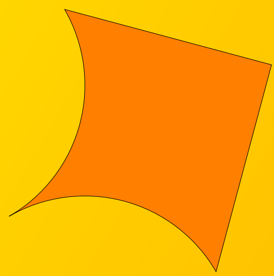
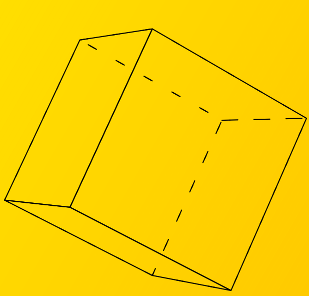
$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$
$$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$



# Un cours de 3$^{\text{e}}$



Christophe Poulain

Mis à jour le 26 août 2004

# Table des matières

# Première partie

# Numérique

Chapitre 1

# Egalités Remarquables

## Sommaire

# 1.1. Activités

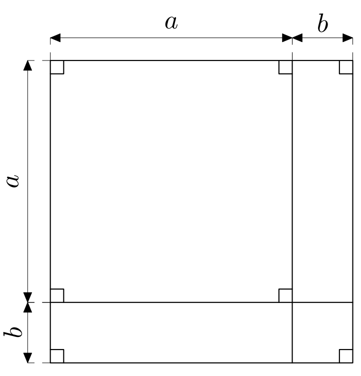
## 1.1.1 Egalités remarquables

1. Pour chacune des expressions suivantes, complète et indique le développement juste.

$$3(x+2) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$5(2x-1) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots$$

$$(x+1)(y+5) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(x+1)(y+5) = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

$$(3x+1)(x-7) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(3x+1)(x-7) = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$(3x+1)(x-7) = \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots$$

2. 


De combien de pièces est formé le grand carré ? ..................

Exprime de 2 façons différentes l'aire de ce grand carré :

**1$^{re}$façon** ..................................................

**2$^{e}$façon** ..................................................

Donc $\quad (a+b)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$

Pour être sûre du résultat, Emilie développe l'expression $(a+b)^2$

$$(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$$
$$(a+b)^2 = \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots$$

$$(a+b)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots \qquad (1)$$

3. Développe l'expression $(a-b)^2$

$$(a-b)^2 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(a-b)^2 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(a-b)^2 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots - \ldots\ldots \times \ldots\ldots - \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$

$$(a+b)^2 = \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots \qquad (2)$$

4. Développe $(a+b)(a-b)$

$$(a+b) \times (a-b) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$
$$(a+b) \times (a-b) = \ldots\ldots \times \ldots\ldots - \ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots \times \ldots\ldots - \ldots\ldots \times \ldots\ldots$$

$$(a+b) \times (a-b) = \ldots\ldots - \ldots\ldots \qquad (3)$$

5. Recopie les égalités (1), (2) et (3).

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

Ces 3 égalités sont appelées Egalités Remarquables

### 1.1.2 Vers la factorisation

1. (a) Complète l'encadré ci-dessous.

Si $a, b, k$ sont 3 expressions quelconques alors

$$\ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots = k \times (a+b)$$
$$\ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots = k \times (a-b)$$

(b) Transforme les sommes suivantes en produit et cite les facteurs du produit.

| Somme | $k$ | $a$ | $b$ | Produit | Facteurs |
|---|---|---|---|---|---|
| $8x+4x$ | | | | $8x+4x = \ldots \times (\ldots + \ldots) = \ldots$ | |
| $-3x-yx$ | | | | $-3x-yx = \ldots \times (\ldots - \ldots)$ | |
| $x^2+2x = \ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots$ | | | | $x^2+2x = \ldots \times (\ldots + \ldots)$ | |
| $2(x+2)-x(x+2)$ | | | | $2(x+2)-x(x+2) = (\ldots + \ldots) \times (\ldots \quad \ldots)$ | |
| $(x+3)(x-1)+7(x+3)$ | | | | $(x+3)(x-1)+7(x+3) = (\ldots \quad \ldots) \times (\ldots \quad \ldots \quad \ldots)$ | |

2. (a) Rappelle les 3 égalités remarquables.

$\ldots + \ldots \times \ldots \times \ldots + \ldots = (a+b)^2$ (1) $\quad \ldots - \ldots \times \ldots \times \ldots + \ldots = (a-b)^2$ (2) $\quad \ldots - \ldots = (a+b)(a-b)$ (3)

(b) Complète les sommes et transforme les en produits puis cite les facteurs du produit

| Somme | Type | $a$ | $b$ | Produit | Facteurs |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+2\times \ldots \times \ldots + 3^2$ | | | | $x^2+2\times \ldots \times \ldots + 3^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | |
| $9-x^2 = (\ldots)^2 - x^2$ | | | | $9-x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ | |
| $x^2-2\times x\times \ldots + 49 = x^2 - 2\times x \times \ldots + (\ldots)^2$ | | | | $x^2-2\times x\times \ldots + 49 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | |
| $x^2+2\times x\times 4 + \ldots$ | | | | $x^2+2\times x\times 4 + \ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | |
| $(4x)^2-2\times \ldots \times \ldots + 5^2$ | | | | $(4x)^2-2\times \ldots \times \ldots + 5^2 = \ldots\ldots\ldots$ | |
| $4x^2-36 = (\ldots)^2 - (\ldots)^2$ | | | | $4x^2-36 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ | |
| $25x^2+80x+64 = (\ldots)^2 + 2\times \ldots \times \ldots + (\ldots)^2$ | | | | $25x^2+80x+64 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ | |

### 1.1.3 Equation-Produit

1. On sait que si l'on multiplie n'importe quel nombre $x$ par 0 alors on obtient 0.

$$0 \times x = 0$$

   Que peut-on alors dire des expressions $A$ et $B$ dans le produit $A \times B = 0$ ?

2. Comment peut-on alors résoudre l'équation $(x + 3) \times (2x - 5) = 0$ ?

## 1.2. Cours

### 1.2.1 Rappels

**Développer** une expression, c'est transformer les produits en sommes.
**Simple distributivité** Soit $a, b, k$ trois nombres quelconques. alors

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

**Double distributivité** Soit $a, b, c, d$ 4 nombres quelconques. Alors

$$(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

### 1.2.2 Egalités remarquables

**Carré d'une somme de deux termes**

$$(a+b)^2 = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{carré du} \\ 1^{\text{er}}\text{terme}}} + \underbrace{2 \times a \times b}_{\text{double produit}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{carré du} \\ 2^{\text{e}}\text{terme}}}$$

**Carré d'une différence de deux termes**

$$(a+b)^2 = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{carré du} \\ 1^{\text{er}}\text{terme}}} - \underbrace{2 \times a \times b}_{\text{double produit}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{carré du} \\ 2^{\text{e}}\text{terme}}}$$

**Produit de la somme de deux termes par leur différence**

$$(a+b)(a-b) = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{carré du} \\ 1^{\text{er}}\text{terme}}} - \underbrace{b^2}_{\substack{\text{carré du} \\ 2^{\text{e}}\text{terme}}}$$

Ces égalités sont vraies quelles que soient les valeurs de $a$ et de $b$.

**Exemples**
$(x+1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$
$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$
$(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

**Application : Calcul mental**
$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$
$51^2 = (50+1)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1 = 2500 + 100 + 1 = 2601$
$37 \times 43 = (40-3) \times (40+3) = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$

### 1.2.3 La factorisation

> **Factoriser**, c'est transformer une somme (ou une différence) en produit.
> Exemple : $7(x+5)$ est une expression factorisée alors que $x+4$ ou $5x(2x+8)+4$ ne sont pas des expressions factorisées.

### 1.2.4 Techniques de factorisation

#### Avec un facteur commun

Soit $a, b, k$ 3 expressions quelconques. Alors

$$k \times a + k \times b = k \times (a+b)$$
$$k \times a - k \times b = k \times (a-b)$$

Exemples : Factoriser

$$A = \underline{(x+2)}(2x-1) + \underline{(x+2)}x \qquad B = (4x+3)\underline{(x-1)} - (4x-2)\underline{(x-1)}$$
$$A = (x+2) \times (2x-1+x) \qquad B = (x-1)(4x+3-(4x-2))$$
$$A = (x+2) \times (3x-1) \qquad B = (x-1)(4x+3-4x+2)$$
$$B = (x-1) \times 5 = 5(x-1)$$

#### Avec une égalité remarquable

Soit $a, b$ deux expresions quelconques. Alors

$$a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2 \times a \times b + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$$

Exemples : Factoriser

$$A = x^2 + 16x + 64 \qquad B = 4x^2 - 4x + 1 \qquad C = x^2 - 25$$
$$A = x^2 + 2 \times x \times 8 + 8^2 \qquad B = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 \qquad C = x^2 - 5^2$$
$$A = (x+8)^2 \qquad B = (2x-1)^2 \qquad C = (x+5)(x-5)$$

### 1.2.5 Equation-Produit

- Dans un produit, si l'un **au moins** des facteurs est nul alors le produit est nul.
  Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $a \times b = 0$
- Si un produit est nul alors l'un **au moins** de ses facteurs est nul.
  Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

Exemple : Résoudre l'équation $(3x+7)(-8x-4) = 0$

C'est une équation-produit alors $3x - 7 = 0$ ou $-8x - 4 = 0$

$3x = 7$ ou $-8x = 4$

$x = \frac{7}{3}$ ou $x = \frac{4}{-}8 = -\frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation $(3x-7)(-8x-4) = 0$ sont $\frac{7}{3}$ et $-\frac{1}{2}$

## 1.3. Exercices

**Exercice 1** – remarquables/exo1

Développe les expressions suivantes à l'aide de la 1re égalité remarquable.

$$A=(x+2)^2 \quad B=(x+5)^2 \quad C=(7+x)^2$$
$$D=(2x+3)^2 \quad E=(3x+1)^2 \quad F=(4x+2)^2$$

**Exercice 2** – remarquables/exo2

Développe les expressions suivantes à l'aide de la 2e égalité remarquable.

$$G=(x-1)^2 \quad H=(x-2)^2 \quad I=(5-x)^2$$
$$J=(2x-1)^2 \quad K=(5-3x)^2 \quad L=(2x-5)^2$$

