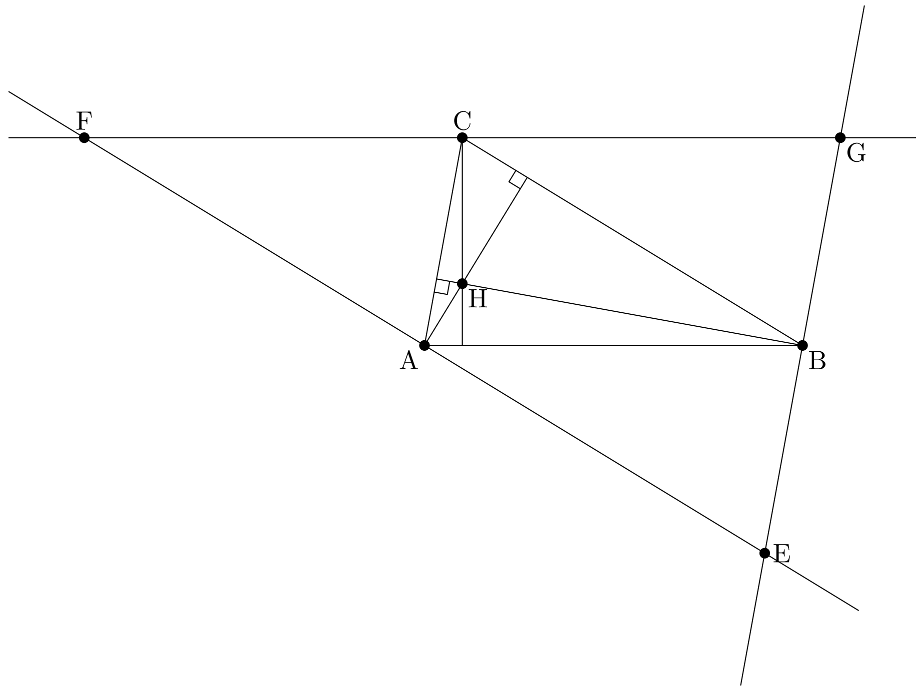
12.1 Activités **100**
12.1.1 Médiatrices 100
12.1.2 Hauteurs 100
12.1.3 Médianes 101
12.1.4 Bissectrices 101
12.2 Cours **102**
12.2.1 Les hauteurs 102
12.2.2 Les médiatrices 102
12.2.3 Les médianes 103
12.2.4 Les bissectrices. 103
12.3 Exercices **104**
12.4 Approfondissement **107**
12.4.1 Droite d'Euler 107
12.4.2 Cercle d'Euler ou cercle des neuf points 108

12.1. Activités

12.1.1 Médiatrices

1. Que sais-tu sur les 3 médiatrices d'un triangle ?
2. Quel objet mathématique ces 3 médiatrices permettent-elles de construire ?

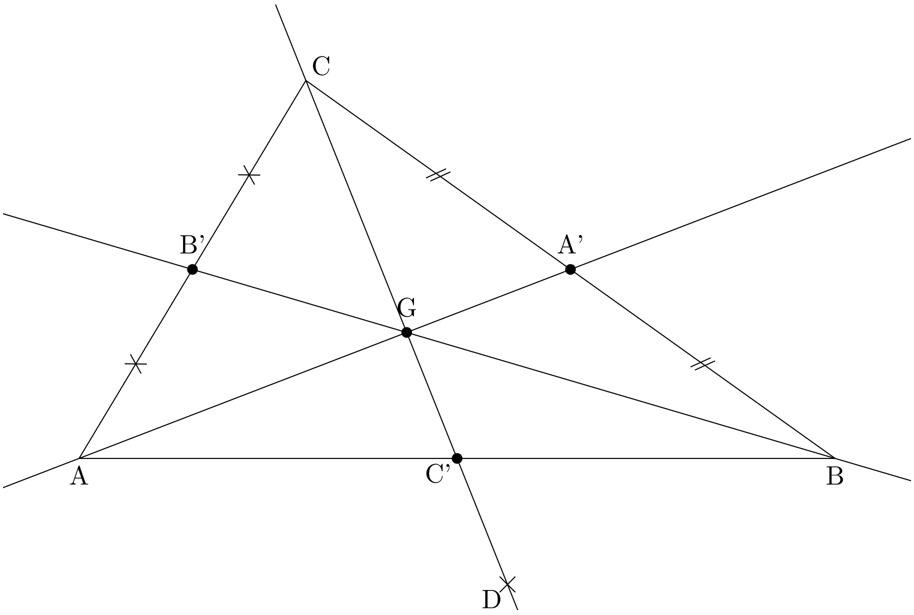
12.1.2 Hauteurs



Soit ABC un triangle quelconque et H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B dans le triangle ABC. Les droites (EF), (FG) et (GE) sont parallèles respectivement à (BC), (BA) et (AC).

1. Combien peux-tu citer de hauteurs dans le triangle ABC ?
2. (a) Quelle est la nature des quadrilatères $EACB$ et $AFCB$? Justifie.
   (b) Déduis-en alors la position particulière du point A sur le segment $[EF]$.
   (c) Que peux-tu dire de la droite (AH) et du segment $[EF]$? Justifie.
3. Que peux-tu dire de la droite (BH) et du segment $[EG]$? Justifie.
4. Que peux-tu dire de la droite (CH) et du segment $[FG]$? Justifie.
5. Que représente alors la droite (CH) pour le triangle ABC ? Justifie.
6. Quelle est la synthèse de cet exercice ?

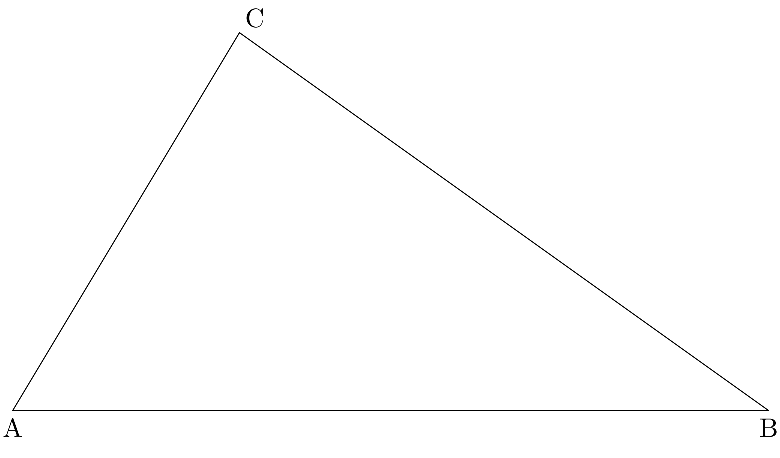
12.1.3 Médianes



Soit ABC un triangle quelconque et A', B' les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AC]$. Soit G le point d'intersection des droites (AA') et (BB') et D le symétrique de C par rapport à G. Soit C' le point d'intersection des droites (CG) et (AB).

1. Dans un triangle, on appelle **médiane** *une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.*
   Combien peux-tu citer de médianes dans le triangle ABC ? Justifie.
2. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $AGBD$? Justifie.
   (b) Déduis-en alors la position du point C' sur le segment $[AB]$.
3. Quelle est la synthèse de cet exercice ?

12.1.4 Bissectrices



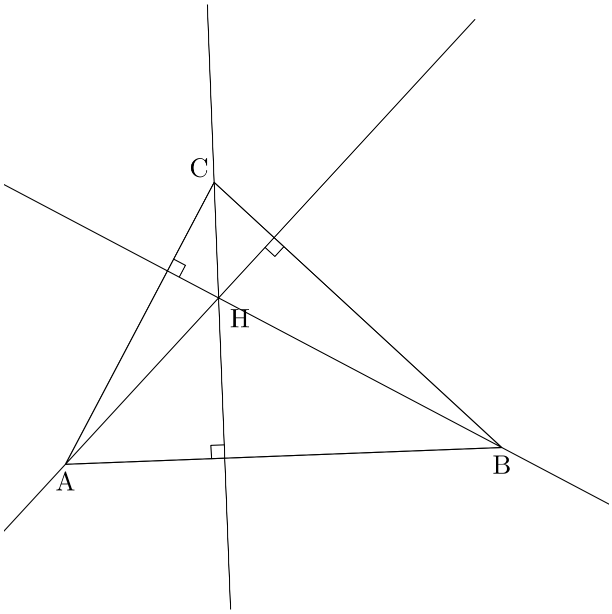
Soit ABC un triangle quelconque.

1. Constuis les bissectrices des ansgles $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BAC}$. Que remarques-tu ?[a]
2. Soit I le point d'intersection des bissectrices. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par I coupe la droite (AB) en P.
   Trace le cercle de centre I et de rayon IP. Que remarques-tu ?

[a] On admettra ce résultat dans le cahier de leçons.

12.2. Cours

12.2.1 Les hauteurs

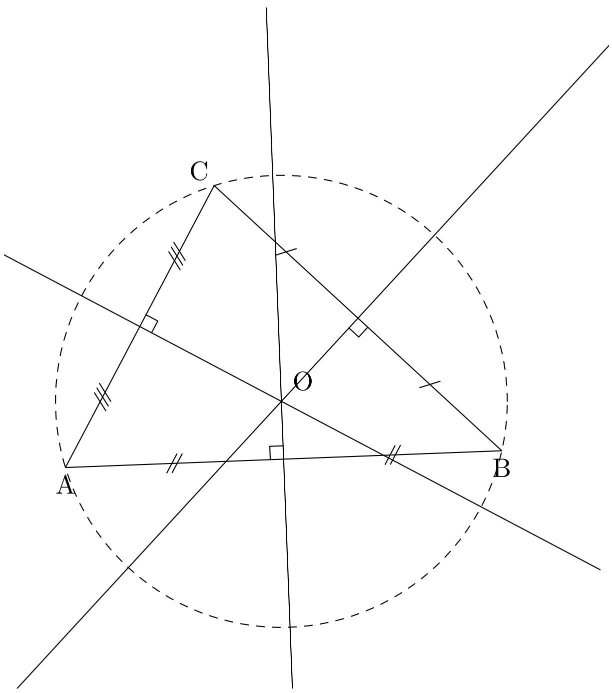


Dans un triangle, une *hauteur* est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Notation : Dans le triangle ABC, si la hauteur passe par le sommet A on dit alors *hauteur issue de A*.

Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point H appelé *orthocentre* du triangle.

12.2.2 Les médiatrices

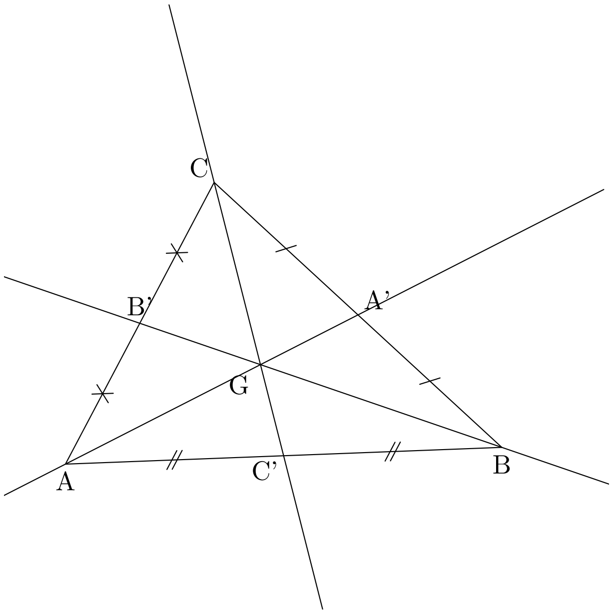


La *médiatrice d'un segment* est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu. Les médiatrices dans un triangle sont donc les médiatrices des côtés de ce triangle.

Si M est un point de la médiatrice du segment $[AB]$ alors M est équidistant de A et de B c'est à dire $MA = MB$.
Si M est équidistant de A et de B alors M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

Dans un triangle, les médiatrices sont concourantes en un point O appelé *centre du cercle circonscrit* au triangle.

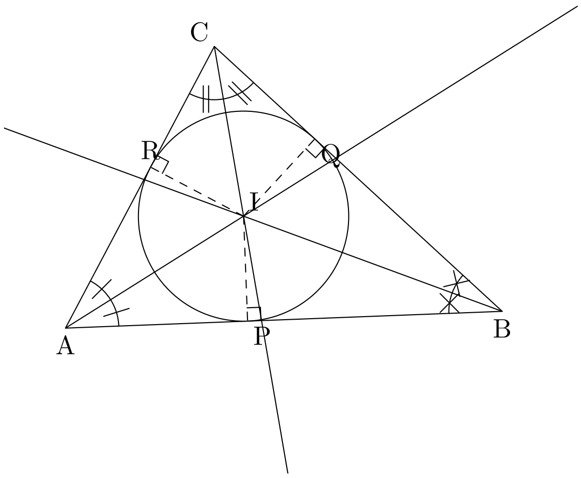
12.2.3 Les médianes



Dans un triangle, une *médiane* est une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.

Dans un triangle, les médianes sont concourantes en un point G appelé *centre de gravité* du triangle.
De plus, on a $AG = \frac{2}{3}AA'$, $BG = \frac{2}{3}BB'$, $CG = \frac{2}{3}CC'$

12.2.4 Les bissectrices.



La *bissectrice d'un angle* est la droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure. C'est également l'axe de symétrie de cet angle.

Dans un triangle, les bissectrices sont concourantes en un point I appelé *centre du cercle inscrit* au triangle.
De plus, $IP = IQ = IR$

12.3. Exercices

⋆

Exercice 1 – geometrique/droites/exoa1

Les 3 questions sont indépendantes.

1. (a) Construis un triangle ECG tel que $EC = 7\,cm$, $CG = 6\,cm$, et $GE = 3\,cm$.
   (b) Construis la hauteur (d) issue de G dans le triangle ECG.
   (c) Construis la hauteur (d') issue de E dans le triangle ECG.
   (d) Que représente le point d'intersection des droites (d) et (d') ?
2. (a) Construis un triangle ERL tel que $ER = 6\,cm$, $RL = 5\,cm$ et $\widehat{ERL} = 60°$.
   (b) Construis la médiane (d) issue de R dans le triangle ERL.
   (c) Construis la médiane (d') issue de L dans le triangle ERL.
   (d) Que représente le point d'intersection des droites (d) et (d') ?
3. (a) Contruis un triangle SER tel que $SE = 6\,cm$, $\widehat{RSE} = 50°$, $\widehat{RES} = 60°$.
   (b) Construis son cercle inscrit

Exercice 2 – geometrique/droites/exoa2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 10\,cm$, $BC = 11\,cm$ et $CA = 12\,cm$.

1. Construis l'orthocentre H du triangle ABC.
2. (a) Soit I le point d'intersection des droites (AH) et (BC) ; J le point d'intersection des droites (BH) et (CA) ; K le point d'intersection des droites (CH) et (AB).
   Construis le centre du cercle inscrit au triangle IJK.
   (b) Que constate-t-on ?

Exercice 3 – geometrique/droites/exoa3

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Le point E est le milieu du segment $[AB]$ et les segments $[AC]$ et $[DE]$ se coupent en G.

1. (a) Que représente le segment $[AO]$ pour le triangle ABD ? Justifie.
   (b) Que représente le point G pour le triangle ABD ? Justifie.
2. Démontre que la droite (BG) coupe le segment $[AD]$ en son milieu.

⋆⋆

Exercice 4 – geometrique/droites/exob1

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 10cm$ et M un point du segment $[AB]$ tel que $BM = 3\,cm$. Soit R un point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $BR = 7\,cm$. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par M coupe la droite (AR) en S.
Démontre que les droites (AL) et (SB) sont perpendiculaires.

Exercice 5 – geometrique/droites/exob2

ABC est un triangle rectangle en A. Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A coupe la droite (BC) en H. Le point I est le milieu du segment $[HB]$ et le point J est le milieu du segment $[AH]$.

1. Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
2. Prouve que les droites (IJ) et (AC) sont perpendiculaires.
3. Déduis-en que les droites (CJ) et (AI) sont perpendiculaires.

Exercice 6 – geometrique/droites/exob3

1. Construis un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A et B. Construis le symétrique L du point A par rapport au point M.
2. Soit I le point d'intersection des droites (LO) et (BM). Que représente le point I pour le triangle LAB ? Justifie la réponse.
3. La droite (AI) coupe le segment $[LB]$ en J. Que peut-on dire du point J ? Pourquoi ?

Exercice 7 – geometrique/droites/exob4

Soit ABC un triangle et D, E, F les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $EDFC$? Justifie.
   (b) Démontre que la droite (DC) est à la fois une médiane du triangle ABC et du triangle EFD.
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   Démontre que G est aussi le centre de gravité du triangle EFD.

Exercice 8 – geometrique/droites/exob5

Construis un parallélogramme $ABCD$ de centre O.
Soit E le symétrique de B par rapport à C. La droite (EO) coupe la droite (CD) en F. Soit G le point d'intersection des droites (BF) et (ED).

1. Quel est le centre de gravité du triangle BDE ? Justifie la réponse.
2. Déduis-en que G est le milieu du segment $[ED]$.

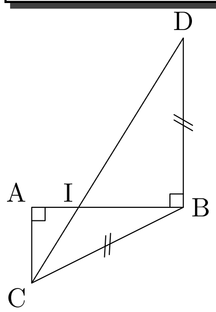
⋆ ⋆ ⋆

Exercice 9 – geometrique/droites/exoc1

Trace un triangle ART tel que $AR = 4,5\,cm$, $RT = 5,3\,cm$ et $AT = 2,8\,cm$.
Place le point L, symétrique de T par rapport à A.

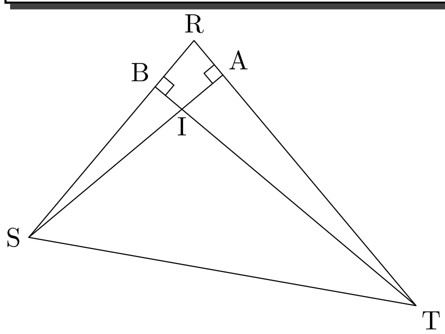
1. Quelle est la nature du triangle ART ?
2. Quelle est la nature du triangle LTR ?
3. Trace la médiane issue de T dans le triangle LTR. Elle coupe le segment $[AR]$ en F. Calcule la longueur AF.
4. Place le point M, symétrique de F par rapport à A. Quelle est la nature du quadrilatère $LFTM$?
5. Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère $LFTM$ et l'aire $\mathcal{B}$ du quadrilatère $LMTR$. Vérifie que $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{B}}{2}$.

Exercice 10 – geometrique/droites/exoc2



Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A. Les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires et $BC = BD$.
Démontrer que la demi-droite $[CD)$ est une bissectrice du triangle ABC.

Exercice 11 – geometrique/droites/exoc3

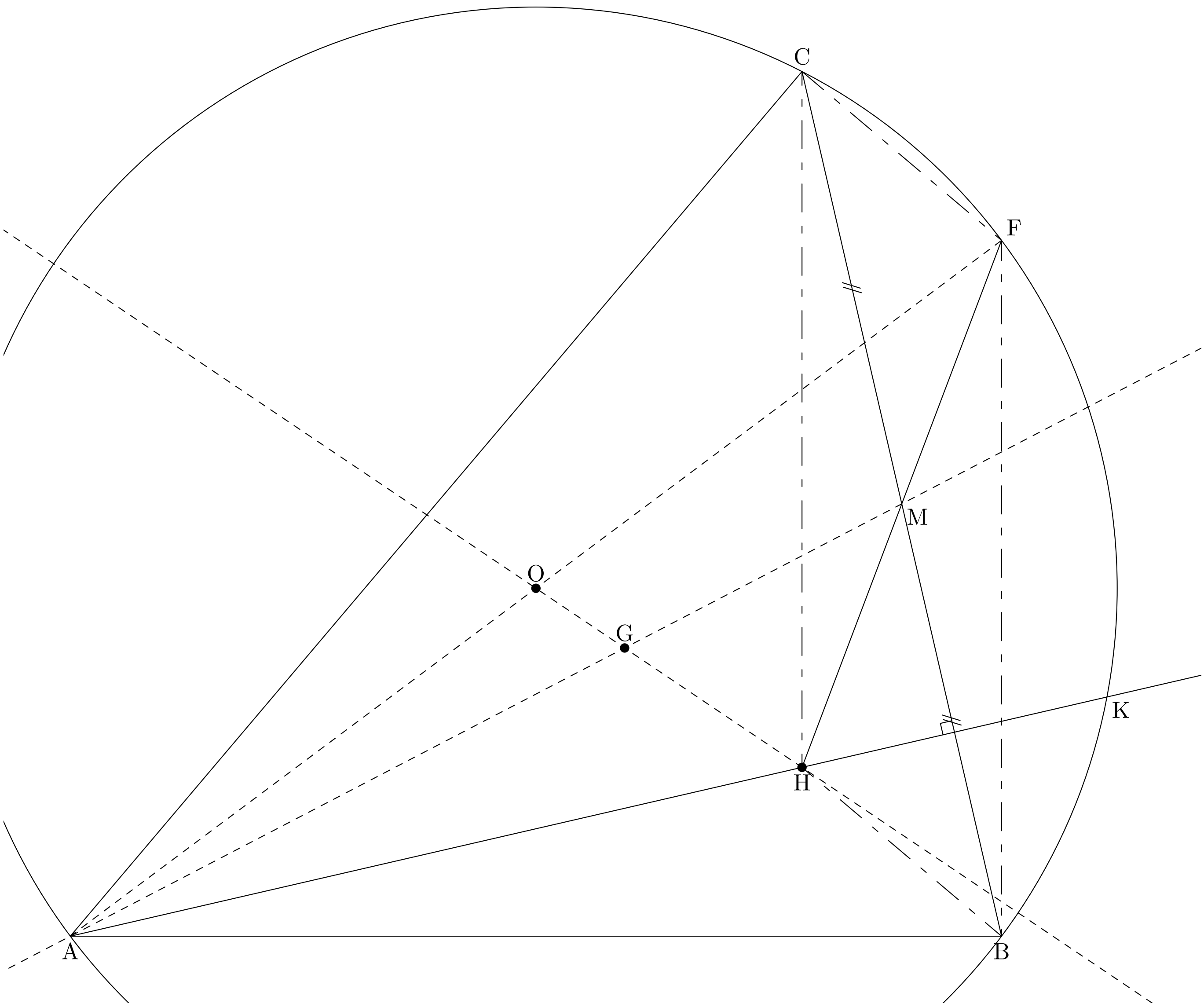


On considère la figure ci-contre dans lequel $[TB]$ et $[SA]$ sont deux hauteurs sécantes en I. On donne de plus $SR = 6,8\,cm$; $BR = 2,8\,cm$; $ST = 10,4\,cm$.

1. (a) Que représente le point I pour le triangle RST ? Justifie la réponse.
   (b) Déduis-en que les droites (RI) et (ST) sont perpendiculaires.
2. Calcule les longueurs SB ; BT ; RT.
3. Soit D le centre de gravité du triangle SAT.
   (a) Place le point D sur la figure ci-dessus et appelle J le milieu du segment $[ST]$.
   (b) Justifie l'égalité $AJ = SJ$.
   (c) Déduis-en la longueur AD.

12.4. Approfondissement

12.4.1 Droite d'Euler

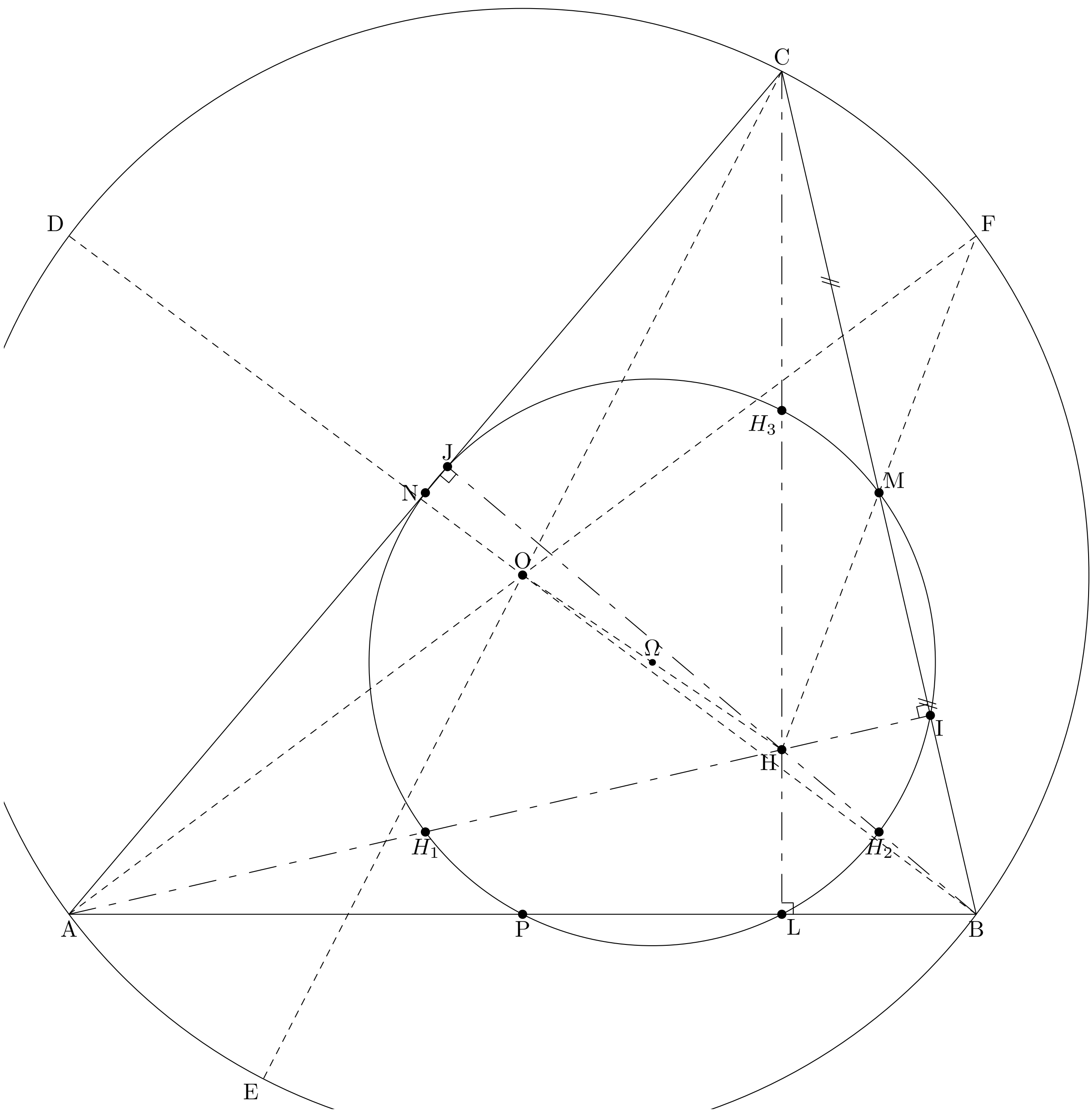


Construction

1. Soit ABC un triangle supposé non équilatéral.
2. Soit O le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC.
3. Soit F le point diamètralement opposé à A.
4. Soit K le point d'intersection de la hauteur issue de A avec le cercle $(\mathcal{C})$
5. Soit M le milieu du segment $[BC]$.
6. Soit H le point d'intersection des droites (FM) et (AK).
7. Soit G le point d'intersection des droites (OH) et (AM).

1. Montre que les triangles AFK et AFC sont rectangles.
2. (a) Montre que la droite (OM) est la médiatrice du segment $[BC]$.
   (b) Montre que les droites (OM) et (AK) sont parallèles.
3. (a) Montre que M est le milieu du segment $[HF]$.
   (b) Montre que le quadrilatère $BHCF$ est un parallélogramme.
4. (a) Montre que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
   (b) Montre que H est l'orthocentre du triangle ABC.
5. (a) Montre que G est le centre de gravité du triangle AHF.
   (b) Quelle est la position remarquable de G sur le segment $[OH]$?
   (c) Montre que G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

12.4.2 Cercle d'Euler ou cercle des neuf points



Construction

1. On reprend la construction précédente.
2. On appelle Ω le milieu du segment $[OH]$; N et P les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$; D et E le symétriques respectifs de B et C par rapport à O ; I, J, L les points d'intersection respectifs entres la hauteur issue de A et la droite (BC), la hauteur issue de B et la droite (AC), la hauteur issue de C et la droite (AB) ; H_1, H_2, H_3 les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.

Démonstration

Démontre que les points M, N, P, I, J, L, H_1, H_2 et H_3 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Indication : *On cherchera par expérimentation quel pourrait être le centre de ce cercle et on déterminera ensuite la valeur du rayon à l'aide d'un des points.*
Restera ensuite à prouver que tous les autres points donnent la même valeur du rayon.
Chose « simple » pour les points M, N, P, H_1, H_2, H_3. Pour le point I, on pourra considérer la parallèle à la droite (AH) passant par Ω et démontrer qu'elle coupe le segment $[IM]$ en son milieu.