**Exercice 3** – remarquables/exo3

Développe les expressions suivantes à l'aide de la 3e égalité remarquable.

$$M=(x-1)(x+1) \quad N=(x-2)(x+2)$$
$$O=(x+3)(x-3) \quad P=(2x-3)(2x+3)$$
$$Q=(2-3x)(2+3x) \quad R=(1-4x)(1+4x)$$

**Exercice 4** – remarquables/exo4

Développe les expressions suivantes :

$$S=(x+4)(x-4) \quad T=(3+x)^2$$
$$U=(x-3)^2 \quad V=(2x+5)^2$$
$$W=(3-4x)(3+4x) \quad X=(4-3x)^2$$
$$Y=(2x-7)^2 \quad Z=(5+5x)^2$$
$$A_1=(x+5)(x-5) \quad B_1=(3x+4)^2$$
$$C_1=(6x-2)^2 \quad D_1=(3x-2)(3x+2)$$
$$E_1=(2+6x)^2 \quad F_1=(2x-5)^2$$

**Exercice 5** – remarquables/exo5

Développe les expressions suivantes :

$$A=(x+2)^2+(x-3)^2 \quad B=(2x+1)^2+(x+1)(x+2) \quad C=(2-x)^2+(x-1)(x+1)$$
$$D=(3x-2)^2+(3x+2)^2 \quad E=(2x+3)(2x-3)+(3x-2)(3x+2)$$

**Exercice 6** – remarquables/exo6

*En faisant attention au signe* $-$, développe les expressions suivantes :

$$F=(x+1)^2-(x-2)^2 \quad G=(x-3)^2-(x+2)(x-2) \quad H=(3x+2)^2-(2x+3)^2$$
$$I=(2-5x)^2-(5x+2)^2 \quad J=(x+3)(x-3)-(2x+1)(2x-1)$$

**Exercice 7** – remarquables/exo7

Développe les expressions suivantes :

$$K = (2x+1)^2 - (x+2)^2 \qquad L = (3x+2)(3x-2) + (2x-3)^2$$
$$M = (2x-1)(2x+2) + (3x-5)^2 \qquad N = (2x-1)(2x+1) + (5x+3)^2$$
$$O = (3+x)(3-x) - (3-2x)(3+2x) \qquad P = (2x-7)^2 + (3x-6)^2$$
$$Q = (7-x)(8+x) - (8-x)(7+x) \qquad R = (2x+3)^2 + (2x+4)^2$$
$$S = (3-2x)^2 - (3-2x)(3+2x)$$

**Exercice 8** – remarquables/exo8

Factorise les expressions suivantes à l'aide du tableau ci-dessous.

| Expression<br>$k \times a + k \times b$ | Factorisation<br>$k \times (a+b)$ |
|---|---|
| $(2x+3)\boxed{(2x-1)} + (2x+3)\boxed{(3x+2)}$ | $(2x+3) \times \left[(2x-1) + (3x+2)\right]$ |

*facteur commun*

$$A = (x+1)(x+2) + (x+1)(2x-3) \qquad B = (3x-1)(x+2) + (3x-1)(3x+1)$$
$$C = (1-2x)(2x+3) + (1-2x)(3x+2) \qquad D = (2x+3)(2x-3) - (4-5x)(5x-4)$$
$$E = (3x+1)(x+3) - (3x+1)(2x-1) \qquad F = (2x+3)(2x-1) - (3x+4)(2x-1)$$

**Exercice 9** – remarquables/exo9

Transforme l'écriture des expressions suivantes pour faire apparaître un facteur commun et ensuite, factorise l'expression obtenue.

$$K = (x+3)^2 - (x+2)(x+3) \qquad L = (2x+1)^2 + (2x+1)(3x-1)$$
$$M = (5x-1)(2x+3) - (5x-1)^2 \qquad N = (2x+3)^2 + (3x-2)(2x+3)$$
$$O = (2-4x)^2 - (2+4x)(2-4x) \qquad P = (x-3)(2x+3) - (x-3)^2$$
$$Q = (2x+1)(2x-1) + (2x-1)^2$$

**Exercice 10** – remarquables/exo10

Factorise les expressions suivantes à l'aide de la 3e égalité remarquable.

$$G = (2x+1)^2 - (x+2)^2 \qquad H = (x+2)^2 - (3x+2)^2$$
$$I = (3x-1)^2 - (2x+3)^2 \qquad J = (1-5x)^2 - (2-3x)^2$$

**Exercice 11** – remarquables/exo11

Démontre la propriété suivante :

> Si , au produit de 3 nombres consécutifs, on ajoute le nombre « du milieu » alors on obtient le cube du nombre « du milieu ».

**Exercice 12** – remarquables/exo12

Deux nombres $r$ et $s$ sont tels que $r^2 + s^2 = 208$ et $r \times s = 58$.
Calculer $r + s$.

**Exercice 13** – remarquables/exo13

Soit l'expression $A = (2x+5)(x-3) + (x-5)^2 - 2(2x-1)(x+1)$

1. Développe et réduis l'expression $A$.
2. Calcule la valeur de l'expression $A$ pour $x = 0$ et $x = 3$.

**Exercice 14** – remarquables/exo14

1. (a) Développe et réduis $F = (x+3)^2 - (2x+1)(x+3)$.
   (b) Factorise l'expression $F$.
   (c) Calcule la valeur de l'expression $F$ pour $x = -1$.
2. (a) Développe et réduis l'expression $G = (x-7)^2 - 81$.
   (b) Factorise l'expression $G$.
3. (a) Développe et réduis l'expression $H = (3x+5)(2x-1) + 9x^2 - 25$.
   (b) Factorise $9x^2 - 25$, puis l'expression $H$.
   (c) Calcule $H$ pour $x = -\dfrac{5}{3}$.
4. Factorise l'expression $I = 4x^2 + 64x - 65$.

**Exercice 15** – remarquables/exo15

Soit l'expression $C = (3x-1)^2 - 4x(3x-1)$.

1. Développe et réduis $C$.
2. Calcule $C$ pour $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{3}$.

**Exercice 16** – remarquables/exo16

Soit l'expression $G = (-3x+10)(2x+7) - (-3x+10)(-5x+1)$.

1. Développe et réduis l'expression $G$.
2. Ecris $G$ sous la forme d'un produit de 2 facteurs du 1^er^ degré.
3. Résous l'équation $G = 0$.

**Exercice 17** – remarquables/exo17

Soit l'expression $F = (3x-8)(x+1) - 9x^2 + 64$.

1. Développe et réduis l'expression $F$.
2. Factorise l'expression $9x^2 - 64$.
3. Factorise l'expression $F$.
4. Résous l'équation $F = 0$.

**Exercice 18** – remarquables/exo18

Soit $A = (1-2x)^2 - (x+1)(3x-4)$.

1. Développe et réduis l'expression $A$.
2. Calcule $A$ pour $x = -2$.
3. Est-ce que $-1$ est solution de l'équation $A = 0$ ?

**Exercice 19** – remarquables/exo19

*Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.*
Soit $x$ un nombre positif et $ABC$ un triangle rectangle en $A$ tel que $AB = 9x + 6$ et $AC = 12x + 8$.

1. Exprime, en fonction de $x$, la longueur du segment $[BC]$.
2. Exprime, en fonction de $x$, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $ABC$.

3. Calcule, en centimètres carrés, la valeur exacte de cette aire lorsque $x = \sqrt{3}\,cm$.
4. Le triangle $ABC$ peut-il être isocèle ? Pourquoi ?

**Exercice 20** – remarquables/exo20

On donne $A = 2(x+5)(2x-3) - (2x+5)^2$.

1. Développe et réduis $A$.
2. Calcule $A$ pour $x = 1$.
3. Résous l'équation $A = 5$.

**Exercice 21** – remarquables/exo21

1. (a) Développe $(x^2+x+1)(x^3+1)$.
   (b) Exprime le nombre 111 111 sous la forme d'une somme de puissances de 10.
   (c) Déduis-en deux entiers naturels différents de 1 dont le produit est égal à 111 111.
2. (a) Développe $(x^3+x^2+x+1)(x^4+1)$.
   (b) Déduis-en deux entiers naturels différents de 1 dont le produit est égal à 11 111 111.
3. (a) Développe $(x^2-x+1)(x+1)$.
   (b) Déduis-en deux entiers naturels différents de 1 dont le produit est égal à 1 001.
4. En développant
$$(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)$$
trouve deux entiers naturels différents de 1 dont le produit est égal à 100 001.

**Exercice 22** – remarquables/exo22

1. Vérifie que pour tous nombres $b$ et $c$ :
$$(b+c)^2+(b-c)^2 = 2(b^2+c^2)$$
2. Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ tel que $AC+AB = 14\,cm$ et $AC-AB = 2\,cm$.
Sans calculer $AC$ et $AB$, déduis de la question précédente la longueur $BC$.

**Exercice 23** – remarquables/exo23

Démontre que les affirmations suivantes, données par Viète[1], sont toujours vraies :

- « Le carré de la différence de deux nombres, ajouté à quatre fois leur produit, est égal au carré de leur somme ».
- « Le double de la somme des carrés de deux nombres, diminué du carré de la somme de ces deux nombres, est égal au carré de leur différence ».
- « Lorsque l'on divise la différence des carrés de deux nombres par la somme des nombres, on obtient leur différence ».

**Exercice 24** – remarquables/exo24

Développe les expressions suivantes :

$$A = (x+2)\times(x+3) \qquad B = (2x+1)\times(-x+3) \qquad C = (x+3)^2$$

$$D = (5-x)^2 \qquad E = (x-6)\times(x+6) \qquad F = 2x+3+(2x-1)^2$$

**Exercice 25** – remarquables/exo25

On donne $A = (2x-4)(2x+3) - (2x+5)^2$.

[1] Qui est-il ?