Chapitre 13

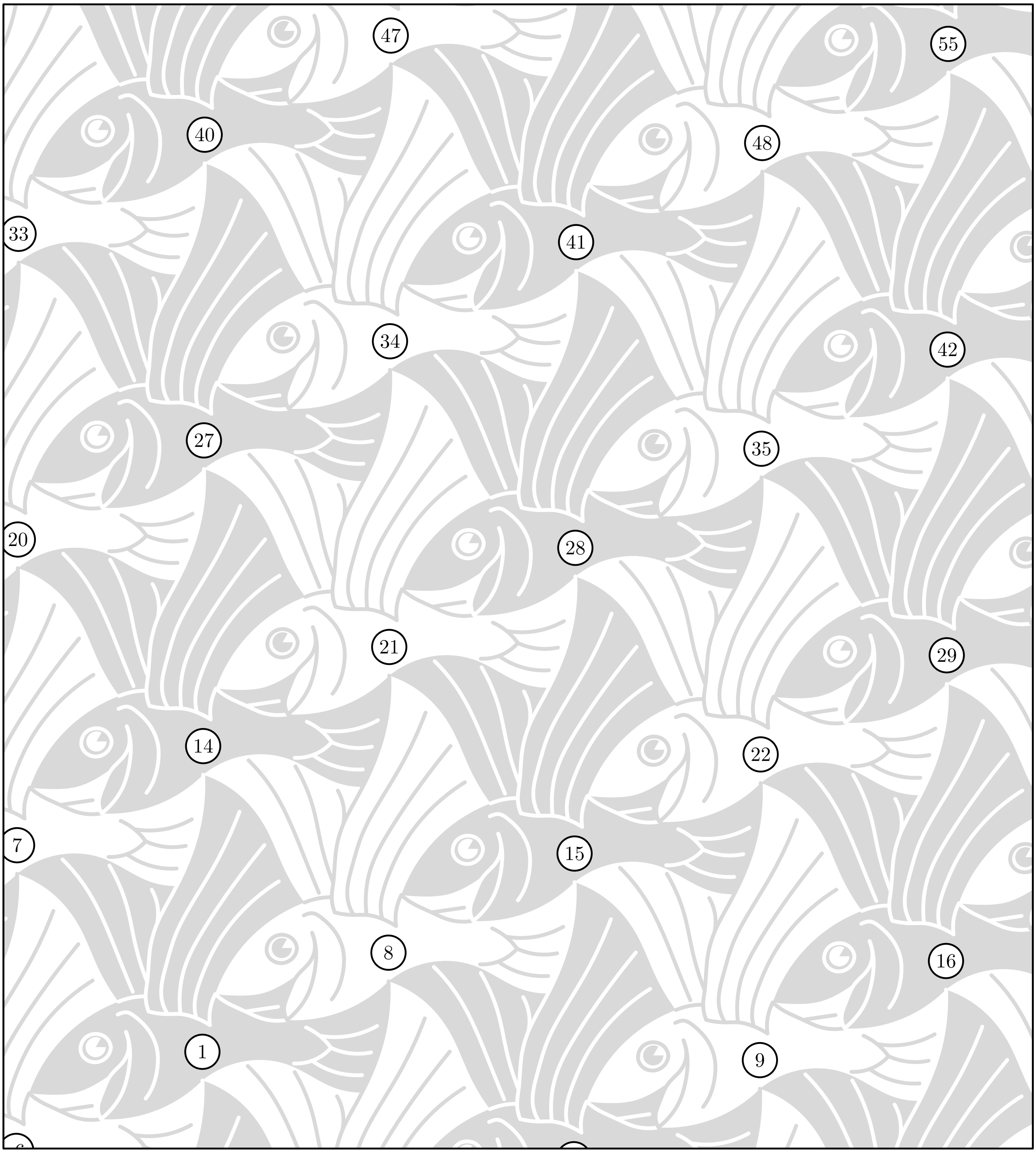
Translations

Sommaire

13.1 Activités **111**
13.1.1 Notion de translation 111
13.1.2 Image d'une droite par une translation 112
13.2 Cours **113**
13.2.1 Définitions 113
13.2.2 Propriétés 113
13.3 Exercices **115**

13.1. Activités

13.1.1 Notion de translation



La figure ci-dessus représente *un pavage* : c'est un motif qui recouvre entièrement une surface. Ici, le pavage est constitué d'un unique motif : un poisson.

1. Reproduis sur papier calque le motif principal.
2. A l'aide du papier calque, réponds aux questions suivantes :
   (a) quel déplacement doit effectuer le papier calque pour aller du poisson 14 au poisson 28 ?

(b) quel déplacement doit effectuer le papier calque pour aller du poisson 40 au poisson 28 ?

(c) quel déplacement doit effectuer le papier calque pour aller du poisson 14 au poisson 22 ?

Ces différents déplacements s'appellent <u>des translations</u>.

13.1.2 Image d'une droite par une translation

Soit deux points distincts A et B et une droite (d) non parallèle à la droite (AB).

1. Construis l'image de la droite (d) par la translation qui transforme A en B. (On pourra choisir deux points sur la droite (d) et construire leur image respectives M' et N'.)
2. Quelle remarque peut-on faire ?

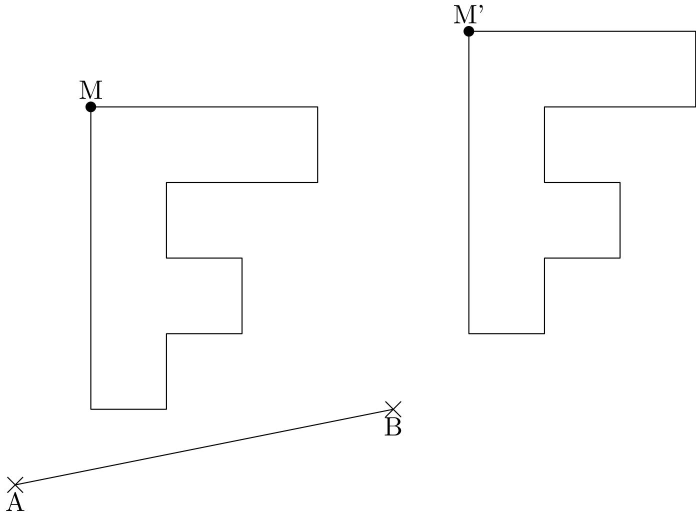
Il semble que...

3. Comment prouver cette remarque ? Soit I le point d'intersection des diagonales du quadrilatère $ABM'M$ et J le point d'intersection des diagonales du quadrilatère $ABN'N$.
   (a) Que peut-on dire des points I et J ? Justifie.
   (b) Démontre que les droites (MN) et (IJ) sont parallèles.
   (c) Démontre que les droites $(M'N')$ et (IJ) sont parallèles.
   (d) Que peut-on dire des droites (MN) et $(M'N')$? Justifie.

13.2. Cours

13.2.1 Définitions

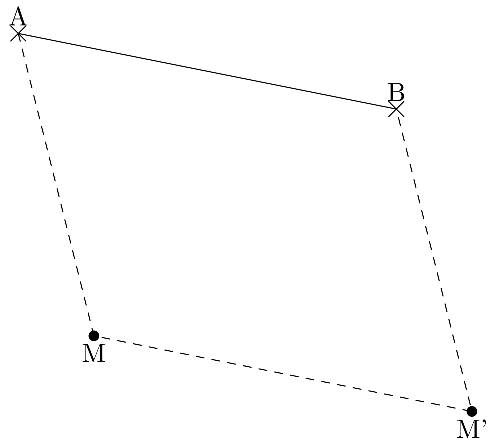
Le *glissement rectiligne* qui permet de déplacer la figure $\mathcal{F}$ du point A au point B s'appelle ***la translation qui transforme A en B.***



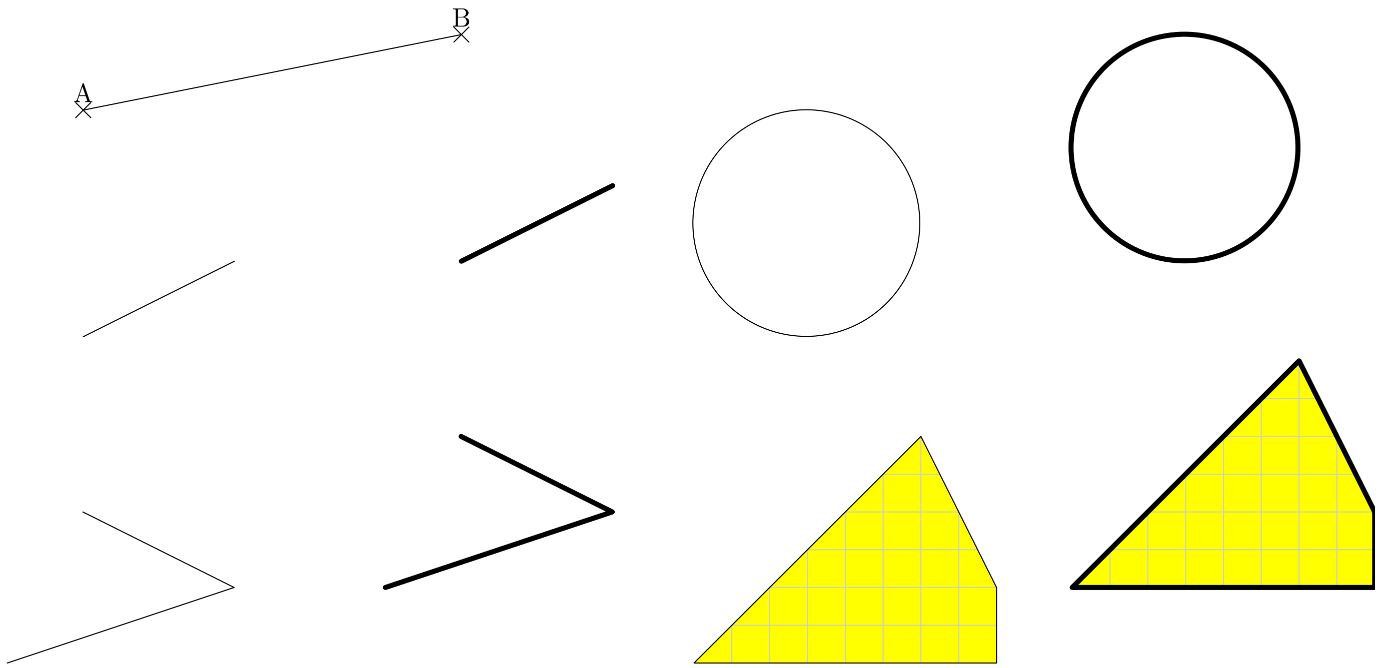
Si la translation qui transforme A en B transforme M en M', on dit que M' est le **translaté** de M par la translation qui transforme A en B. On dit également que M' est **l'image** de M par la translation qui transforme A en B.

13.2.2 Propriétés

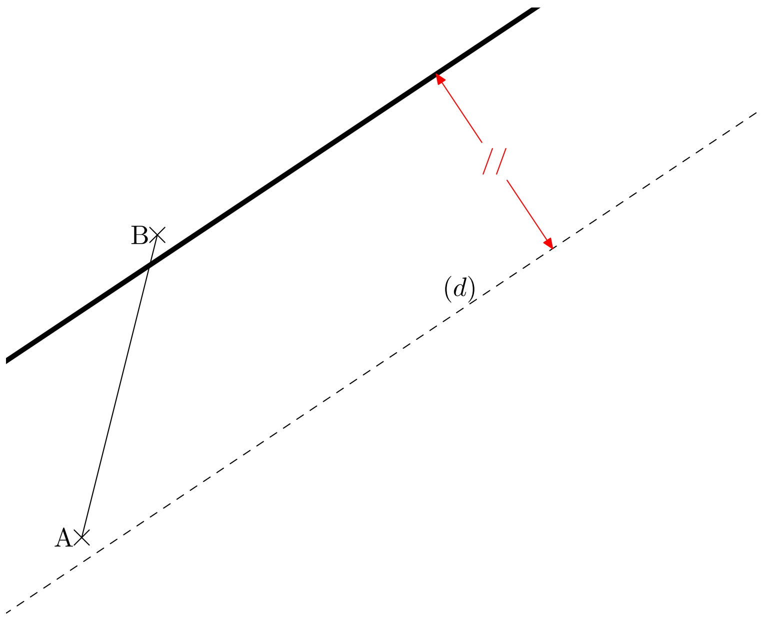
Dire que M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme.



Par une translation :
- l'image d'un segment est un segment de même longueur.
- L'image d'un angle est un angle de même mesure.
  Cas particulier : L'image de deux droites perpendiculaires est deux droites perpendiculaires.
- L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
- L'image d'une figure est une figure de même aire.



L'image d'une droite (d) par une translation est une droite parallèle à la droite (d).



13.3. Exercices

Exercice 1 – geometrique/translation/exoa1

Construis un rectangle, une droite (d) qui coupe le rectangle en deux points (un sur la longueur, un sur la largeur) et A et B deux points distincts situés à l'extérieur du rectangle. Trace

1. en vert, l'image du rectangle par la translation qui transforme A en B.
2. en bleu, l'image du rectangle par la symétrie d'axe (d).
3. en rouge, l'image du rectangle pat la symétrie de centre A.

Exercice 2 – geometrique/translation/exoa2

1. Trace un rectangle $EFGH$ dont la longueur mesure le double de la largeur.
2. Trace les axes de symétries de ce rectangle : ils coupent $[EF]$ et $[HG]$ respectivement en C et D.
3. Trace les diagonales $[FH]$ et $[EG]$: elles se coupent en O.
4. Trace, en rouge, l'image du triangle EOH par la translation qui transforme F en G.
5. Trace, en vert, l'image du triangle FOG par la translation qui transforme D en O.
6. Quelle est l'image du segment $[FD]$ par la translation qui transforme D en C ?
7. Quelle est l'image de la droite (EF) par la translation qui transforme E en D ?
8. Quelle est l'image du cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon CE par la translation qui transforme E en F ?

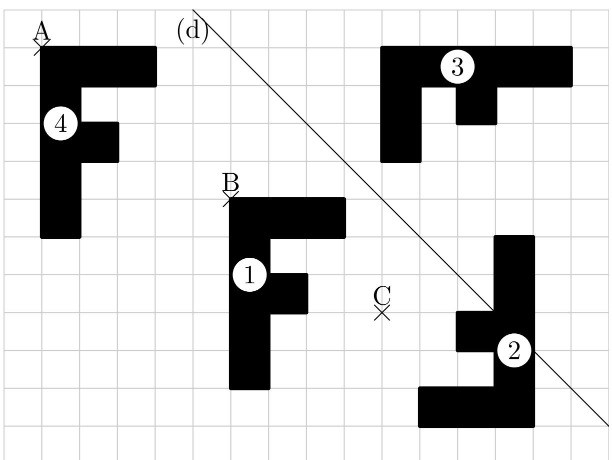
Exercice 3 – geometrique/translation/exoa3

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AD]$ et $[BC]$ et $ABJD$ est un parallélogramme.
B est le milieu du segment $[AP]$ et $APHD$ est un parallélogramme.
L est l'image de C par la translation qui transforme D en J.

1. Fais une figure.
2. Quelle est l'image de B par la translation qui transforme A en B ?
   Quel point a pour image J par la même translation ?
3. D se translate en H : quelle est l'image de A par cette translation ?
   C est le translaté de D : quel point a pour image L par cette translation ?
4. Trouve des points qui se correspondent dans la trnaslation qui transforme H en L.

Exercice 4 – geometrique/translation/exoa4

On dispose du document suivant :



En utilisant des transformations dont on précisera tous les éléments caractéristiques, recopie et complète les phrases suivantes :

– La figure 2 est l'image de la figure 1 par ....
– La figure 3 est l'image de la figure 1 par ....
– La figure 4 est l'image de la figure 1 par ....

⋆⋆

Exercice 5 – geometrique/translation/exob1

On effectuera la figure sur une feuille blanche sans quadrillage.

Soit A et B deux points distincts et (MN) une droite non parallèle à la droite (AB).

1. Construis les points M' et N', images respectives des points M et N, par la translation qui transforme A en B.
2. (a) Pourquoi $ABM'M$ est un parallélogramme ?
   Soit I son centre. Précise sa position.
   (b) Pourquoi $ABN'N$ est un parallélogramme ?
   Soit J son centre. Précise sa position.
   (c) Déduis-en que les droites (MM') et (NN') sont parallèles.
3. (a) Prouve que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
   (b) Prouve que les droites (IJ) et $(M'N')$ sont parallèles.
   (c) Déduis-en que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.
4. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $MM'N'N$? Justifie la réponse.
   Par quelle translation, N' est-il l'image de N ? Justifie la réponse.
   (b) Prouve que $MN = M'N'$.

Exercice 6 – geometrique/translation/exob2

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AC = 3\,cm$ et A' un point extérieur au triangle ABC.

1. (a) Calcule les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
   (b) Calcule l'aire du triangle ABC.
2. (a) Construis les images B', C' respectives des points B et C par la translation qui transforme A en A'.
   (b) En justifiant les réponses :
   – quelles sont les longueurs des segments $[A'C']$ et $[A'B']$?
   – quelles sont les mesures des angles $\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{A'B'C'}$?
   – Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$?

Exercice 7 – geometrique/translation/exob3

On fera la figure sur feuille blanche.

Soit un triangle ABC tel que $AB = 5\,cm$, $AC = 7\,cm$ et $BC = 9\,cm$.

1. On considère la translation t_1 qui transforme B en C. Construis l'image $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par t_1.
2. Que remarque-t-on ? Prouve-le.
3. On considère la translation t_2 qui transforme B en A. Construis l'image $A_2B_2C_2$ du triangle ABC par t_2.
4. Que remarque-t-on ? Prouve-le.
5. Montre que $ABCA_1$ et ACC_1A_1 sont des parallélogrammes. Déduis-en que $C_2 = A_1$.
6. Montre que C est le milieu du segment $[BC_1$ et que A est le milieu du segment $[A_2B]$.

Exercice 8 – geometrique/translation/exob4

Soit ABC un triangle tel que $AB = 5\,cm$, $AC = 6\,cm$ et $BC = 7\,cm$.

1. Construis les points M et N images respectives des points A et B par la symétrie de centre C.

2. Démontre que $ABMN$ est un parallélogramme. Quelle est l'image de N par la translation qui transforme A en B ?

3. Construis le point K, image de C par la translation qui transforme A en B. Démontre que le quadrilatère $NMKC$ est un parallélogramme.

⋆⋆⋆

Exercice 9 – geometrique/translation/exoc1

$ABCD$ est un rectangle, M un point du plan tel que M n'appartienne pas à la droite (AB).

1. La perpendiculaire à la droite (AM) passant par C coupe la droite (AM) en C', La perpendiculaire à la droite (BM) passant par D coupe la droite (BM) en D', La perpendiculaire à la droite (AB) passant par M coupe la droite (AB) en M'.
   Vérifie que les droites (MM'), (CC'), (DD') sont concourantes.

2. *Les questions suivantes ont pour but d'établir ce résultat.*
   Soit t la translation qui transforme C en B. Quelle est l'image de la droite (MM') par la translation t ?
   Montre que l'image (Δ') de la droite (CC') par la translation t est la hauteur issue de B dans le triangle ABM. Montrer de même que l'image (Δ'') de la droite (DD') par la translation t est la hauteur issue de A dans le triangle ABM.
   Déduis-en que les droites (MM'), (Δ') et (Δ'') sont concourantes.

3. Soit t' la translation qui transforme B en C. Détermine l'image par t' des droites (MM'), de (Δ') et de (Δ'').
   Déduis-en que les droites (MM'), (CC') et (DD') sont concourantes.

Chapitre 14

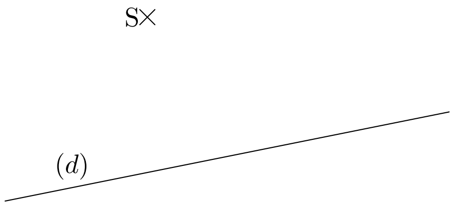
Distance, droite et cercle

Sommaire

14.1 Activités **119**
14.1.1 Distance d'un point à une droite 119
14.1.2 Intersection d'une droite avec un cercle 119
14.2 Cours **120**
14.2.1 Distance d'un point à une droite 120
14.2.2 Tangente à un cercle 120
14.3 Exercices **121**

14.1. Activités

14.1.1 Distance d'un point à une droite



Sur la figure ci-contre, la droite (d) représente une canalisation d'eau et le point S est la sortie d'un robinet. On cherche, bien évidemment, à relier le point S à la droite (d).

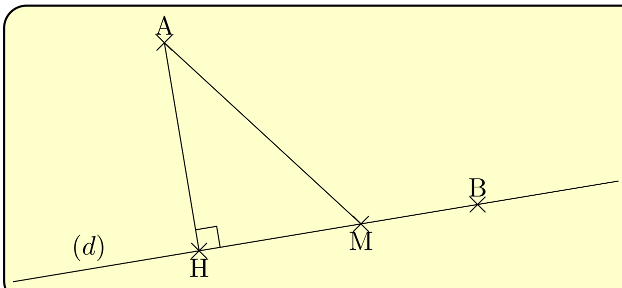
1. Place des points M, N et P sur la droite (d). Ces points répondent au problème posé.
2. On cherche maintenant à ce que le chemin reliant le point S à la canalisation soit le plus court possible.
   (a) Place un point qui pourrait réaliser cette condition.
   Quelle construction permet de placer ce point ?
   (b) Il reste maintenant à démontrer que ce point répond bien au problème.
   Construisons le point T symétrique de S par rapport à la droite (d).
   Justifie alors les points de démonstrations suivants :
   - .... alors $AB < AM + MB$
   - .... alors $AB = 2 \times AB$
   - .... alors $AM = MB$
   - ....
   - ....

14.1.2 Intersection d'une droite avec un cercle

On considère une droite (d) et un cercle de centre O et de rayon r. On veut déterminer le nombre de points d'intersection entre cette droite (d) et le cercle.

1. Combien de cas différents existe-t-il ? Fais une figure dans chacun des cas.
2. Dans chacun des cas, compare le rayon du cercle à la distance du point O à la droite (d).

14.2.1 Distance d'un point à une droite



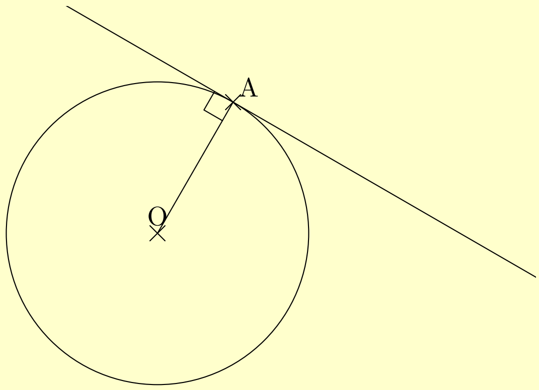
Soit (d) une droite et A un point. La perpendiculaire à la droite (d) passant par A coupe la droite (d) en H.
La longueur AH s'appelle **la distance du point A à la droite** (d).

Remarques : Si M appartient à la droite (d) mais différent de H alors $AM > AH$.

Si $M \in (d)$ et $M \neq H$ alors $AM > AH$

Si B appartient à la droite (d) alors la distance de B à la droite (d) est nulle.

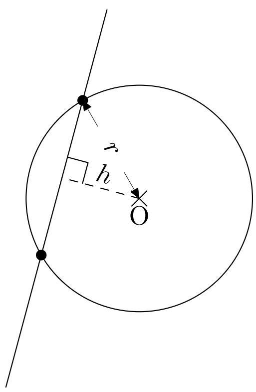
14.2.2 Tangente à un cercle



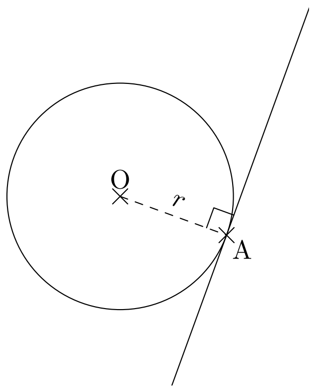
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point du cercle $\mathcal{C}$.
La tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A est la droite (d) perpendiculaire en A à la droite (OA).

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r, et (d) une droite quelconque. Appelons h la distance du point O à la droite (d). Alors

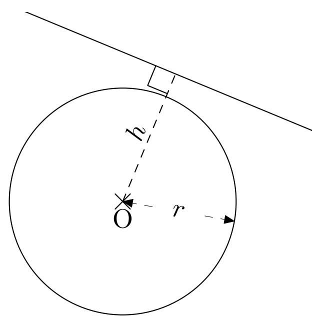
Si $h < r$ alors la droite (d) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points.



Si $h = r$ alors la droite (d) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en 1 point A : (d) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.



Si $h > r$ alors la droite (d) ne coupe pas le cercle $\mathcal{C}$.



14.3. Exercices

— ⋆ —

Exercice 1 – geometrique/tangente/exoa1

1. Construis un triangle ABC avec $AC = 6cm$, $\widehat{BAC} = 52°$, $\widehat{ACB} = 38°$.
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$?
3. Trace le cercle de centre A et de rayon AB.
4. Explique pourquoi la droite (BC) est tangente à ce cercle en B.

Exercice 2 – geometrique/tangente/exoa2

1. (a) Trace une droite d et place un point M à $3\,cm$ de la droite d.
   (b) Peux-tu placer un autre point N situé à $3\,cm$ de la droite d ?
   (c) Trace les droites où se trouvent tous les points situés à $3\,cm$ de d.
2. Trace une droite d et marque un point A sur d. Trouve les emplacements possibles d'un point M situé à $5\,cm$ du point A et à $3\,cm$ de d. Explique ta façon de faire.

— ⋆⋆ —

Exercice 3 – geometrique/tangente/exob1

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O ; une droite (d) coupe ce cercle en 2 points A et B ; I est le milieu du segment $[AB]$.

1. Faire une figure.
2. Pourquoi la droite (OI) est la médiatrice du segment $[AB]$?
3. En déduire que la droite (d) est la tangente au cercle de centre O et de rayon OI.

Exercice 4 – geometrique/tangente/exob2

On considère un point A sur une droite (d) et un point B extérieur à la droite (d). On note (d_1) la médiatrice du segment $[AB]$ et (d_2) la perpendiculaire à la droite (d) passant par A.

1. Fais une figure.
2. Les droites (d_1) et (d_2) se coupent en I et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon IB.
   Pourquoi le point A appartient-il au cercle $\mathcal{C}$?
3. Conclus que la droite (d) est la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A.

— ⋆⋆⋆ —

Exercice 5 – geometrique/tangente/exoc1

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 6\,cm$ et O le centre du cercle $(\mathcal{C})$.
Soit K un point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $\widehat{AOK} = 60°$. Soit C le point de la droite (AB), extérieur au segment $[AB]$, tel que $AC = 2\,cm$.

1. Quelle est la nature du triangle AOK ? Justifie la réponse.
2. La tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en B coupe la droite (CK) en E. La tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A coupe la droite (CK) en D.
   Prouve que les droites (AD) et (BE) sont parallèles.
3. Prouve que $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{1}{4}$.

Chapitre 15

Géométrie dans l'espace

Sommaire

15.1 Activités **123**

15.2 Cours **124**

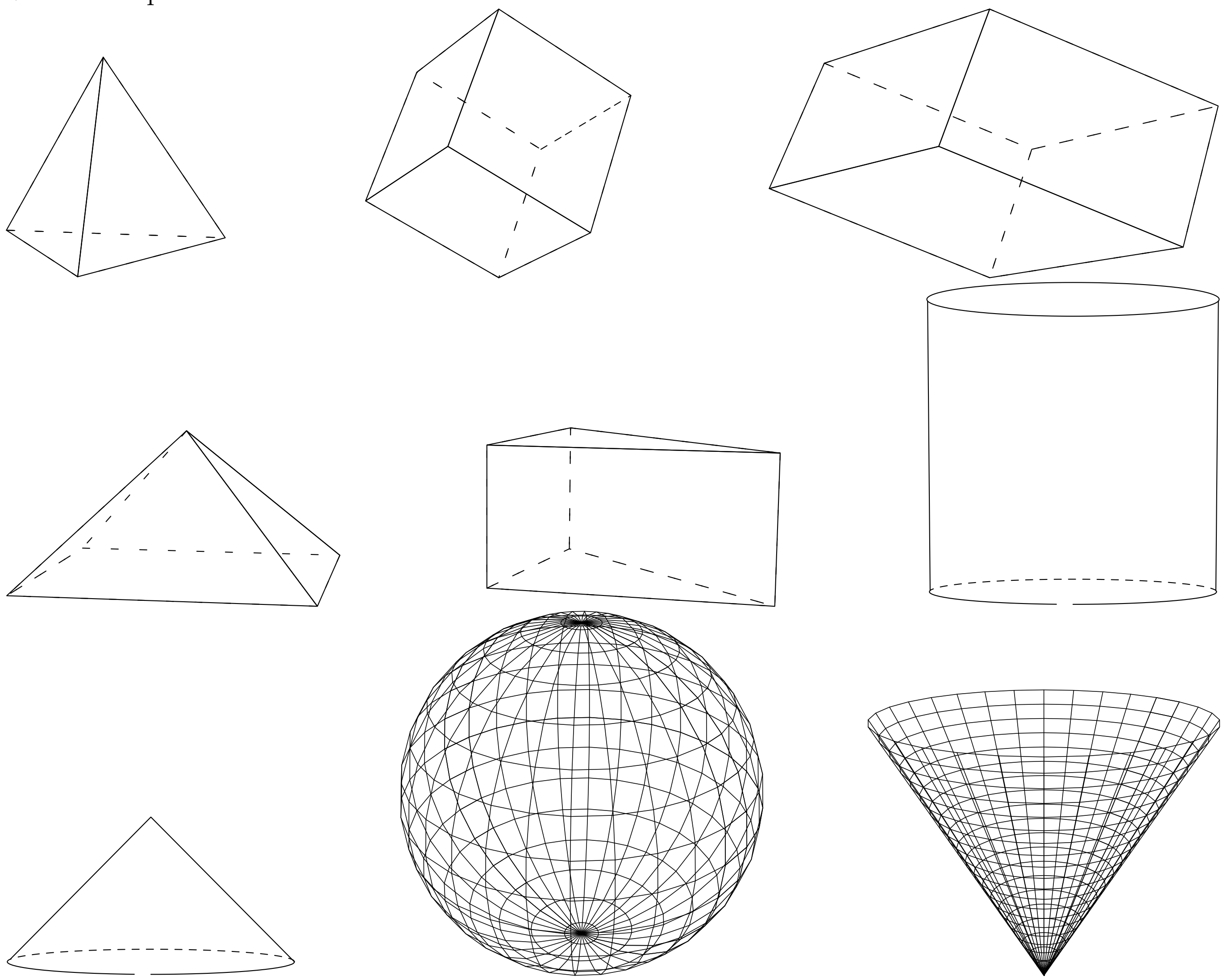
15.2.1 Pyramide 124

15.2.2 Cône de révolution 125

15.3 Exercices **127**

15.1. Activités

Voici des représentations de différents solides connus ou inconnus.