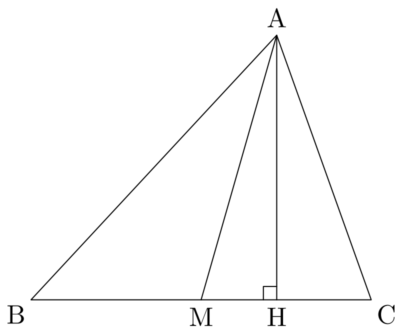
1. Développe et réduis $A$.
2. Calcule $A$ pour $x = 1$.
3. Résous l'équation $A = 7$.

**Exercice 26** – remarquables/exo26

On considère l'expression $A = (2x-3)^2 - (2x-3)(x-2)$.

1. Développe et réduis l'expression $A$.
2. Calcule la valeur de l'expression $A$ pour $x = 2$.
3. Résous l'équation $A = 2x^2$.

**Exercice 27** – remarquables/exo27




Dans le triangle ci-contre, la droite $(AM)$ est une médiane et la droite $(AH)$ est une hauteur. Les points $B$, $M$, $H$ et $C$ sont alignés.
L'unité de longueur étant le centimètre, on pose

$$BM = CM = 3,\ AH = 2 \text{ et } MH = x$$

1. Exprime $AB^2$, $AC^2$, et $AM^2$ en fonction de $x$.
2. (a) Exprime $AB^2 + AC^2$ en fonction de $x$.
   (b) Exprime $2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$ en fonction de $x$.
   (c) Que peut-on dire de ces deux expressions ?

**Exercice 28** – remarquables/exo28

On pose $B = 4x^2 - 25 - (2x+5)(3x-7)$.

1. Développe et réduis $B$.
2. (a) Factorise $4x^2 - 25$.
   (b) Déduis-en une factorisation de $B$.

**Exercice 29** – remarquables/exo29

Soit l'expression $A = (2x+3)^2 - (4x-5)^2$.

1. Développe et réduis l'expression $A$.
2. Détermine la valeur de $A$ pour $x = -1$ puis pour $x = \sqrt{2}$.
3. Factorise l'expression $A$.
4. Résous l'équation $A = 0$.

**Exercice 30** – remarquables/exo30

1. On considère l'expression
$$E = (x-3)^2 - (x-1)(x-2)$$
   (a) Développe et réduis $E$.
   (b) Comment peut-on en déduire, sans calculatrice, le résultat de
$$99\,997^2 - 99\,999 \times 99\,998$$
2. (a) Factorise l'expression
$$F = (4x+1)^2 - (4x+1)(7x-6)$$
   (b) Résous l'équation $(4x+1)(7-3x) = 0$.

**Exercice 31** – remarquables/exo31

Soit $D$ et $E$ les expressions suivantes :

$$D = (4x+1)(x-3) - (x-3)^2 \qquad\qquad E = (3x+9)^2 - 15$$

1. Développe et réduis les expressions $D$ et $E$.
2. Factorise les expressions $D$ et $F$.
3. Résous l'équation $D = E$.

**Exercice 32** – remarquables/exo32

1. Soit l'expression $A = (3x-4)^2 - (3x-4)(2x+5)$.
   (a) Développe et réduis l'expression $A$.
   (b) Factorise l'expression $A$.
   (c) Résous l'équation $A = 0$.
   (d) Calcule la valeur de l'expression $A$ pour $x = 9$.

Chapitre 2

# Equations, inéquations, systèmes

## Sommaire

# 2.1. Activités

## 2.1.1 Ordre et multiplication

1. On sait que $a < b$. Recopie et complète le tableau suivant.

| $a$ ... $b$ | $-2a$ ... $-2b$ | $-5a$ ... $-5b$ |
|---|---|---|
| $3$ ... $4$ | ... | ... |
| $-1$ ... $2$ | ... | ... |
| $-4$ ... $-3$ | ... | ... |

   Que remarque-t-on ?

2. Il faut prouver cette remarque. Soit $a$ et $b$ 2 nombres quelconques tels que $a < b$ et $c$ un nombre **négatif**.
   Alors on a $a - b < 0$ et comparons les produits $ac$ et $bc$.

$$ac - bc = \underbrace{\underbrace{(a-b)}_{<0} \times \underbrace{c}_{<0}}_{\dots}$$

   donc $ac \dots bc$

> *<u>Si</u> on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre ......... <u>alors</u> .....*
> ........................................................................................

## 2.1.2 Solutions d'une inéquation

1. Pour chacun des cas suivants, dire si le nombre proposé est solution de l'inéquation proposée.

   (a) $x = 7$ pour $x + 4 > 0$
   (b) $x = -1$ pour $2x - 4 < 0$
   (c) $x = 4$ pour $x - 4 \geqslant 0$
   (d) $x = -2$ pour $3x+4 \leqslant -3$
   (e) $x = 0$ pour $2x+1 > 4x+1$

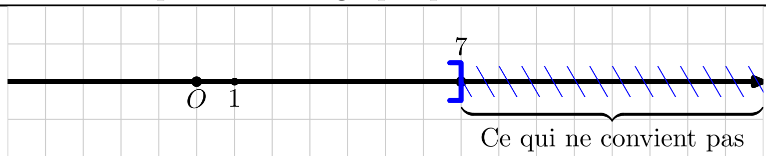
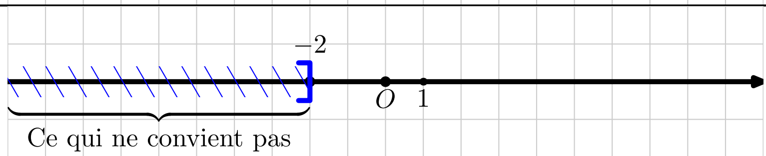
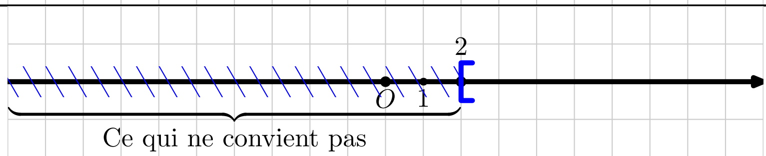
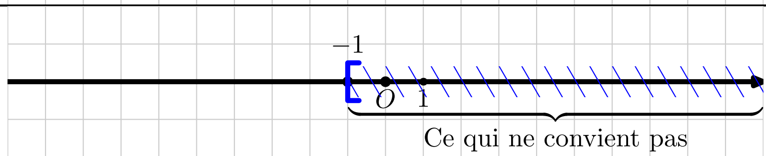
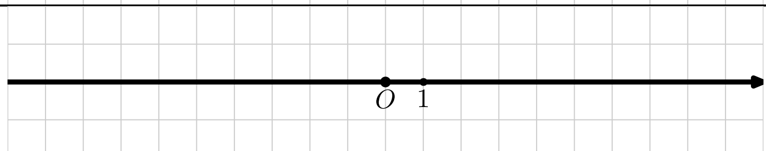
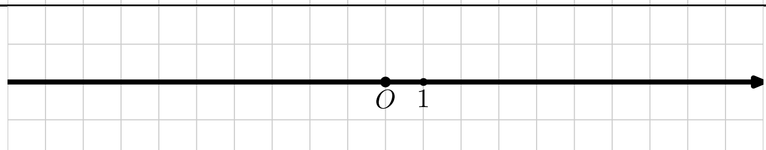
2. Voici plusieurs inéquations. Sans les résoudre, propose au moins deux solutions pour chacune d'elles.

   (a) $x \leqslant 7$
   (b) $3x > 2$
   (c) $2x + 4 \geqslant 0$
   (d) $-4x + 1 < 2x$
   (e) $4x + 2 \leqslant 3 - x$

3. Recopie et complète le tableau suivant.

| **Inéquation** | **« Les solutions de l'inéquation sont...** |
|---|---|
| $x \leqslant 7$ | tous les nombres inférieurs ou égaux à 7 |
| $x < -2$ | tous les nombres strictement inférieurs à $-2$ |
| $x$ ...... | tous les nombres supérieurs ou égaux à 3 |
| $x < 4$ | tous les nombres ............ |
| $x$ ...... | tous les nombres strictement supérieurs à $\pi$ |

4. (a) Observe attentivement ce tableau et complète-le (les 2 premières lignes sont complètes).

| Inéquation | Représentation graphique des solutions |
|---|---|
| $x \leqslant 7$ |   |
| $x > -2$ |   |
| $x \dots 2$ |   |
| $x \dots\dots$ |   |
| $x < 4$ |   |
| $x \geqslant -3$ |   |

(b) Que représente le crochet ?

### 2.1.3 Résolution de problèmes

<u>PROBLÈME A</u>

<u>Donnée $D_1$</u> : Dans une papeterie, Jean achète 2 cahiers et 3 livres. Il paie 17€.

Peut-on trouver le prix unitaire des 2 articles ? ..................................................

......................................................................................................................

<u>PROBLÈME B</u>

<u>Donnée $D_1$</u> : Dans une papeterie, Jean achète 2 cahiers et 3 livres. Il paie 17€.
<u>Donnée $D_2$</u> : Dans la même papeterie, Luc achète 2 cahiers et 5 livres. Il paie 25€.

Quel est le prix d'un livre ? ..........................................................................

......................................................................................................................

Pourquoi la résolution de ce problème est simple ? ...................................................

......................................................................................................................

<u>PROBLÈME C</u>

<u>Donnée $D_1$</u> : Dans une papeterie, Jean achète 2 cahiers et 4 livres. Il paie 23€.
<u>Donnée $D_2$</u> : Dans la même papeterie, Luc achète 1 cahier et 3 livres. Il paie 15,5€.

On ne peut pas trouver directement le prix unitaire de chaque article. Il va falloir « mathématiser » le problème.

**Choix des inconnues** Soit ... le prix d'un cahier et ... le prix d'un livre.

## Mise en équation du problème

1. Traduis mathématiquement par une équation la donnée $D_1$.

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots \qquad (1)$$

   C'est une équation à deux inconnues (... et ...).

2. Traduis mathématiquement par une équation la donnée $D_2$.

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots \qquad (2)$$

3. Les équations (1) et (2) forment **un système de 2 équations du 1^er^ degré à 2 inconnues**. On le note

$$\begin{cases} \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots & (1) \\ \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots & (2) \end{cases}$$

4. Pour qu'**un couple de solutions** conviennent, il faut qu'il soit **solution des deux équations à la fois**. Pour chaque couple (prix d'un cahier ; prix d'un livre) proposé ci-dessous, dis s'il peut convenir comme solution (justifie les calculs).

   **Solution 1 : (3 ;4)** ..................................................................

   ..................................................................

   **Solution 2 : (6,5 ;3)** ..................................................................

   ..................................................................

   **Solution 3 : (1,5 ;5)** ..................................................................

   ..................................................................

## Résolution du système

1. En suivant le problème $B$ ; quelle semble être la méthode à choisir ? ..........................

   ..................................................................

2. Ecris l'équation correspondant à la méthode de la question 1.

$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots \qquad (3)$$

   On dit que les équations (2) et (3) sont **équivalentes** : on obtient l'équation (3) en multipliant l'équation (2) par ....

3. Recopie le système à résoudre en remplaçant l'équation (2) par l'équation (3), puisqu'elles sont équivalentes.

$$\begin{cases} \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots & (1) \\ \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots & (3) \end{cases}$$

4. En utilisant le problème B, quel est le prix d'un livre ?

   ..................................................................

   ..................................................................

   ..................................................................

   Cela revient à soustraire membre à membre les équations (3) et (1). Vérifie le.

$$\begin{aligned} (\ldots\ldots + \ldots\ldots) - (\ldots\ldots + \ldots\ldots) &= \ldots - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

5. En connaissant le prix d'un livre, calcule le prix d'un cahier.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Conclusion** Le prix d'un cahier est ...€ et le prix d'un livre est ...€.

PROBLÈME D

Donnée $D_1$ : Dans une papeterie, Jean achète 3 cahiers et 5 livres. Il paie 42€.
Donnée $D_2$ : Dans la même papeterie, Luc achète 4 cahiers et 7 livres. Il paie 58€.

Comment résoudre ce problème ?

## 2.2. Cours

### 2.2.1 Equation

Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, le plus souvent représenté par une lettre.
**Résoudre une équation**, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu qui vérifient l'égalité : chacune de ces valeurs est appelée **une solution de l'équation**.
Exemple :

$$\begin{aligned} x+1 &= -4 \\ x+1-1 &= -4-1 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-6 &= 21 \\ 3x-6+6 &= 21+6 \\ 3x &= 27 \\ x &= \frac{27}{3} = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x-5 &= x+22 \\ 4x-x-5 &= x-x+22 \\ 3x-5 &= 22 \\ 3x-5+5 &= 22+5 \\ 3x &= 27 \\ x &= \frac{27}{3} = 9 \end{aligned}$$

### 2.2.2 Mise en équation d'un problème

> Chez Casto-Dépôt, si j'achète 3 pots de peintures et 4 paquets de parquet, je paie 98,50€. Je sais que le prix d'un paquet de parquet est moins cher de 2,50€ qu'un pot de peinture.
> Quel est le prix d'un pot de peinture ?

**Choix de l'inconnue** Soit $x$ le prix d'un pot de peinture.

**Mise en équation du problème** Si un pot de peinture coûte $x$€ alors un paquet de parquet coûte $x-2,5$€.
Si un pot de peinture coûte $x$€ alors 3 pots de peinture coûtent $3\times x$€.
Si un paquet de parquet coûte $x-2,5$€ alors 4 paquets de parquets coûtent $4\times(x-2,5)$€.
On obtient alors

$$\underbrace{3x}_{\text{prix des pots de peinture.}} + \underbrace{4(x-2,5)}_{\text{prix des paquets de parquet.}} = 98,50$$

**Résolution de l'équation**

$$\begin{aligned} 3x+4(x-2,5) &= 98,5 \\ 3x+4x-4\times 2,5 &= 98,5 \\ 3x+4x-10 &= 98,5 \\ 7x-10 &= 98,5 \\ 7x-10+10 &= 98,5+10 \\ 7x &= 108,5 \\ x &= \frac{108,5}{7} \\ x &= 15,5 \end{aligned}$$

**Conclusion** Le prix d'un pot de peinture est 15,5€ (et le prix d'un paquet de parquet est 13€).

### 2.2.3 Inéquation

#### Ordre et opérations

> Si on ajoute ou on soustrait le même nombre aux 2 membres de l'inégalité alors on garde le sens de l'inégalité.
>
> $$\text{Si } a < b \text{ alors } a + c < b + c \qquad \text{Si } a \geqslant b \text{ alors } a - d \geqslant b - d$$

Si on multiplie ou on divise par un nombre **strictement positif** les 2 membres de l'inégalité alors on garde le sens de l'inégalité.

$$\text{Si } a < b \text{ et } c > 0 \text{ alors } a \times c < b \times c$$

Si on multiplie ou on divise par un nombre **strictement négatif** les deux membres de l'inégalité alors on change le sens de l'inégalité.

$$\text{Si } a < b \text{ et } d < 0 \text{ alors } a \times d > b \times d$$

**Définitions**
Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, le plus souvent représenté par une lettre.
**Résoudre une inéquation**, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l'inégalité soit vraie. Les valeurs trouvées sont appelées **les solutions de l'inéquation**.
Exemple :

Résoudre $2x + 1 \geqslant 7$

$$2x + 1 \geqslant 7$$

On soustrait 1 à chaque membre de l'inégalité.

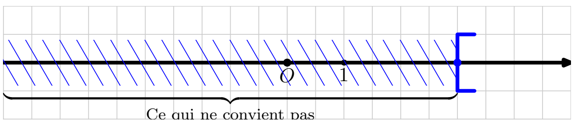
$$2x + 1 - 1 \geqslant 7 - 1$$

$$2x \geqslant 6$$

On divise chaque membre de l'inégalité par un nombre positif 2.

$$x \geqslant \frac{6}{2}$$

$$x \geqslant 3$$




Résoudre $-3x - 7 > -4$

$$-3x - 7 > -4$$

On ajoute 7 à chaque membre de l'inégalité.

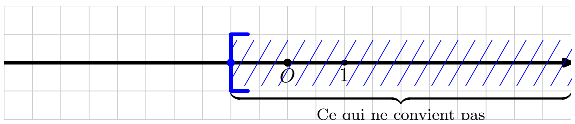
$$-3x - 7 + 7 > -4 + 7$$

$$-3x > 3$$

On divise chaque membre de l'inégalité par un nombre négatif -3.

$$x < \frac{3}{-3}$$

$$x < -1$$




### 2.2.4 Mise en inéquation d'un problème

> Un club de football propose deux tarifs :
> – **Tarif 1** : 7€ par match
> – **Tarif 2** : 35€ d'abonnement et 5€ par match.
> A partir de combien de matches le tarif 2 est-il plus avantageux ?

**Choix de l'inconnue** Soit $x$ le nombre de matches auxquels on assiste.

**Mise en inéquation du problème** Avec le tarif 1, on paie $7x$. Avec le tarif 2, on paie $35 + 5x$.
Le tarif 2 est plus avantageux lorsque $35 + 5x < 7x$.

**Résolution de l'inéquation**

$$\begin{aligned} 35+5x &< 7x \\ 35+5x-5x &< 7x-5x \\ 35 &< 2x \\ \frac{35}{2} &< x \\ 17,5 &< x \end{aligned}$$

**Conclusion** On doit assister à 18 matches ou plus pour que le tarif 2 soit le plus avantageux.

### 2.2.5 Systèmes de 2 équations du $1^{\text{er}}$ degré à 2 inconnues

**Un système de 2 équations du $1^{\text{er}}$ degré à 2 inconnues** est constitué de 2 équations à deux inconnues, indissociables l'une de l'autre.

$$\begin{cases} 2x+3y=25 \\ 3x+2y=20 \end{cases}$$

**Résoudre un système de deux équations du $1^{\text{er}}$ degré à deux inconnues**, c'est trouver toutes les valeurs des inconnues qui vérifient les deux équations ***à la fois***; c'est-à-dire qui rendent vraies les deux égalités à la fois. Ces valeurs sont appelées **couple solution du système**

Exemple : $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{cases}$ est un système de deux équations du $1^{\text{er}}$ degré à deux inconnues. Le couple $(1\,;\,2)$ est la solution du système car les égalités $2\times1+2=4$ et $1+2=3$ sont vraies toutes les deux.

**Résolution d'un système de deux équations du $1^{\text{er}}$ degré à 2 inconnues**

**Méthode par substitution** Par définition, la substitution est l'action de remplacer, de mettre l'un à la place de l'autre.

Résoudre le système $\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+3y=10 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$$

Pour effectuer la substitution, il faut exprimer une des deux inconnues en fonction de l'autre. Ici, on a choisi d'exprimer $x$ en fonction de $y$ dans la $1^{\text{re}}$ équation (le coefficient de $x$ y est le plus simple : 1)

$$\begin{cases} x=\boxed{10-3y} \\ 3(x)+5y=18 \end{cases}$$

On effectue la substitution : remplacer $x$, dans la $2^{\text{e}}$ équation, par son expression en fonction de $y$. On obtient alors une équation du $1^{\text{er}}$ degré à une inconnue.

$$\begin{cases} x=10-3y \\ 3\boxed{(10-3y)}+5y=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10-3y \\ 30-9y+5y=18 \end{cases}$$

On résoud l'équation pour obtenir la valeur de $y$

$$\begin{cases} x=10-3y \\ 30-4y=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10-3y \\ -4y=18-30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - 3y \\ -4y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - 3y \\ y = -3 \end{cases}$$

Une fois la valeur d'une des deux inconnues obtenue, il ne reste qu'à remplacer cette inconnue par sa valeur dans la seule équation faisant encore intervenir les deux inconnues.

$$\begin{cases} x = 10 - 3 \times (-3) \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 + 9 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 19 \\ y = -3 \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(19; -3)$.

**Méthode d'élimination par combinaison** La combinaison est l'action de grouper, d'unir plusieurs objets pour en former un nouveau.

> Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \times 3 \\ \times 2 \end{array} \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$$

Pour combiner les deux équations, il faut qu'une des deux inconnues aient le même coefficient dans les deux équations. C'est ce que l'on fait ici avec l'inconnue $x$.

$$\begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 6x + 10y = 36 \end{cases}$$

On effectue la combinaison : on soustrait membre à membre les deux équations : ici, « la 2e moins la 1re ».

$$\begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 6x + 10y - (6x + 9y) = 36 - 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ 6x + 10y - 6x - 9y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y = 45 \\ y = -9 \end{cases}$$

Une fois la valeur d'une des deux inconnues obtenue, il ne reste qu'à remplacer cette inconnue par sa valeur dans la seule équation faisant encore intervenir les deux inconnues.

$$\begin{cases} 6x + 9 \times (-9) = 45 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 81 = 45 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = 45 + 81 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = 126 \\ y = -9 \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(21; -9)$.

## 2.3. Exercices

**Exercice 1** – equations/exo1

Pour 1080 francs, le père de Pierre a acheté 4 cravates et 3 chemises. Sachant que le prix d'une cravate est les $\frac{3}{5}$ de celui d'une chemise, quels sont les prix d'une cravate et d'une chemise ?

**Exercice 2** – equations/exo2

Les nombres 0; $-7$; 4; $-4$ sont-ils solutions de l'inéquation $1 - 5x \leqslant 21$ ?

**Exercice 3** – equations/exo3

Dans la cour de la ferme, il y a des poules et des lapins. J'ai compté 40 têtes et 106 pattes. Combien y-a-t-il de poules et de lapins ?

**Exercice 4** – equations/exo4

Bertrand reçoit son argent de poche du mois par sa mère. Il va voir son grand-père et reçoit la même chose. Sur le chemin du retour, il trouve une pièce de 5 euros. En arrivant chez lui, il s'aperçoit qu'il dispose de 75 euros.
Quel est le montant mensuel de l'argent de poche de Bertrand ?

**Exercice 5** – equations/exo5

Chez un fleuriste, une rose coûte 2€ de plus qu'une marguerite. Un bouquet de 7 roses et 5 marguerites coûte 20€. Quel est le prix d'une rose ? Quel est le prix d'une marguerite ?

**Exercice 6** – equations/exo6

Au musée du jouet, le prix d'entrée est 50 francs (7,62€) pour un adulte et 35 francs (5,34€) le prix d'entrée pour un enfant.

1. Calcule le pourcentage de réduction accordé au prix d'entrée « enfant » par rapport au prix d'entrée « adulte ».
2. Un dimanche, le musée du jouet a reçu 128 personnes et a fait une recette de 5260 francs. Calcule le nombre d'adultes et le nombres d'enfants présents ce dimanche au musée du jouet.

**Exercice 7** – equations/exo7

1. Résous l'inéquation $5 - 2x < x - 4$.
2. Représente l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

**Exercice 8** – equations/exo8

Un groupe de 16 personnes décide de déjeuner au self d'une entreprise. Deux menus sont proposés : le « Menu 1 » à 6€ et le « Menu 2 » à 8€. Chaque personne choisit un des deux menus et la dépense globale est de 110€.
Combien de personnes ont choisi le« Menu 1 » et combien ont choisi le« Menu 2 » ?

**Exercice 9** – equations/exo9

Au cinéma Rex, le prix d'un billet est de 42 francs (6,4€) pour un adulte et 34 francs (5,18€) pour un étudiant. 11 personnes assistent à la projection et paient 430 francs (65,55€).
Combien y a-t-il d'étudiants à cette séance ?

**Exercice 10** – equations/exo10

On considère l'inéquation $4x + 7 > 2 - 3x$.

1. (a) Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ? Justifier la réponse.
   (b) Le nombre $-1$ est-il solution de cette inéquation ? Justifier la réponse.

2. Résoudre l'inéquation $4x + 7 > 2 - 3x$ et représenter ses solutions sur une droite graduée.

**Exercice 11** – equations/exo11

Pierre et Nathalie possèdent ensemble 144 timbres de collection. Si Nathalie donnait 2 timbres à Pierre, alors celui-ci en aurait deux fois plus qu'elle. Combien chaque enfant a-t-il de timbres actuellement ?

**Exercice 12** – equations/exo12

Simon a quarante livres, les uns ont une épaisseur de $5\,cm$, les autres une épaisseur de $3\,cm$. S'il les range sur un même rayon, ils occupent $1,80\,m$. Combien Simon a-t-il de livres de chaque catégorie ?

**Exercice 13** – equations/exo13

On considère trois récipients notés $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$.
Le premier, $\mathcal{S}_1$, est une sphère de rayon $5\,cm$. Le second, $\mathcal{S}_2$, est un cylindre dont la base a un rayon égal à $5\,cm$ et dont la hauteur mesure $7\,cm$. Le troisième, $\mathcal{S}_3$, est un cône de révolution dont la base a un rayon égal à $5\,cm$ et dont la hauteur mesure $15\,cm$.

1. Quel récipient possède le plus grand volume ? le plus petit volume ? Justifier votre réponse.
2. Quelle est la hauteur $h$ du cylindre $\mathcal{S}_4$, dont la base a pour rayon $5\,cm$ sachant que $\mathcal{S}_4$ possède un volume double de celui de $\mathcal{S}_1$ ?

**Exercice 14** – equations/exo14

Quatre enfants découpent un pain d'épice préparé pour leur goûter. Alice en prend le tiers ; Benoît les $\dfrac{3}{5}$ de ce qu'à laissé Alice ; enfin Cécile et Clément, qui sont jumeaux, se partagent de manière égale le reste.
Quelle est la fraction du pain d'épice que reçoit chacun des jumeaux ?

**Exercice 15** – equations/exo15

Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux types de chaises, les unes vendues à 35€ pièce, les autres 60€ pièce.
L'entreprise souhaite que le montant des ventes soit strictement supérieur à 7 375€ par jour et elle veut fabriquer plus de chaises à 35€ que de chaises à 60€.
Combien doit-elle fabriquer de chaises à 35€ par jour ?

**Exercice 16** – equations/exo16

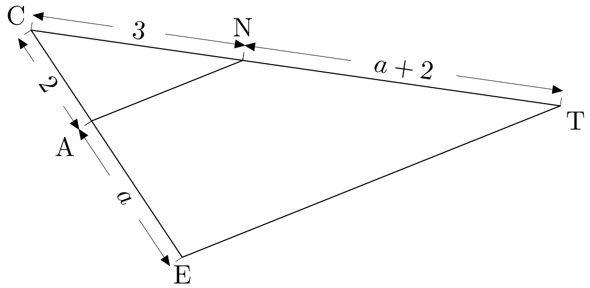
Deux frères, Marc et Jean, possèdent chacun un jardin. L'aire du jardin de Marc est les $3/4$ de l'aire du jardin de Jean. Les deux frères possèdent en tout $1\,470\,m^2$.
Quelles sont les aires des jardins de Marc et de Jean ?

**Exercice 17** – equations/exo17

Le périmètre d'un rectangle est $140\,mm$. En doublant la largeur initiale et en retranchant $7\,mm$ à la longueur initiale, on obtient un nouveau rectangle dont le périmètre est égal à $176\,mm$.
Quelles sont les dimensions du rectangle initial ?

**Exercice 18** – equations/exo18

Sur la figure ci-dessous, $a$ est un nombre positif ; la droite $(AN)$ est parallèle à la droite $(ET)$.
Détermine $a$.



**Exercice 19** – equations/exo19

1. Résous l'équation $50 + x = 3(8 + x)$.
2. Justine a 8 ans et sa grand-mère a 50 ans.
   Dans combien d'années, l'âge de sa grand-mère sera-t-il le triple de l'âge de Justine ?

**Exercice 20** – equations/exo20

Jean et Elsa ont chacun acheté un bouquet composé de roses et de marquerites. Le bouquet de Jean, composé de 5 roses et de 7 marguerites, coûte 7,4€. Le bouquet d'Elsa, composé de 8 roses et de 6 marguerites, coûte 10,8€.
Ecris et résous un système qui permette de calculer le prix d'une rose et d'une marguerite.

**Exercice 21** – equations/exo21

On dispose de $n$ jetons que l'on veut disposer en carré. Par exemple, on peut disposer 16 jetons en un carré de 4 jetons de côté.
En essayant de former un premier carré avec $n$ jetons sur chaque côté, on constate qu'il y a 10 jetons de trop.
En réessayant avec un jeton de plus sur le côté, il manque 17 jetons.
Combien y-a-t-il de jetons en tout ?

**Exercice 22** – equations/exo22

Un opérateur de téléphone portable propose trois formules. L'unité de durée des communications est la minute.

**Formule « libre »** : pas d'abonnement, 0,50€ par minute.

**Formule « éco »** : forfait 2 heures mensuelles pour 25€, chaque minute supplémentaire est facturée 0,30€.

**Formule « pro »** : durée et nombre de communications non limités, prix mensuel 40€.

1. Calcule le coût de 3 heures de communication pour chaque formule.
2. Détermine pour quelle durée un client aura le même montant à payer avec la formule « libre » qu'avec la formule « eco ».
3. Détermine pour quelle durée un client aura le même montant à payer avec la formule « libre » qu'avec la formule « pro ».
4. Détermine pour quelle durée un client aura le même montant à payer avec la formule « pro » qu'avec la formule « eco ».

**Exercice 23** – equations/exo23

Résous l'équation

$$(-3x + 1)^2 - 9(2x + 7)^2 = 0$$

**Exercice 24** – equations/exo24

*Les questions sont indépendantes.*

1. Sachant que $\pi$ est compris entre 3,14 et 3,15, trouve un encadrement du périmètre d'un cercle de rayon $5\,cm$ et un encadrement de l'aire d'un disque de même rayon.
2. Au semi-marathon de Cours-la-Ville, les organisateurs décident de distribuer une somme d'argent aux trois premiers. Ils se mettent d'accord pour attribuer $\frac{3}{5}$ de la somme totale au vainqueur, $\frac{1}{3}$ au second, et au moins 200€ au troisième.
   Quelles informations peut-on en déduire concernant la somme totale qu'ils décident de distribuer ?