1. Classe ces solides en 2 catégories : les solides connus et les solides inconnus.
2. Pour les solides connus, donne les noms de chacun d'entre eux ainsi que la formule qui permet de calculer leur volume.
3. Pour les solides inconnus, peut-on faire un nouveau rangement ? Si oui, quelles sont les points communs et les différences entre ces « familles » de solides ?

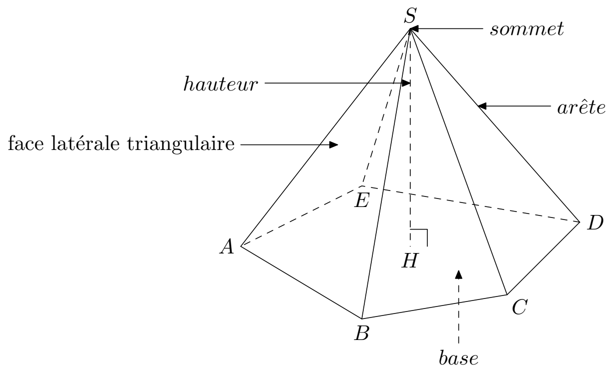
15.2. Cours

15.2.1 Pyramide

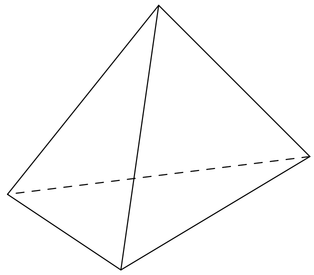
Pyramide de sommet S

Une pyramide est un solide dont :
– une face est un polygone appelé **la base** ;
– toutes les autres faces sont des **triangles** qui ont un sommet commun n'appartenant pas à la base : c'est le **sommet** de la pyramide.
(Ces faces sont appelées **faces latérales**.)

La droite qui passe par le sommet de la pyramide et qui est perpendiculaire à la base est appelée **hauteur** de la pyramide.
La longueur SH est aussi appelée hauteur de la pyramide.



Remarques : Il ne faut pas confondre la hauteur de la pyramide et une hauteur d'une face.

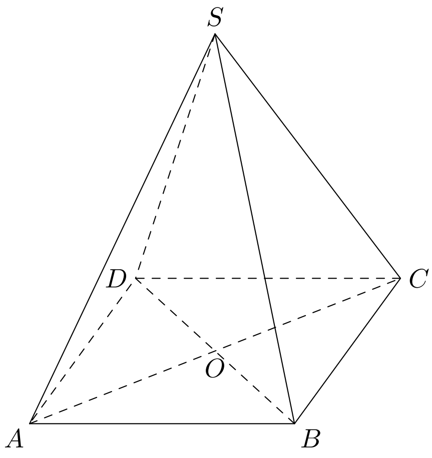

Pyramide à base triangulaire

Cas particuliers : Une pyramide dont la base est un triangle est un **tétraèdre**. Toutes les faces sont donc des triangles donc toutes les faces peuvent être considérées comme des bases.

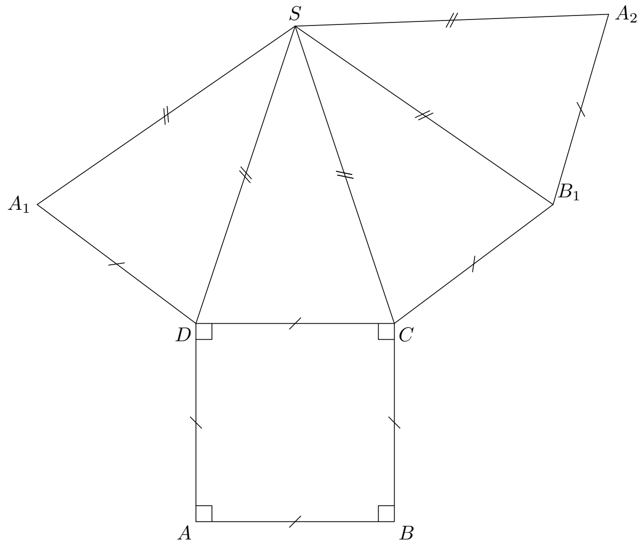
Pyramides régulières

Une pyramide de sommet S est dite **régulière** lorsque :
– sa base est un polygone régulier de centre O : triangle équilatéral, carré ...
– $[SO]$ est la hauteur de la pyramide.

▌ Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles superposables.



ABCD est un carré de centre O

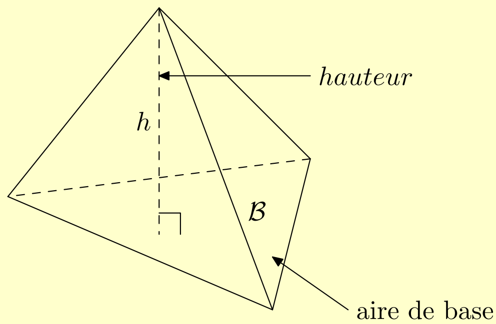


Un patron de la pyramide.
En découpant et en pliant, A, A_1, A_2 coïncident, ainsi que B et B_1.

Volume d'une pyramide

Si une pyramide a une base $\mathcal{B}$ d'aire $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ et une hauteur h alors son volume $\mathcal{V}$ est

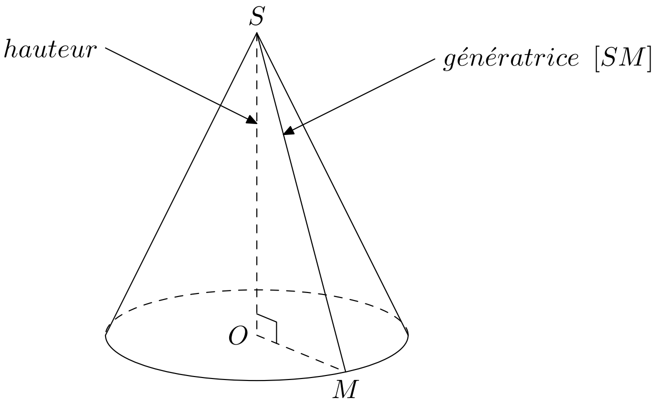
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\mathcal{B}} \times h$$

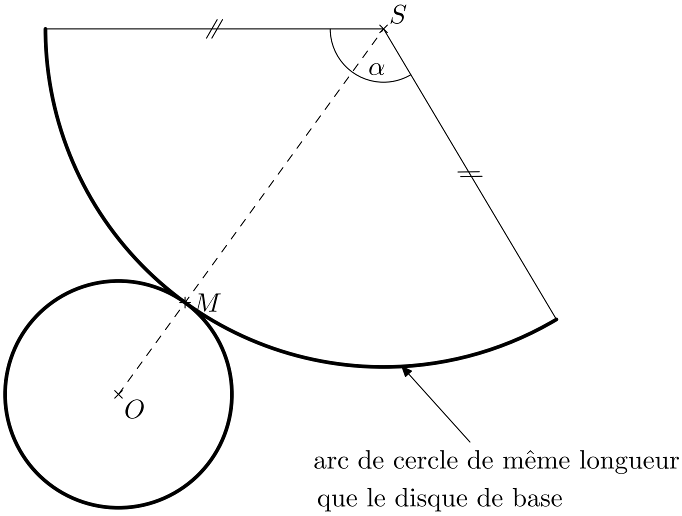


15.2.2 Cône de révolution

Un cône de révolution de sommet S est le solide engendré par la rotation d'un triangle SOM rectangle en O, autour de la droite (SO).
Le disque de centre O et de rayon OM est la base de ce cône.

La hauteur de ce cône est le segment $[SO]$ (la hauteur désigne aussi la longueur SO).
Le segment $[SO]$ est perpendiculaire au plan de la base.

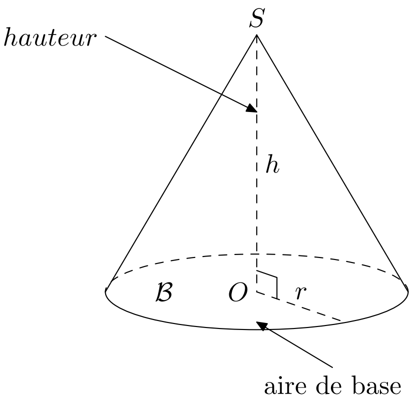




Patron d'un cône
Le patron d'un cône a la forme ci-dessus ; la longueur de l'arc de cercle doit être égale au périmètre du cercle de base.
Il y a **proportionnalité** entre la mesure de l'angle et la longueur de l'arc correspondant.

Volume d'un cône

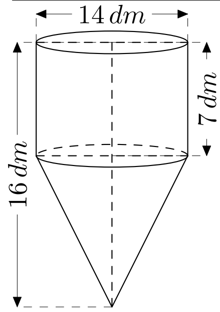
<u>Si</u> un cône a pour base un disque de rayon r et a pour hauteur h <u>alors</u> son volume $\mathcal{V}$ est
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$



15.3. Exercices

—— ⋆ ——

Exercice 1 – geometrique/espace/exo1

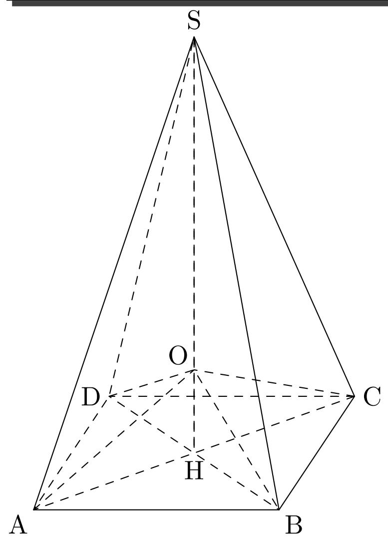


Un réservoir d'eau est constitué d'une partie cylindrique et d'une partie conique.

1/ Donne la valeur exacte du volume de ce réservoir.

2/ Ce réservoir peut-il contenir 1 000 l ? Si oui, à quelle hauteur par rapport au sommet du cône arrivera l'eau ?

Exercice 2 – geometrique/espace/exo2



On considère une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée. On note $[SH]$ sa hauteur et on donne $AH = 12\,cm$ et $AS = 20\,cm$.

1/ Calcule la longueur SH.

2/ Calcule l'angle $\widehat{SAH}$.

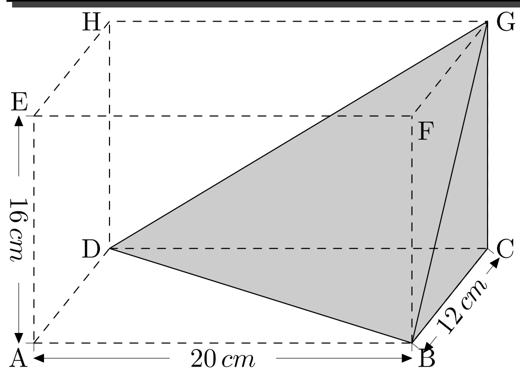
3/ Montre que la longueur AB est égale à $\sqrt{288}\,cm$.

4/ Calcule le volume de la pyramide $SABCD$.

5/ Construis le patron de la pyramide $SABCD$ à l'échelle $\dfrac{1}{4}$.

6/ Soit O le point du segment $[SH]$ tel que $SO = 6\,cm$. On crée ainsi une deuxième pyramide régulière à base carrée.
Calcule le volume de la partie comprise entre les deux pyramides $SABCD$ et $OABCD$.

Exercice 3 – geometrique/espace/exo3



Partie 1 On dispose d'un pavé droit. On extrait de ce pavé droit une pyramide $\mathcal{P}_1$ comme l'indique la figure ci-contre.

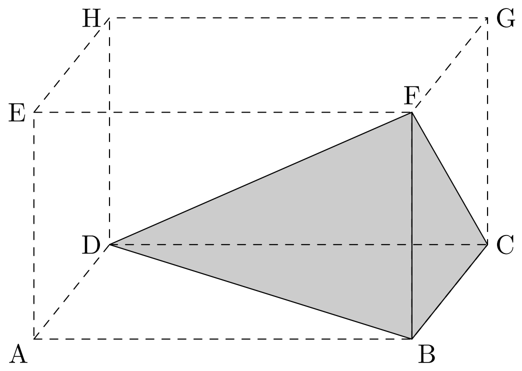
1/ Calcule la longueur DB.

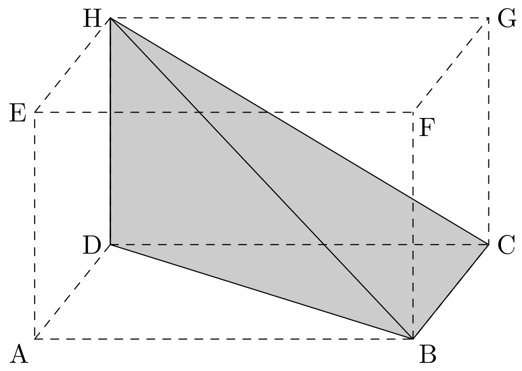
2/ Calcule une mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{CDG}$.

3/ Construis un patron de la pyramide $BDCG$ à l'échelle $\dfrac{1}{4}$.

4/ Calcule le volume de la pyramide $BDCG$. Convertis le résultat en litre.

Partie 2 De deux pavés droits identiques au précédent, on extrait deux nouvelles pyramides $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Laquelle de ces trois pyramides a le plus petit volume ?


H
G
E
F
D
C
A
B


H
G
E
F
D
C
A
B

Troisième partie

Gestion de données

Chapitre 16

Applications de la proportionnalité

Sommaire

16.1 Activités **131**
16.1.1 Représentations graphiques 131
16.1.2 Vitesse moyenne 131
16.2 Cours **132**
16.2.1 Proportionnalité et représentation graphique 132
16.2.2 Vitesse moyenne 132
16.3 Exercices **133**

16.1. Activités

16.1.1 Représentations graphiques

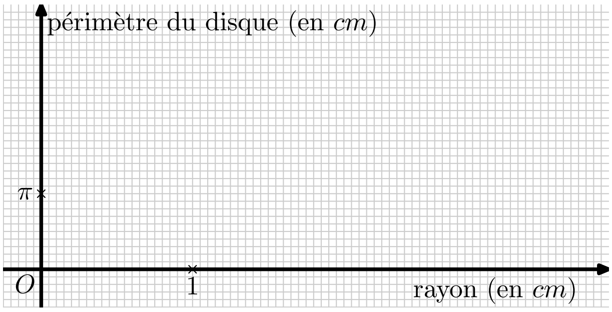
On considère 5 disques de rayons différents (dont un rayon choisi par vous) et on étudie le périmètre et l'aire de ces disques.