**Exercice 25** – equations/exo25

Deux personnes $A$ et $B$ n'ont qu'une bicyclette pour rejoindre la gare qui est à $23\,km$. $B$ s'empare du vélo et file à $15\,km.h^{-1}$, cependant que $A$ le suit à pied, à $6\,km.h^{-1}$.
Après un certain trajet, B s'arrête et poursui son chemin à pied à $5\,km.h^{-1}$. A trouve la bicyclette et rejoint la gare à $11\,km.h^{-1}$. Les deux persones arrivent en même temps à la gare.
A quelle distance de la gare $B$ a-t-il abandonné le vélo ? Combien de temps à duré le trajet ?

Chapitre 3

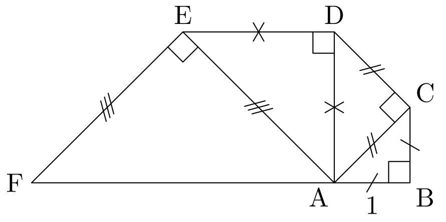
# Les racines carrées

## Sommaire

# 3.1. Activités

## 3.1.1 Définition

A l'aide de la figure ci-dessous, calcule la longueur $AF$.




## 3.1.2 Racines carrées et opérations

1. (a) Recopie et complète

$$\sqrt{16} = \ldots \qquad \sqrt{9} = \ldots \qquad \sqrt{16}+\sqrt{9} = \ldots\ldots = \ldots \qquad \sqrt{16+9} = \ldots\ldots = \ldots$$
$$\sqrt{36} = \ldots \qquad \sqrt{64} = \ldots \qquad \sqrt{36}+\sqrt{64} = \ldots\ldots = \ldots \qquad \sqrt{36+64} = \ldots\ldots = \ldots$$

   (b) Que remarque-t-on ?

2. (a) Recopie et complète

$$\sqrt{4}\times\sqrt{9} = \ldots\ldots = \ldots \qquad \sqrt{4\times 9} = \ldots\ldots = \ldots$$
$$\sqrt{4}\times\sqrt{25} = \ldots\ldots = \ldots \qquad \sqrt{4\times 25} = \ldots\ldots = \ldots$$
$$\sqrt{16\times 4} = \ldots\ldots = \ldots \qquad \sqrt{16}\times\sqrt{4} = \ldots\ldots = \ldots$$

   (b) Que remarque-t-on ?

   (c) Il faut prouver cette remarque.
   Soit $a$ et $b$ deux nombres positifs. On a

$$\left.\begin{aligned} \left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 &= \ldots^2 \times \ldots^2 = \ldots\ldots \\ \sqrt{a\times b}^2 &= \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

   Donc

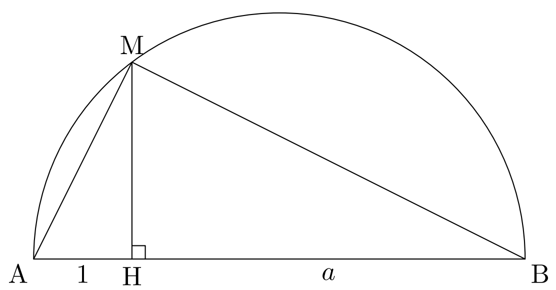
$$\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 - \sqrt{a\times b}^2 = \ldots$$
$$(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \times (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots$$

   D'où

$$\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right) \ldots \sqrt{a\times b} \qquad \text{ou} \qquad \underbrace{\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right) \ldots - \sqrt{a\times b}}_{\ldots\ldots\ldots}$$

## 3.1.3 Racines carrées et produit : démonstration à base géométrique

### Construction de la racine carrée d'un nombre positif




Considérons la figure ci-contre où $a$ est un nombre positif. $H$ est le point du segment $[AB]$ tel que $AH = 1$ et $HB = a$. La perpendiculaire à la droite $(AB)$ passant par $H$ coupe le demi-cercle de diamètre $[AB]$ en $M$.

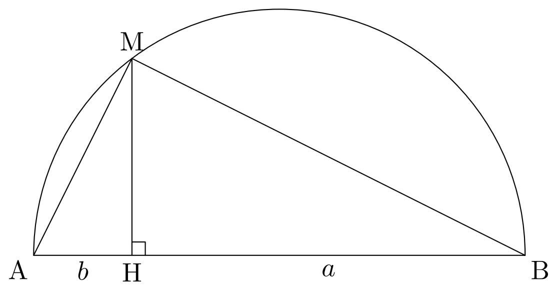
1. Applique le théorème de Pythagore au triangle $AHM$ rectangle en $H$.
2. Applique le théorème de Pythagore au triangle $BHM$ rectangle en $H$.
3. Explique pourquoi le triangle $AMB$ est rectangle en $M$ et prouve que

$$(a+1)^2 = AM^2 + BM^2$$

4. En utilisant les résultats des questions précédentes, montre que

$$MH = \sqrt{a}$$

### Construction de la racine carrée du produit de 2 nombres positifs




Considérons la figure ci-contre où $a$ et $b$ sont deux nombres positifs. $H$ est le point du segment $[AB]$ tel que $AH = b$ et $HB = a$. La perpendiculaire à la droite $(AB)$ passant par $H$ coupe le demi-cercle de diamètre $[AB]$ en $M$.

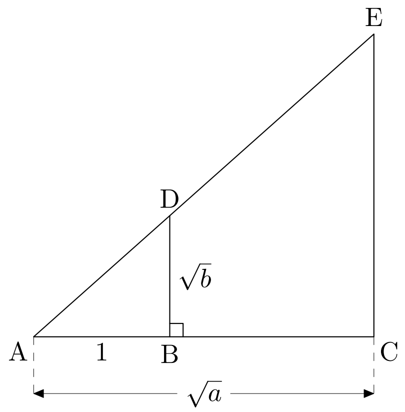
1. Applique le théorème de Pythagore au triangle $AHM$ rectangle en $H$.
2. Applique le théorème de Pythagore au triangle $BHM$ rectangle en $H$.
3. Explique pourquoi le triangle $AMB$ est rectangle en $M$ et prouve que

$$(a+b)^2 = AM^2 + BM^2$$

4. En utilisant les résultats des questions précédentes, montre que

$$MH = \sqrt{a \times b}$$

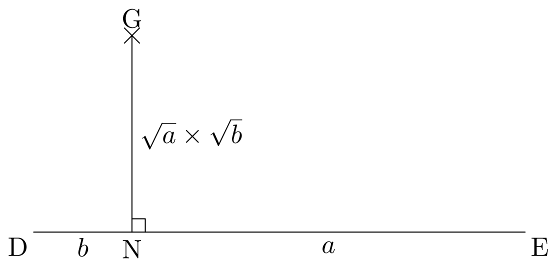
### Construction du produit de 2 racines carrées




Considérons la figure ci-contre où $a$ et $b$ sont deux nombres positifs.
Les longueurs $AC$ et $DB$ sont obtenues par report de longueur.
Le triangle $ADB$ est rectangle en $B$ et les droites $(EC)$ et $(DB)$ sont parallèles.
Démontre que

$$EC = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

### Démonstration




Considérons la figure ci-contre où $a$ et $b$ sont deux nombres positifs. La longueur $GN$ est obtenue par report de longueur.

1. Exprime $DE^2$, $DG^2$, $GE^2$ en fonction de $a$ et $b$.
2. Démontre que le triangle $DGE$ est rectangle en $G$.
3. Conclue que $GN = \sqrt{æ \times b}$.

### 3.1.4 L'équation « $X^2 = a$ »

1. Ecris les nombres suivants sous la forme d'un carré.

   (a) 16
   (b) 49
   (c) 56,25
   (d) 8
   (e) 45
   (f) 72

2. Factorise les expressions suivantes.

   (a) $x^2 - 16$
   (b) $x^2 - 49$
   (c) $x^2 - 56,25$
   (d) $x^2 - 8$
   (e) $x^2 - 45$
   (f) $x^2 - 72$

3. Résous les équations suivantes.

   (a) $x^2 = 16$
   (b) $x^2 = 49$
   (c) $x^2 = 56,25$
   (d) $x^2 = 8$
   (e) $x^2 = 45$
   (f) $x^2 = 72$

4. Combien y-a-t-il de solutions pour chacune de ces équations ?
5. Démontrons cette remarque dans le cas général.
   Soit $a$ un nombre quelconque et cherchons à trouver les valeurs de $x$ telles que $x^2 = a$.
   Puisque $x^2$ est toujours positif, alors le cas où $a$ est un nombre négatif est impossible.
   Si $a = 0$ alors on doit résoudre $x^2 = 0$ et on a $x = 0$.
   Si $a$ est un nombre strictement positif alors

$$\begin{aligned} x^2 &= a \\ x^2 - a &= 0 \\ x^2 - \sqrt{a}^2 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots &= 0 \end{aligned}$$

   Il y a donc, dans le cas où $a$ est un nombre ........., ...solutions qui sont .................
   ......................................................................................

## 3.2. Cours

### 3.2.1 Définition

Si $a$ est un nombre positif alors **la racine carrée** de $a$, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est $a$.

$$\text{Si } a \geq 0 \text{ alors } \sqrt{a} \geq 0 \text{ et } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Exemples : $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$.
$\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$ et 5 est positif.
$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ car $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ et $\frac{3}{2}$ est positif.

Si $a$ est un nombre positif alors $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples : $\sqrt{5,6^2} = 5,6$, $\sqrt{\pi^2} = \pi$.

### 3.2.2 Produit et Quotient de 2 racines carrées

#### Racine carrée et multiplication

Si $a$ et $b$ sont deux nombres positifs alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemples :

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \qquad \text{Simplification d'écriture}$$
$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$
$$3\sqrt{7} = \sqrt{9} \times \sqrt{7} = \sqrt{63}$$

#### Racine carrée et division

Si $a$ et $b$ sont deux nombres positifs avec $b \neq 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples :

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} \qquad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{15}{3}} = \sqrt{5}$$

### 3.2.3 L'équation $X^2 = a$

Soit $a$ un nombre positif.
- Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet 2 solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution : 0.