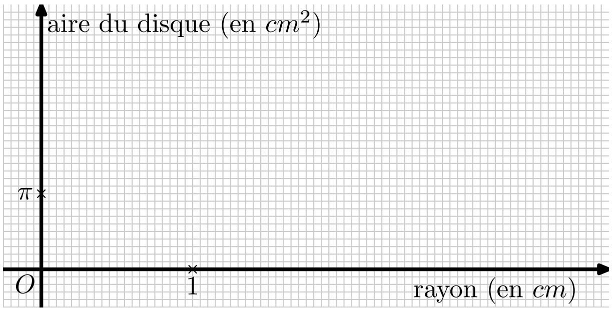
1. Recopie et complète les tableaux suivants.

Disque	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
Rayon (en cm)	0,5	1	1,5	2	...
Périmètre (en cm)					

Disque	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
Rayon (en cm)	0,5	1	1,5	2	...
Aire (en cm^2)					

2. Ces deux situations représentent-elles des situations de proportionnalité ? Justifie les réponses.
3. Représente les données des tableaux ci-dessus en reproduisant les indications ci-dessous.





4. Quel est le graphique qui traduit une situation de proportionnalité ?

16.1.2 Vitesse moyenne

1. Lors de trajets en voiture, beaucoup de conducteurs disent « j'ai roulé à 120 km/h » aujourd'hui. Quelle distance ont-ils alors parcouru en 1 heure ? en 2 heures ? en 3 heures et 15 minutes ?
2. J'ai roulé pendant 45 minutes à 90 km/h et 35 minutes à 72 km/h.
   (a) Quelle a été la durée de mon trajet ?
   (b) Combien de kilomètres ai-je parcouru ?
   (c) Si j'avais fait le trajet sans ralentir et sans freiner, combien de kilomètres aurais-je fait en 1 heure ?

16.2. Cours

16.2.1 Proportionnalité et représentation graphique

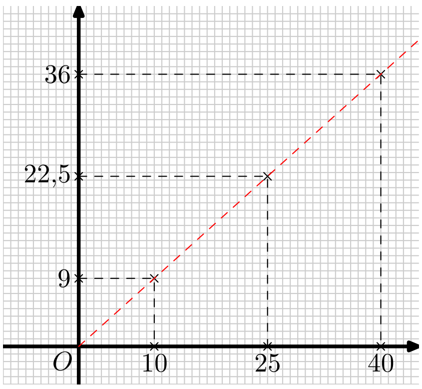
Dans un tableau de nombres, <u>si</u> l'on peut passer des nombres d'une ligne aux nombres de l'autre ligne par une même multiplication <u>alors</u> ce tableau est un tableau de proportionnalité.

3	5	9	$\times 2,5$
7,5	12,5	22,5	

Sur une représentation graphique, on reconnaît une situation de proportionnalité lorsque tous les points sont alignés avec l'origine du repère.

10	25	40
9	22, 5	36

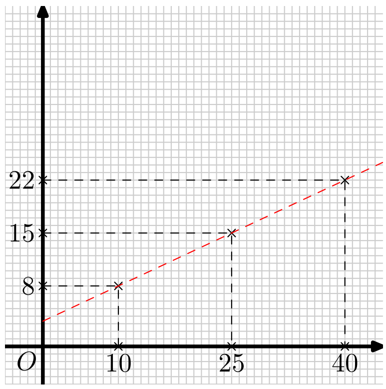
$$\underbrace{\frac{9}{10} = \frac{22,5}{25} = \frac{36}{40}}_{\text{les quotients sont égaux}}$$



PROPORTIONNALITÉ

10	25	40
8	15	22

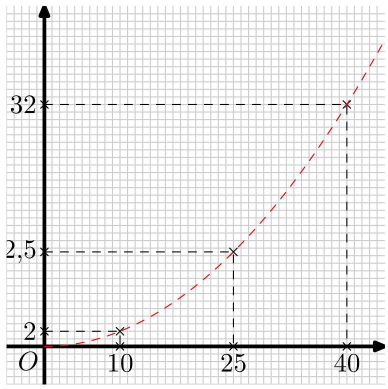
$$\underbrace{\frac{8}{10} \quad \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}}_{\text{les quotients ne sont pas égaux}}$$



NON PROPORTIONNALITÉ

10	25	40
2	12, 5	32

$$\underbrace{\frac{2}{10} \quad \frac{12,5}{25} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}}_{\text{les quotients ne sont pas égaux}}$$



NON PROPORTIONNALITÉ

16.2.2 Vitesse moyenne

<u>Si</u> l'on a parcouru une distance d pendant un temps t <u>alors</u> , sur ce parcours, **la vitesse moyenne** v est le quotient de la distance parcourue d par le temps t du trajet.

$$v = \frac{d}{t}$$

<u>Exemple</u> : En parcourant $120\,km$ en 2 heures, la vitesse moyenne est $\dfrac{120}{2} = 60\,km/h$ ou $60\,km.h^{-1}$.

En parcourant $30\,m$ en 5 secondes, la vitesse moyenne est $\dfrac{30}{5} = 6\,m/s$ ou $6\,m.s^{-1}$.

16.3. Exercices

Exercice 1 – numerique/proportionnalite/exoa1

Dans un collège, il y a 575 élèves. Une enquête a permis d'obtenir les renseignements suivants : 8% des élèves viennent au collège en voiture ; 92 élèves viennent à pied ; $\frac{1}{5}$ des élèves viennent à vélo ; les autres élèves viennent en autobus.

1. Combien d'élèves viennent en voiture ?
2. Calculer le pourcentage d'élèves qui viennent :

   (a) à vélo ; (b) à pied ; (c) en autobus.

Exercice 2 – numerique/proportionnalite/exoa2

Un blouson a un prix réel de 120€.

1. Le vendeur consent à faire une remise de 20% sur le prix réel. Quel est le nouveau prix du blouson ?
2. Le client est encore indécis. Alors le vendeur décide de solder le blouson à 81,6€. Quel pourcentage du prix après la première remise représente la deuxième remise ?
3. Quel pourcentage du prix réel représente le total des deux remises ?
   Que remarque-t-on ?

Exercice 3 – numerique/proportionnalite/exoa3

Pendant ses vacances au Japon, Isabelle a acheté un guide touristique 2 100 yens.« Ce guide me revient à 18,9€ », a-t-elle calculé. Elle souhaite rapporter à sa sœur un magnifique kimono dont le prix affiché est 6 300 yens.
Quel est le prix en euros du kimono ?

Exercice 4 – numerique/proportionnalite/exoa4

A la sortie d'une agglomération, on a relevé, un certain jour, la répartition par tranches horaires des 6 400 véhicules quittant la ville entre 16 heures et 22 heures. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tranche horaire	16h-17h	17h-18h	18h-19h	19h-20h	20h-21h	21h-22h
Nombres de véhicules	1 100	2 000	1 600	900	450	350

Calcule le pourcentage de véhicules quittant la ville entre 16h et 20h.

Exercice 5 – numerique/proportionnalite/exoa5

Sur les 400 indiens de la tribu des Pieds-Bleus, 4% portent un plume. Sur les 96% restants, la moitié en porte deux, l'autre moitié aucune.
Combien y-a-t-il de plumes dans la tribu des Pieds-Bleus ?

Exercice 6 – numerique/proportionnalite/exoa6

Le granit est une roche cristalline formée d'un mélange hétérogène de quatre éléments : quartz, feldspath, biotite et minéraux secondaires.

1. Un bloc de granit est composé de 28% de quartz, 53% de feldspath, 11% de biotite, $19,2\,dm^3$ de minéraux secondaires.
   Calcule le volume de ce bloc.
2. Un mètre cube de ce granit a une masse de 2,6 tonnes.
   Calcule la masse du bloc de granit considéré dans la question 1.

Exercice 7 – numerique/proportionnalite/exoa7

On a suspendu à un ressort différentes masses pour mesurer l'allongement l du ressort. On a obtenu les résultats notés dans le tableau ci-dessous.

masse (g)	100	200	300	400	500	600	700	800
l (cm)	0,6	1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,3	4

1. Sur le papier quadrillé ci-contre, représente graphiquement ces données.
2. A l'aide du graphique, justifie si ce tableau est un tableau de proportionnalité ou non ?
3. Comment peut-on contrôler, à l'aide du tableau, le résultat de la question précédente ?

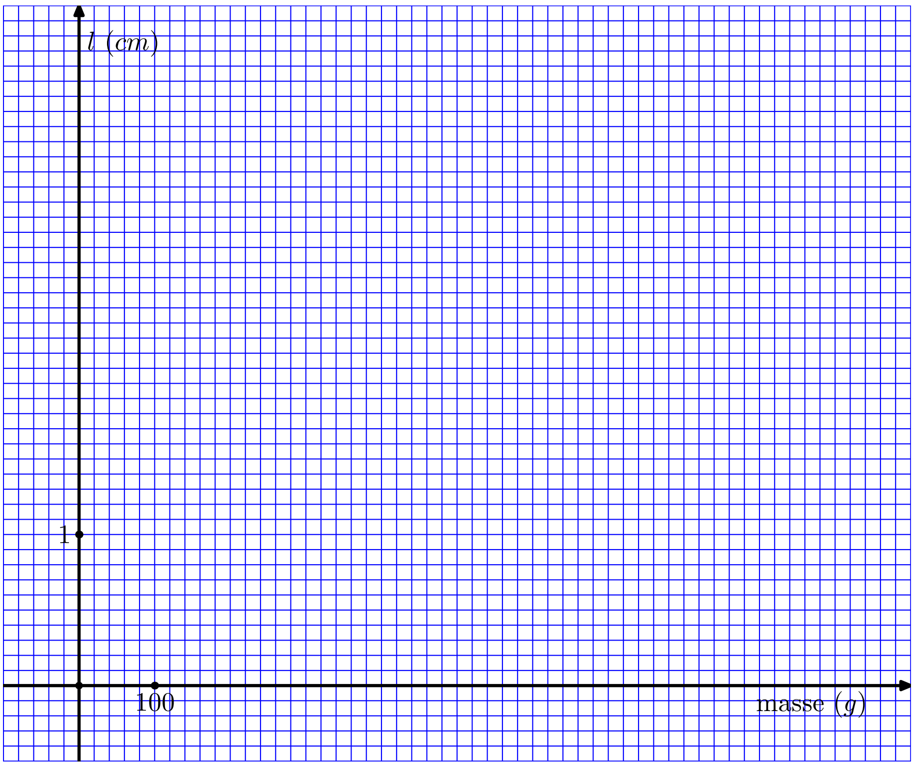


Fig. 16.1 – Papier millimétré à utiliser

⋆⋆

Exercice 8 – numerique/proportionnalite/exob1

Un automobiliste A parcourt 658,8 km avec un plein d'essence de 36 litres payé 251,28 francs (38,31€).

1. Combien coûte un litre d'essence ?
2. Quelle est sa consommation d'essence pour 100 km ? Combien coûtent, en francs, ces 100 km au niveau de l'essence ?
3. Un automobiliste B a, quant à lui, un coût de revient des 100 km égal à 40 francs (6,10€).
   Exprime le pourcentage d'augmentation des coûts de revient des 100 km des automobilistes A et B.
4. Le prix de l'essence baisse de 2%. Quel est le nouveau coût, en francs, de 100 km pour l'automobiliste A ?

Exercice 9 – numerique/proportionnalite/exob2

Dans un collège, 51% des élèves sont demi-pensionnaires. Parmi ceux-ci, $\frac{2}{3}$ sont des filles.

1. Quelle fraction des élèves du collège représentent les filles demi-pensionnaires ?

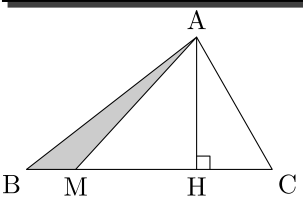
2. Sachant qu'il y a 700 élèves dans le collège, combien y-a-t-il de filles demi-pensionnaires ? de garçons demi-pensionnaires ?

Exercice 10 – numerique/proportionnalite/exob3

L'indice CAC 40 mesure l'activité boursière française. A la bourse de Paris :
- l'ouverture se fait à 9h00 : le niveau du CAC 40 est alors celui de la veille ;
- la fermeture ou « clôture » s'effectue à 17h30 : on arrêt alors les cotations et on affiche la tendance finale : hausse ou baisse.

Le 6 Août 2001, le CAC 40 a clôturé en hausse de 0,69% et le 7 Août 2001, il affichait une baisse finale de 0,29%. Son niveau était alors de 5051,65 points.
Quel était alors son niveau le 6 Août 2001 à l'ouverture ?

Exercice 11 – numerique/proportionnalite/exob4



ABC est un triangle donc le côté $[BC]$ mesure $7\,cm$ et dont la hauteur $[AH]$ mesure $4\,cm$.
On place un point M sur le côté $[BC]$ et on pose $BM = x$ (en cm).
On fait varier cette distance BM et on s'intéresse à l'aire du triangle ABM que l'on note $\mathcal{A}$.

1. Quelles sont la valeur minimale et la valeur maximale que peut prendre x ?
2. Si $x = 2$, que vaut l'aire A ?
3. Exprime, en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}$.
4. Recopie et complète alors le tableau suivant :

x **(en** cm**)**	2	4,1	5	
Aire $\mathcal{A}$				7

5. Représente les données du tableau précédent par un graphique représentant l'aire du triangle BAM en fonction de la longueur BM. (On utilisera du papier millimétré et on prendra, en abscisse $1\,cm$ pour $1\,cm$ et, en ordonnée, $1\,cm$ pour $1\,cm^2$.)
6. Quelle conclusion peut-on faire ?

Exercice 12 – numerique/proportionnalite/exob5

Un automobiliste roule 15 minutes à la vitesse de 80 kilomètres par heure puis 1 heure et 45 minutes à la vitesse de 120 kilomètres par heure.

1. Vérifie par le calcul que la distance totale parcourue est $230\,km$.
2. Calcule la vitesse moyenne sur cette distance totale.

Exercice 13 – numerique/proportionnalite/exob6

Article	Prix avant soldes (en €)	Remise en %	Remise en €	Nouveau prix (en €)
Pantalon	29	15		
Chemise	22		4,4	
Veste		20		55,2

On a relevé, dans le tableau ci-dessus, les différents prix d'articles en soldes.
Recopie et complète le tableau (tous les calculs nécessaires doivent apparaître sur la copie).

Exercice 14 – numerique/proportionnalite/exob7

Dans deux classes de 4^{e} d'un collège, on organise une enquête pour décider de l'ouverture d'un club d'échecs. En 4^{e}A, 6 élèves sur 24 souhaitent l'ouverture. En 4^{e}B, 10 élèves sur 29 souhaitent l'ouverture.

1. Calcule, pour chaque classe, le pourcentage des élèves souhaitant l'ouverture du club.

2. Le club n'existera que si au moins 30% des élèves de l'ensemble des deux classes ont répondu « oui ». Le club ouvrira-t-il ?

Exercice 15 – numerique/proportionnalite/exob8

Il a été demandé aux familles de deux villages voisins S et T de répondre à la question suivante :« Etes-vous favorable à l'aménagement d'une piste cyclable entre les deux villages ? »

1. (a) Dans le village S, 60% des 135 familles consultées ont répondu« oui ».
   Combien de familles, dans ce village, sont favorables à ce projet ?
   (b) Dans le village T, il y a 182 réponses favorables sur les 416 familles consultées.
   Quel est le pourcentage de« oui » pour le village T ?
2. La décision d'aménager la piste cyclable ne peut être prise qu'avec l'accord de la majorité des familles de l'ensemble des deux villages. La piste cyclable sera-t-elle réalisée ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 16 – numerique/proportionnalite/exoc1

Sur la route, lorsqu'un évènement imprévu survient, le conducteur réagit avec un temps de retard d'environ 1 seconde et la voiture parcourt encore une certaine distance qui dépend de la vitesse à laquelle roule le véhicule.
Le tableau ci-dessous indique différents résultats de relevés effectués par La Gendarmerie Nationale.

Vitesse en $km.h^{-1}$	50	70	100
Distance parcourue pendant le temps de réaction	14	19,6	28

1. Ce tableau correspond-il à une situation de propotionnalité ?
2. Quelle est la distance parcourue pendant le temps de réaction si l'on roule à $90\,km.h^{-1}$? Et à $130\,km.h^{-1}$?
3. A quelle vitesse roule-t-on si la distance de réaction est $30,8\,m$?
4. Fais un graphique représentant cette situation et explique comment retouver les résultats des questions précédentes.

Exercice 17 – numerique/proportionnalite/exoc2

Un motocycliste et un cycliste partent à la même heure, du même endroit et sur la même route. Le motocycliste a parcouru $80\,km$ en $1\,h\,20\,min$ et le cycliste a parcouru $35\,km$ en $1\,h\,10\,min$.

1. Quelle est la vitesse moyenne du motocycliste et du cycliste sur ce parcours ?
2. Quelle distance ont parcouru le motocycliste et le cycliste en $1\,h\,45\,min$?
3. La distance totale de leur trajet est de $190\,km$.
   (a) Au $65^{e}km$, le motocycliste crève, répare et au moment de repartir s'aperçoit qu'il a été rattrapé par le cycliste. Combien de temps a duré la réparation du motocycliste ?
   (b) Après cette crevaison, le motocycliste décide d'augmenter sa vitesse de 8%. Combien de temps devra-t-il attendre le cycliste une fois arrivé ?

Exercice 18 – numerique/proportionnalite/exoc3

Un automobiliste parcourt $270\,km$ de jour à la vitesse moyenne de $80\,km/h$.
Puis, avec la nuit et par temps de pluie, l'automobiliste réduit sa vitesse de 20% et roule ainsi pendant $4h15\,min$.

1. Calcule la durée du trajet de jour.
2. Montre que cette durée peut s'écrire $3\,h\,22\,min\,30\,s$.
3. Calcule la distance parcourue de nuit.
4. Calcule la vitesse moyenne de l'automobiliste sur l'ensemble du voyage.

Chapitre 17

Statistiques

Sommaire

17.1 Activités **138**
17.2 Cours **140**
17.2.1 Effectifs et fréquences 140
17.2.2 Effectifs et fréquences cumulés 140
17.2.3 Moyenne 140
17.2.4 Moyenne pondérée 141
17.2.5 Répartition en classes et moyenne 141
17.3 Exercices **143**

17.1. Activités

Les professeurs de Mathématiques du Collège souhaitent présenter aux parents les résultats de l'épreuve commune de 5^{e}. Voici les notes obtenues par les élèves, tous présents.

$10-14-10-18-18-3-12-12-12-1-4-8-1-6-8-6-8-12-4-6-1-16-9-18-12$

$14-18-1-8-8-6-12-18-18-14-10-10-6-6-4-4-4-16-9-12-18-10-14-9-16$

$18-18-1-1-3-3-3-6-8-6-12-12-14-10-12-18-4-4-9-9-9-12-12-18-14$

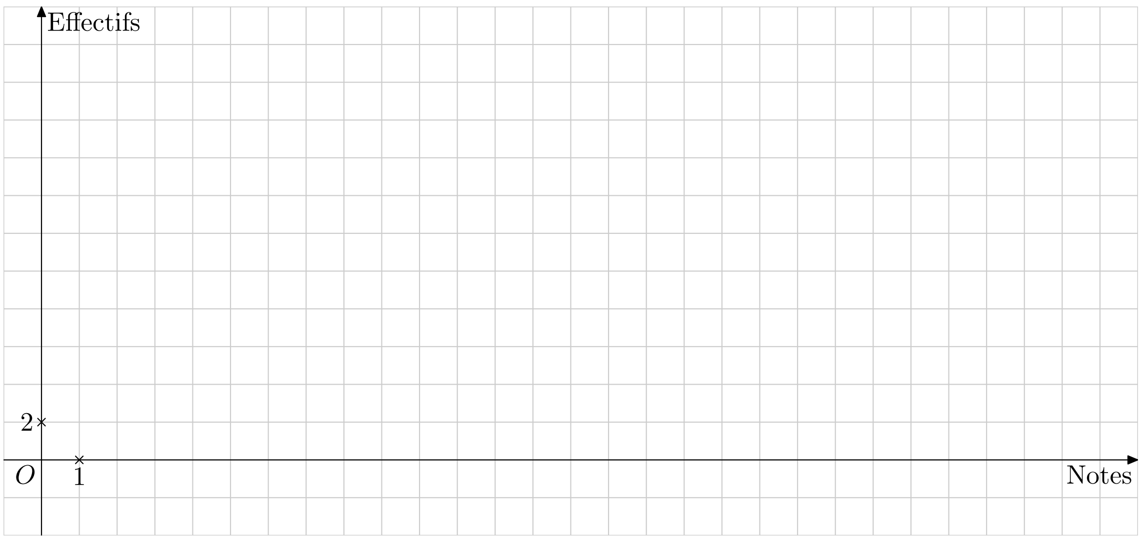
——— 1re présentation ———

1. (a) Combien y-a-t-il d'élèves ? Combien y-a-t-il eu de notes différentes ? ....
   ....

   (b) Complète le tableau suivant (la 2^{e} rangée)

Note	01	03	04	06	08	09	10	12	14	16	18
Effectifs											
....											

2. Représente ce tableau par un diagramme en bâtons (Sur le papier quadrillé ci-dessous).



3. (a) Combien d'élèves ont obtenu une note inférieure ou égale à 10 ? inférieure ou égal à 18 ? inférieur ou égale à 7 ? ....
   ....
   ....

   (b) Pour répondre rapidement à ce type de questions, on construit le tableau des **Effectifs Cumulés Croissants**. Complète alors la 3^{e} rangée du tableau ci-dessus.

4. (a) Calcule la moyenne des élèves à cette épreuve commune. Explique ta méthode. ....
   ....
   ....

   (b) On utilise plutôt la formule suivante

$$M = \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \ldots$$

——— 2^{e} présentation ———

Les professeurs veulent tester une autre représentation : **Le regroupement en classes**

Note	de 1 à 5	de 6 à 10	de 11 à 15	de 16 à 20
Effectif	6	9	6	4

On ne connaît pas précisément les notes : en effet, comment sont réparties les 6 notes de la classe 1 à 5 ? On ne peut donc pas utiliser la formule de la moyenne ci-dessus.
Les notes de la classe *6 à 10* sont 6 ; 7; **8**; 9; 10. On dit que 8 est **le centre de la classe *6 à 10***.
Quels sont les centres des autres classes ?...
....
....
Complète alors le tableau suivant et calcule la moyenne de cette nouvelle série d'effectifs

Note		8		
Effectif	6	9	6	4

On dira alors que la moyenne des élèves est $M \simeq \ldots$.

17.2. Cours

17.2.1 Effectifs et fréquences

Dans un tableau statistique, l'**effectif** est le nombre de réponses associées à chaque valeur.
L'ensemble des valeurs et des effectifs forme une **série statistique**.
En divisant l'effectif d'une valeur par l'effectif total, on obtient la **fréquence**.

$$f = \frac{\text{valeur de l'effectif}}{\text{valeur de l'effectif total}}$$

Exemple : La standardiste d'une radio FM a noté le nombre d'appels téléphoniques reçus par tranches d'heures au cours d'une matinée. Elle obtient les résultats suivants :

Tranches horaires	9h-10h	10h-11h	11h-12h	12h-13h	**Total**
Effectifs (nombres d'appels)	19	37	46	28	**130**
Fréquences	$\frac{19}{130}$				**1**
Fréquences en %	14,6				**100**

17.2.2 Effectifs et fréquences cumulés

Lorsque les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant, on obtient **l'effectif cumulé croissant** d'une valeur en additionnant son effectif à ceux qui le précèdent (on additionne à partir de la gauche du tableau).
De la même manière, les **fréquences cumulées croissantes** s'obtiennent en divisant l'effectif cumulé croissant par l'effectif total.

Remarque : les effectifs cumulés croissants indiquent quel est l'effectif de la série dont la valeur est inférieure à une valeur donnée.
Exemple : On reprend l'exemple précédent :

Tranches horaires	9h-10h	10h-11h	11h-12h	12h-13h
Effectifs (nombres d'appels)	19	37	46	28
Effectifs **cumulés croissants**	**19**	19 + 37 = **56**	19 + 37 + 46 = **102**	**Total des appels : 130**

17.2.3 Moyenne

La **moyenne** d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total de cette série :

$$\text{moyenne} = \frac{\text{Somme de toutes les valeurs}}{\text{Effectif total de la série}}$$

Exemple : Dans une usine, sept employés calculent le salaire moyen (en €) des salaires de leur atelier.

$$\frac{760 + 825 + 915 + 990 + 1065 + 1160 + 1296}{7} \approx 1002$$

Le salaire moyen des employés de cet atelier s'élève environ à 1002 €.

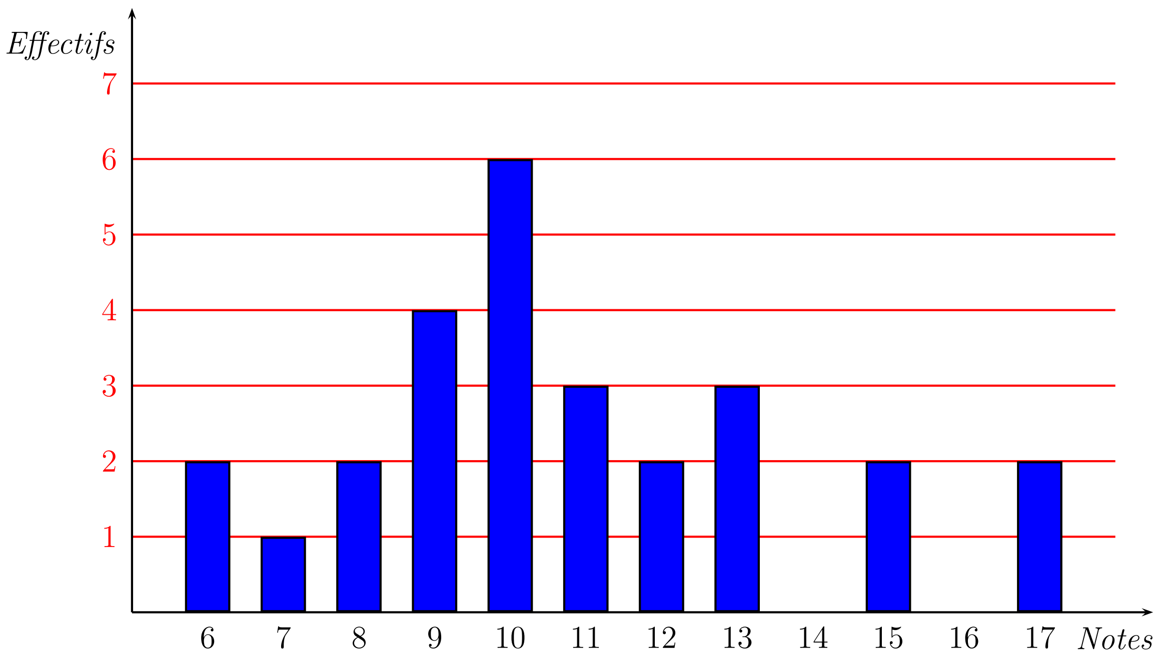
17.2.4 Moyenne pondérée

La **moyenne pondérée** d'une série statistique est le quotient de la somme des valeurs, affectées chacune de leur coefficient, par la somme totale des coefficients.

Exemple : Dans une classe de 28 élèves, les notes à un devoir se répartissent de la manière suivante :

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	15	17
Effectifs	2	1	2	4	6	3	3	3	2	2

Nous représentons cette série par un diagramme en barres.



Pour calculer la moyenne, on effectue le calcul suivant :

$$\frac{6 \times 2 + 7 \times 1 + 8 \times 2 + 9 \times 4 + 10 \times 6 + 11 \times 3 + 12 \times 3 + 13 \times 3 + 15 \times 2 + 17 \times 2}{2 + 1 + 2 + 4 + 6 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2} = \frac{303}{28} \approx 10,8$$

17.2.5 Répartition en classes et moyenne

Il arrive dans certains cas qu'une série statistique soit répartie en classes, c'est-à-dire que l'on prend des intervalles de valeurs :

Exemple : Le tableau ci-dessous présente la répartition de 2000 adultes suivant leur taille :

Tailles en *cm*	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 170[	[170 ; 195[
Effectifs	48	397	913	642

Il est impossible a priori de calculer la moyenne de cette série puisqu'on ne connait pas les valeurs des tailles et leurs effectifs. On considère alors que la valeur au centre de la classe va représenter la classe. On calcule alors la moyenne pondérée pour obtenir une valeur approchée de la moyenne de la série.

Tailles en cm	$[140\,;150[$	$[150\,;160[$	$[160\,;170[$	$[170\,;195[$
Centre de la classe	145	155	165	182,5
Effectifs	48	397	913	642

Pour calculer la taille moyenne, on effectue le calcul suivant :

$$\frac{145 \times 48 + 155 \times 397 + 165 \times 913 + 145 \times 642}{2000} \approx 168$$

La taille moyenne de ce groupe d'adultes est d'environ 168 cm.

17.3. Exercices

Exercice 1 – gestion/exo1

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de 4e selon le nombre de livres empruntés au C.D.I. durant un mois.

Nombre de livres	0	1	2	3	4	5
Effectifs	37	27	39	18	10	4
Fréquences en % (arrondies au dixième)						
Angles arrondis au degré entier						

1. Combien y-a-t-il d'élèves en 4e dans ce collège ?
2. (a) Combien d'élèves empruntent au moins 3 livres ?
   (b) Combien d'élèves empruntent moins de 2 livres ?
3. Complète la ligne des fréquences.
4. Construis le diagramme circulaire des fréquences. On complétera la ligne des angles du tableau et on prendra $4\,cm$ pour le rayon du cercle.

Exercice 2 – gestion/exo2

On considère le tableau de répartition des tailles pour un échantillon de 1000 hommes et de 1000 femmes adultes (source I.N.S.E.E.).

Taille en cm	**Hommes**	**Femmes**
$140 \leq t < 150$	10	38
$150 \leq t < 160$	36	360
$160 \leq t < 170$	383	531
$170 \leq t < 195$	571	71

Dans cet échantillon,

1. Quel est le nombre total d'adultes de taille strictement inférieure à $170\,cm$?
2. Quel est le nombre de femmes dont la taille est supérieure ou égale à $160\,cm$?
3. Quel est le pourcentage des femmes que représentent les femmes dont la taille est comprise entre $170\,cm$ et $195\,cm$?
4. Quel est le pourcentage des adultes que représentent les hommes dont la taille est strictement inférieure à $160\,cm$?

Exercice 3 – gestion/exo3

Pour être vendues, les pommes doivent être calibrées : elles sont réparties en caisses suivant leur diamètre. Dans un lot de pommes, un producteur a évalué le nombre de pommes pour chacun des six calibres rencontrés dans le lot. On a pu ainsi contruire le tableau ci-dessous.

Calibre (en mm)	**Effectif**
$[55; 60[$	12
$[60; 65[$	21
$[65; 70[$	29
$[70; 75[$	22
$[75; 80[$	25
$[80; 85[$	19

1. Calcule l'effectif total de ce lot de pommes.
2. Combien de pommes ont un diamètre de moins de $70\,mm$?
3. Combien de pommes ont un diamètre d'au moins $75\,mm$?
4. Calcule, par rapport, à l'effectif total, le pourcentage de pommes dont le diamètre d est tel que $70 \leqslant d < 80$. (On arrondira le résultat à 10^{-1} près.)

Exercice 4 – gestion/exo4

Voici la répartition des ménages français en fonction du nombre de personnes au foyer.

Nombre de personnes	1	2	3	4	Plus de 5	Total
Effectif en milliers	6 753	7 354	3 885	3 284	1 850	23 126

Source : I.N.S.E.E

1. Calcule la fréquence de chaque effectif : on donnera la réponse en pourcentage arrondi au dixième près.
2. Construis un diagramme circulaire qui réprésente cette situation (on choisira un rayon de $4\,cm$).

Exercice 5 – gestion/exo5

Nombre de films regardés	Effectifs
0	50
1	60
2	120
3	40
4	50
5	30
6	
7	20
8	10

Le gérant d'un cinéma a réalisé un sondage auprès de 400 personnes leur demandant combien de films ils ont regardé dans les salles pendant le mois qui vient de s'écouler. Les résultats ont été indiqués dans le tableau ci-contre.

1. Complète le tableau.
2. Quel est le pourcentage de personnes qui ont regardé un seul film le mois dernier ?
3. Combien de personnes ont regardé moins de 4 films le mois dernier ? Exprime ensuite ce résultat en pourcentage.

⋆⋆

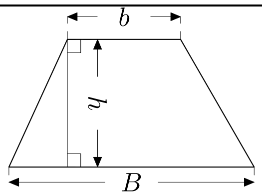
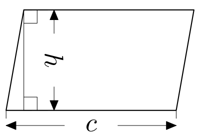
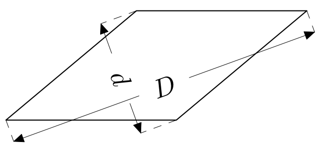
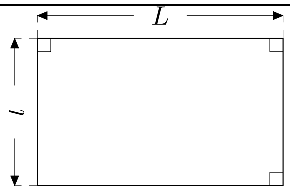
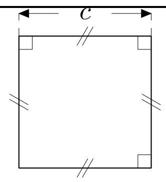
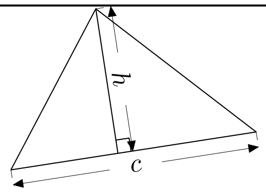
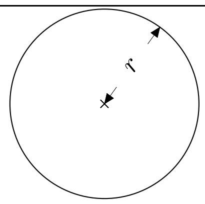
⋆⋆⋆

Quatrième partie

Annexes

Compléments

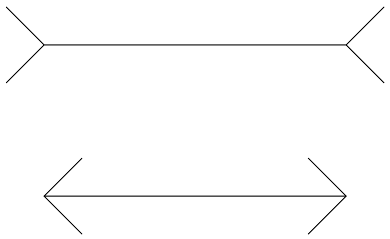
A.1. Périmètre et aire d'une surface

Nom de la figure	Représentation	Périmètre et aire
Trapèze de petite base b, de grande base B et de hauteur h		$\mathcal{P}$ = somme des côtés $\mathcal{A} = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$
Parallélogramme de côté c et de hauteur relative à ce côté h		$\mathcal{P}$ = somme des côtés $\mathcal{A} = c \times h$
Losange de côté c, de grande diagonale D et de petite diagonale d		$\mathcal{P} = 4c$ $\mathcal{A} = \dfrac{d \times D}{2}$
Rectangle de longueur L et de largeur l		$\mathcal{P} = 2(l+L)$ $\mathcal{A} = L \times l$
Carré de côté c		$\mathcal{P} = 4c$ $\mathcal{A} = c^2$
Triangle de côté c et de hauteur relative à ce côté h		$\mathcal{P}$ = somme des côtés $\mathcal{A} = \dfrac{c \times h}{2}$
Cercle et disque de rayon r		$\mathcal{P} = 2\pi r$ $\mathcal{A} = \pi r^2$

A.2. Se méfier...

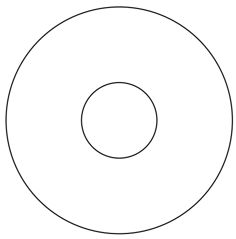
Ces deux segments ont la même longueur.

VRAI ☐ FAUX ☐



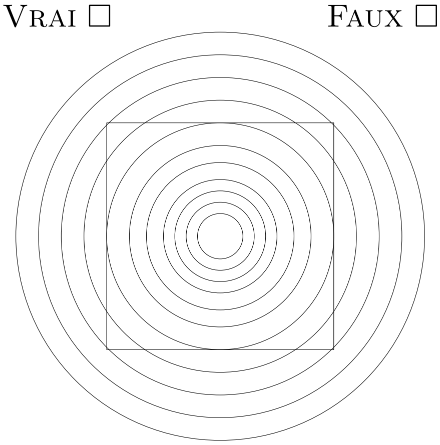
Ces deux cercles centraux n'ont pas le même rayon.

VRAI ☐ FAUX ☐



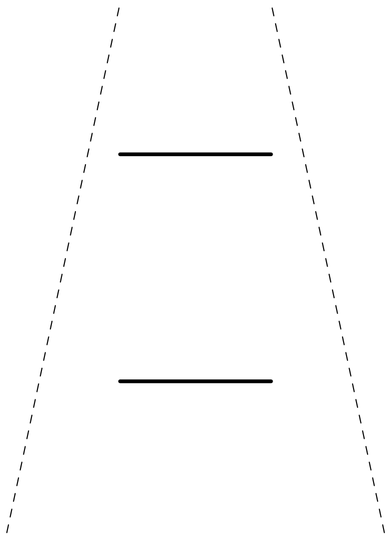
Le polygone dessiné est un carré.

VRAI ☐ FAUX ☐



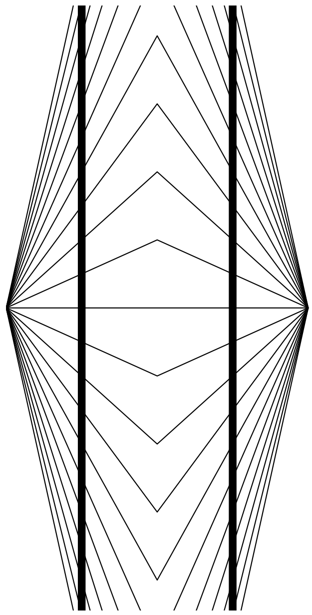
Les segments gras sont de même longueur.

VRAI ☐ FAUX ☐



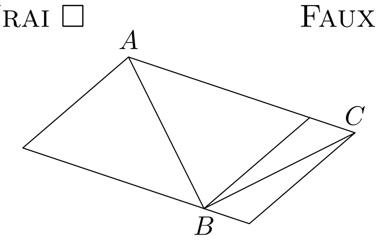
Les droites noires sont parallèles.

VRAI ☐ FAUX ☐



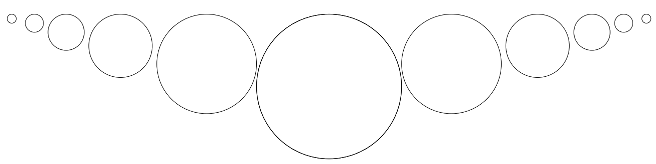
Les segments $[AB]$ et $[BC]$ n'ont pas la même longueur.

VRAI ☐ FAUX ☐



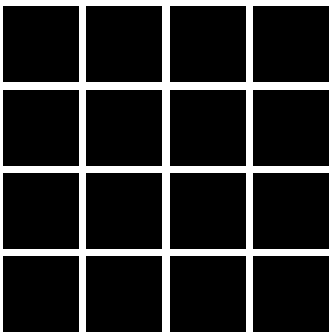
Les hauts des cercles sont alignés.

VRAI ☐ FAUX ☐



Il existe des tâches grises sur ce dessin.

VRAI ☐ FAUX ☐

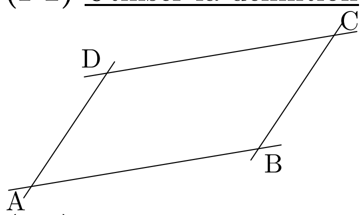


Conclusion : ....
....

A.3. Les quadrilatères particuliers

A.3.1 Démontrer un parallélogramme ?

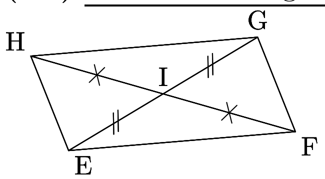
◇ **(P1)** Utiliser la définition



Un parallélogramme est un . . . . qui a ses côtés opposés . . . . deux à deux.

On sait que (AB) est . . . . à (CD) et (AD) est . . . . à (BC)
donc $ABCD$ est un . . . .

◇ **(P2)** Utiliser les diagonales

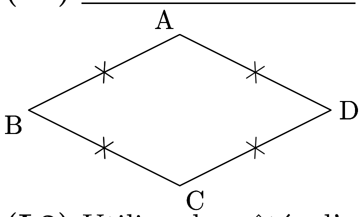


Si les . . . . d'un quadrilatère ont le même . . . . . . alors c'est un . . . .

On sait que I est le . . . . . . de $[EG]$ et de . . . . . .
donc $EFGH$ est un . . . .

A.3.2 Démontrer un losange ?

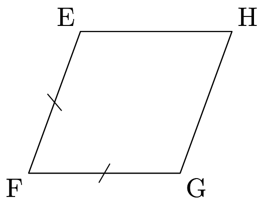
◇ **(L1)** Utiliser la définition



Un losange est un . . . . dont les . . . . ont même . . . .

On sait que $\ldots\cdots = \ldots\cdots = \ldots\cdots = \ldots\ldots$
donc $ABCD$ est un . . . .

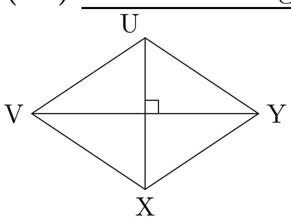
◇ **(L2)** Utiliser les côtés d'un parallélogramme



Si un . . . . a deux côtés . . . . de même . . . ., alors c'est un . . . .

On sait que $EFGH$ est un . . . .
et que $\cdots = \ldots$
donc $EFGH$ est un . . . .

◇ **(L3)** Utiliser les diagonales d'un parallélogramme

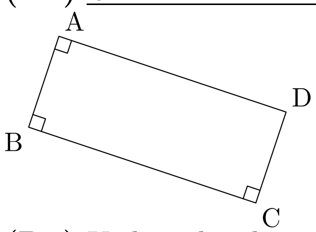


*Si un . . . . a ses diagonales . . . .
alors c'est un . . . .*

On sait que $UVXY$ est un . . . .
et que (UX) est . . . . à . . .
donc $UVXY$ est un . . . .

A.3.3 Démontrer un rectangle ?

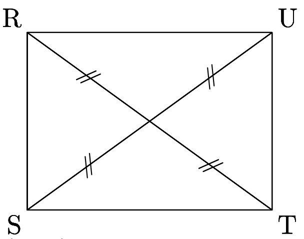
◇ **(R1)** Utiliser la définition



Si un . . . . a . . . angles . . . . . . alors c'est un . . . .

On sait que $\widehat{DAB} = \ldots\cdots = \ldots\cdots = \ldots$
donc $ABCD$ est un . . . .

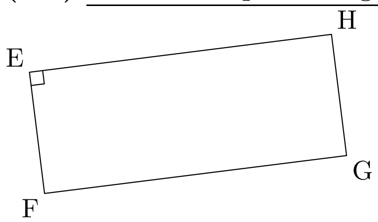
◇ **(R2)** Utiliser les diagonales d'un parallélogramme



Si un . . . . a ses diagonales de même . . . . alors c'est un . . . .

<u>On sait que</u> $RSTU$ est un . . . .
<u>et que</u> $RT = \ldots$
<u>donc</u> $RSTU$ est un . . . .

◇ **(R3)** <u>Utiliser un parallélogramme et un angle droit</u>



Si un . . . . a un . . . . . . droit alors c'est un . . . .

<u>On sait que</u> $EFGH$ est un . . . .
<u>et que</u> $\widehat{HEF} = \ldots$
<u>donc</u> $EFGH$ est un . . . .

A.3.4 Démontrer un carré ?

◇ <u>Utiliser le fait qu'un carré est à la fois un . . . . et un . . . .</u>

- **(C1)** <u>Utiliser un rectangle et deux côtés</u>

  Si un rectangle a deux . . . . consécutifs de . . . . . . longueur alors c'est un carré
- **(C2)** <u>Utiliser les diagonales d'un rectangle</u>

  Si un rectangle a ses diagonales . . . . alors c'est un carré
- **(C3)** <u>Utiliser les diagonales d'un losange</u>

  Si un losange a ses . . . . de même . . . . alors c'est un carré
- **(C4)** <u>Utiliser un losange et un angle</u>

  Si un losange a un . . . . alors c'est un carré