Exemples : Soit l'équation $x^2 = 5$.
L'équation admet deux solutions : $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$.

## 3.3. Exercices

**Exercice 1** – racines/exo1

On donne

$$A = \sqrt{12} + 5\sqrt{75} - 2\sqrt{27} \qquad B = \left(5+\sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2$$

Ecris $A$ sous la forme $a\sqrt{3}$ et $B$ sous la forme $b\sqrt{3}$ où $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs.

**Exercice 2** – racines/exo2

Soit $x = \sqrt{5}\left(1-\sqrt{2}\right)$ et $y = 5+\sqrt{2}$.
Calcule $x^2$; $y^2$; $x^2+y^2$; $\sqrt{x^2+y^2}$.

**Exercice 3** – racines/exo3

On pose $F = \left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right) - 8\sqrt{7}\left(1-\sqrt{7}\right)$
Ecris $F$ sous la forme $a+b\sqrt{7}$ ($a$ et $b$ sont des nombres entiers relatifs).

**Exercice 4** – racines/exo4

L'unité de mesure choisie est le centimètre. On donne trois points $A$, $B$ et $C$ tels que

$$AB = 2\sqrt{3},\ BC = \sqrt{75},\ AC = \sqrt{147}$$

1. Vérifie que $AB + BC = AC$.
2. Que peux-tu en conclure pour ces trois points ? Justifie ta réponse.

**Exercice 5** – racines/exo5

*Les questions sont indépendantes.*

1. Soit $RST$ un triangle tel que $RS = \sqrt{45}$, $ST = 3\sqrt{5}$, $TR = \sqrt{90}$. Quelle est la nature de ce triangle ?
2. Calcule et donne le résultat sous la forme d'un entier relatif ou d'une fraction irréductible :

$$A = \left(2+3\sqrt{5}\right)\left(2-3\sqrt{5}\right) \qquad B = \frac{3\sqrt{45}}{6\sqrt{20}}$$

3. Ecris le nombre $E$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où $a$ et $b$ sont des nombres entiers.

$$E = \sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 2\sqrt{27}$$

**Exercice 6** – racines/exo6

La formule

$$P = 0,08 \times S \times V^2$$

permet de calculer la vitesse limite $V$ (en $m/s$) atteinte par un parachutiste lors de sa descente.
$S$ représente la superficie du parachute exposée à la résistance de l'air (en $m^2$).
$P$ est la masse du parachutiste (en $kg$).
En supposant que $S = 40\,m^2$, calcule la vitesse limite atteinte par un parachutiste de $80\,kg$. On donnera une valeur exacte puis un arrondi au dixième.

**Exercice 7** – racines/exo7

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = \sqrt{2\,000}$ et $BC = \sqrt{1\,000}$.

1. La longueur est-elle le double de la largeur ? Pourquoi ?
2. Exprime $\sqrt{2\,000}$ sous la forme $a\sqrt{5}$ et $\sqrt{1\,000}$ sous la forme $b\sqrt{10}$, où $a$ et $b$ sont des entiers.

3. Exprime l'aire du rectangle sous la forme $c\sqrt{2}$, où $c$ est un nombre entier.
4. Montre que le périmètre du rectangle peut s'écrire sous la forme

$$20\sqrt{5}\left(2+\sqrt{2}\right)$$

**Exercice 8** – racines/exo8

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

| | |
|---|---|
| $\sqrt{3}-1$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ |
| $\left(\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ | $\sqrt{3}+1$ |

Chapitre 4

# Arithmétique

## Sommaire

## 4.1. Activités

### 4.1.1 Diviseurs d'un nombre entier

1. Effectue les divisions euclidiennes suivantes :

   (a) 399 par 21
   (b) 279 par 9
   (c) 357 par 17
   (d) 171 par 19
   (e) 252 par 14
   (f) 1 683 par 99

   Que remarque-t-on ?
2. Traduis chacune de ces divisions par une égalité.
3. Peut-on faire la même remarque pour 543 et 18 ?

### 4.1.2 Diviseurs communs à deux nombres entiers

1. (a) Donne les diviseurs de 399.
   (b) Donne les diviseurs de 171.
   (c) Que remarque-t-on ?
2. (a) Donne les diviseurs de 145.
   (b) Donne les diviseurs de 78.
   (c) Que remarque-t-on ?

### 4.1.3 Propriétés du PGCD de 2 nombres entiers

Dans toute cette activité, $a$ et $b$ sont deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$.

#### Diviseurs et opérations

1. (a) Donne un diviseur $d$ (différent de 1) commun à 45 et à 35.
   (b) $d$ est-il un diviseur de $45 + 35$ ? de $45 - 35$ ?
2. Supposons que 2 soit un diviseur de $a$ alors $a = 2 \times n$ avec $n$ un nombre entier.
   Supposons que 2 soit un diviseur de $b$ alors $b = 2 \times m$ avec $m$ un nombre entier.
   Alors

   $a + b = \ldots \times n + \ldots \times m = \ldots \times \ldots\ldots$ d'où 2 est un diviseur de .........
   $a - b = \ldots \times n - \ldots \times m = \ldots \times \ldots\ldots$ d'où 2 est un diviseur de .........

3. Si 5 est un diviseur commun à $a$ et $b$, prouve que 5 est aussi un diviseur de $a - b$.
   5 est un diviseur de ... alors ... $= 5 \times$ ... avec $n$ un nombre entier.
   5 est ..........................................................................................
   Donc $a - b =$ ............... $= \ldots \times \ldots\ldots$ d'où ...............................................

#### Théorie

Si $k$ est un diviseur commun de $a$ et de $b$ alors $a = k \times a'$ et $b = k \times b'$ avec $a'$ et $b'$ des nombres entiers.
Donc $a - b =$ ..........................................................................................
d'où $k$ est un diviseur de $a - b$.

Application Soit $k = \text{PGCD}(a, b)$. Donc

$$\left.\begin{array}{l} k \text{ divise } a-b \\ k \text{ divise } b \end{array}\right\} \text{Donc } k \text{ est un diviseur commun à } b \text{ et } a-b.$$

Est-ce le plus grand ? Soit $l$ le PGCD$(b; a-b)$. Alors $k \leqslant l$ et $b = l \times b_1$ et $a - b = l \times c_1$.
On obtient alors que

$$a = a - b + b = l \times c_1 + l \times b_1 = l \times (c_1 + b_1)$$

$l$ est donc un diviseur commun de $a$ et $b$ et $l \leqslant k$. Donc $k$ est le $pgcd(b; a-b)$.

#### Pratique

Comment faire, avec cette méthode, pour trouver le PGCD$(254, 76)$ ?

### 4.1.4 PGCD et Division Euclidienne

#### Exemple

Effectue la division euclidienne de 434 par 126.

$$434 = 126 \times \ldots + \ldots$$

Soit $d$ le PGCD$(434; 126)$ donc $434 = d \times n$ et $126 = d \times m$ avec $n$ et $m$ deux nombres entiers.
Est-ce que $d$ divise 56 ?
$56 = 434 - 3 \times 126 = \ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots \times \ldots\ldots$ donc .....................
..........................................................................................

$$\left.\begin{array}{l} d \text{ divise } 56 \\ d \text{ divise } 126 \end{array}\right\} \text{Donc } d \text{ est un diviseur commun de 126 et 56.}$$

Est-ce le plus grand ? Soit $l$ le PGCD$(126; 56)$. Alors $d \leqslant l$ et $126 = l \times n$ et $56 = l \times m$.
On obtient

$$434 = 126 \times 3 + 56 = l \times n \times 3 + l \times m = l \times (3n + m)$$

$l$ est donc un diviseur commun à 434 et 126 donc $l \leqslant d$.
$d$ est donc le PGCD$(126; 56)$.

#### Théorie

Soit $(q; r)$ le couple obtenu par la division euclidienne de $a$ par $b$.

$$a = b \times q + r$$

Soit $d$ le PGCD$(a; b)$ donc $a = d \times n$ et $b = d \times m$ avec $n$ et $m$ deux nombres entiers.
$r = a - b \times q = \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \times \ldots\ldots\ldots$ donc $d$ divise $r$.

$$\left.\begin{array}{l} d \text{ divise } r \\ d \text{ divise } b \end{array}\right\} \text{Donc } d \text{ est un diviseur commun à } b \text{ et } r.$$

Est-ce le plus grand ? Soit $l$ le PGCD$(b; r)$. Alors $d \leqslant l$ et $b = l \times b_1$ et $r = l \times r_1$.
On obtient alors que

$$a = b \times q + r = l \times b_1 \times q + l \times r_1 = l \times (b_1 \times q + r_1)$$

$l$ est donc un diviseur commun de $a$ et $b$ et $l \leqslant d$. Donc $d$ est le $pgcd(b; r)$.

#### Pratique

Comment faire, avec cette propriété, pour trouver le PGCD 548, 124 ?

## 4.2. Cours

### 4.2.1 Vocabulaire

La division euclidienne d'un nombre entier $a$ par un nombre entier $b$ non nul permet d'obtenir le couple $(q;r)$ de nombres entiers tels que

$$a = b \times q + r \qquad \text{avec } r < b$$

Exemple :$417 = 19 \times 21 + 18$

Dans la division euclidienne de $a$ par $b$ ($a$ et $b$ sont deux nombres entiers), si le reste $r$ est nul alors on dit que :
- $a$ est un multiple de $b$ ;
- $a$ est divisible par $b$ ;
- $b$ est un diviseur de $a$ ;
- $b$ divise $a$.

Exemple : 325 est un multiple de 25 car $325 = 25 \times 13$ (325 est aussi un multiple de 13).
399 est divisible par 19 car $399 = 19 \times 21$ (19 et 21 sont des diviseurs de 399).

### 4.2.2 Diviseurs communs à deux nombres entiers

Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers non nuls. Un diviseur commun à $a$ et $b$ est un nombre entier qui divise à la fois $a$ et $b$.

Exemple : 6 est un diviseur commun de 12 et 18 (car $12 = 6 \times 2$ et $18 = 6 \times 3$).
11 est un diviseur commun de 99 et 132 (car $99 = 11 \times 9$ et $132 = 11 \times 12$).

Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers strictement positifs.
Parmi tous les diviseurs communs à $a$ et $b$, l'un deux est plus grand que tous les autres.
On l'appelle le Plus Grand Commun Diviseur ou PGCD. On le note $\text{PGCD}(a;b)$.

Exemple : Les diviseurs de 12 sont 1; 2; 3; 4; 6; 12. Les diviseurs de 8 sont 1; 2; 4. Le plus grand des diviseurs communs est 4 donc $\text{PGCD}(12;8) = 4$.

Soit $a$ et $b$ deux entiers strictement positifs.
Lorsque $\text{PGCD}(a;b) = 1$, on dit que les nombres $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

### 4.2.3 Calcul du PGCD

Si $a$ et $b$ sont deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$ alors

$$\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(a-b;b)$$

Cette propriété permet de trouver le PGCD par **soustractions successives**

$$\left.\begin{array}{l}
\text{PGCD}(95;57) = \text{PGCD}(38;57) \text{ car } 98 - 57 = 38 \\
\text{PGCD}(57;38) = \text{PGCD}(19;38) \text{ car } 57 - 38 = 19 \\
\text{PGCD}(38;19) = \text{PGCD}(19;19) = 19 \text{ car } 57 - 38 = 19
\end{array}\right\} \text{Donc } \text{PGCD}(95;57) = 19$$

Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers strictement positifs tels que $a > b$.
Si $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ alors

$$\text{PGCD}(a;b) = \text{PGCD}(b;r)$$

Cette propriété permet de trouver le PGCD par **l'algorithme d'Euclide**

| $a$ | $b$ | $r$ | |
|---|---|---|---|
| 1 078 | 322 | 112 | car $1\,078 = 3 \times 322 + 112$ |
| 322 | 112 | 98 | car $322 = 2 \times 112 + 98$ |
| 112 | 98 | 14 | car $112 = 1 \times 98 + 14$ |
| 98 | 14 | 0 | car $98 = 7 \times 14 + 0$ |

Le processus s'arrête car les restes deviennent de plus en plus petit.
Le PGCD$(a;b)$ est $\boxed{\text{le dernier reste non nul}}$. Donc PGCD$(1\,078;322) = 14$.

### 4.2.4 Fractions irréductibles

Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers tels que $b \neq 0$.
Une fraction $\dfrac{a}{b}$ est dite irréductible lorsque $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

Exemple : La fraction $\dfrac{2}{3}$ est irréductible car PGCD$(2;3) = 1$.
La fraction $\dfrac{322}{1\,078}$ n'est pas irréductible car PGCD$(322;1\,078) = 14$.

$$\frac{322}{1\,078} = \frac{23 \times 14}{77 \times 14} = \frac{23}{77}$$

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{17}{9}; \dots\right)$.

Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel $\left(\pi; \sqrt{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dots\right)$.

## 4.3. Exercices

**Exercice 1** – arithmetique/exo1

$n$ est un entier supérieur à 6 et on pose

$$F = \frac{n+9}{n-6}$$

1. Donne la forme irréductible de $F$ pour $n = 9$, $n = 25$, $n = 46$.
2. Démontre que
$$F = 1 + \frac{15}{n-6}$$
3. Déduis-en toutes les valeurs de $n$ pour lesquelles $F$ est un nombre entier.

**Exercice 2** – arithmetique/exo2

1. Calcule le $\mathrm{PGCD}(32\,760, 61\,425)$.
2. Rends irréductible la fraction $\dfrac{32\,760}{61\,425}$.

**Exercice 3** – arithmetique/exo3

1. Ecris les fractions suivantes sous leur forme irréductible
$$a = \frac{4862}{2145} \qquad b = \frac{3450}{759}$$
2. Le quotient du produit de 2 nombres $x$ et $y$ par leur PGCD s'appelle le Plus Petit Commun Multiple noté $\mathrm{ppcm}(x; y)$.
   (a) Exprime $\mathrm{ppcm}(x; y)$ en fonction de $x$, $y$ et $\mathrm{PGCD}(x; y)$.
   (b) Calcule le $\mathrm{ppcm}(429; 11)$.
   (c) Déduis-en la somme de $a$ et $b$.

**Exercice 4** – arithmetique/exo4

1. Donne l'égalité traduisant la division euclidienne de $1\,512$ par $21$.
2. Rends irréductible la fraction $\dfrac{720}{1\,512}$.

CHAPITRE 5

# Fonctions affines, linéaires – Proportionnalité

## Sommaire

# 5.1. Activités

## 5.1.1 Notion de fonction

On considère le tableau suivant dans lequel chaque nombre de la deuxième colonne s'obtient à partir du nombre correspondant de la première colonne par un certain procédé.

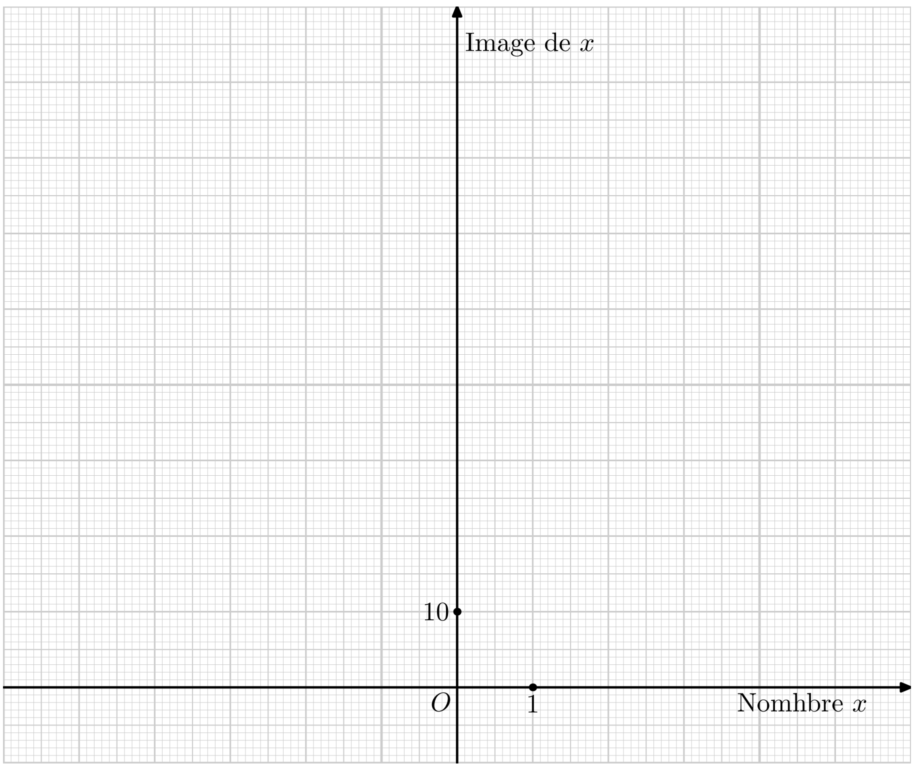
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 4 |
| $-3$ | 9 |
| 5 | 25 |
| 7 | 49 |
| 11 | |
| $-8$ | |

1. Recopie et complète le tableau.
2. Trouve le procédé qui permet de passer de la 1re colonne à la 2e colonne.

Un tel procédé s'appelle **une fonction** que l'on note $f$.
Les nombres $y$ sont les **images** des nombres $x$ par $f$. Par exemple, l'image de 2 par la fonction $f$ est 4 ; ce que l'on note

$$f(2) = 4 \text{ ou } f : 2 \mapsto 4$$

3. Quelle est l'image de 3 ? de 0 ? de $-5$ ? Répondre en utilisant les notations ci-dessus.
4. On peut également représenter graphiquement une fonction. On place sur l'axe des abscisses les nombres $x$ et sur l'axe des ordonnées les images de ces nombres $x$ par la fonction.
   Place, dans le repère ci-dessous, les points correspondants au tableau ci-dessus.




## 5.1.2 Fonction linéaire : définition

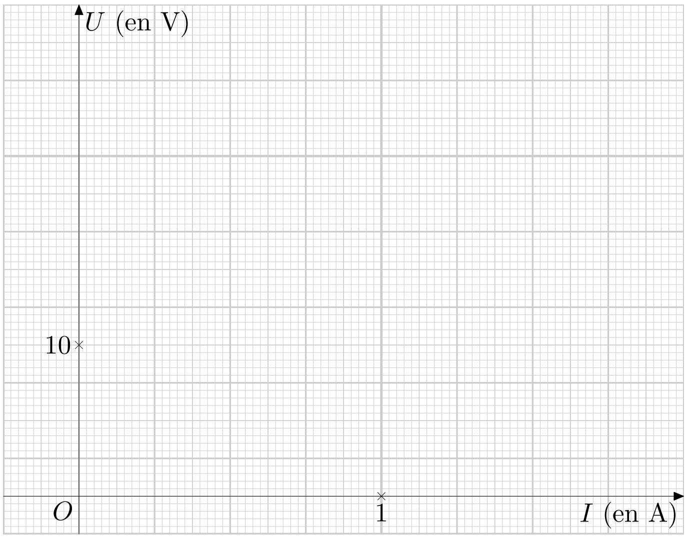
1. $U$ est la tension, en volts, aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance $20\,\Omega$ traversé par un courant d'intensité $I$, en ampères. **La loi d'Ohm** permet d'affirmer que $U = 20I$.
   (a) Recopie et complète le tableau. Est-ce un tableau de proportionnalité ?

| $I$ | 0,2 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|
| $U$ | | | | |

.................................................................................................

.................................................................................................

(b) Place les points du tableau dans le repère ci-dessous. Retrouve-t-on le fait que ce tableau est de proportionnalité ?




. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

2. (a) Pour aller au collège en bus, Amélie a deux formules possibles :
   - **1re formule** : 0,6€ pour un trajet.
   - **2e formule** : 3,8€ par mois et 0,3€ pour un trajet.

   i. Pour chaque formule, calcule le prix à payer pour 10 trajets dans le mois.

   ii. Plus généralement, pour indiquer que les prix **dépendent** du nombre $x$ de trajets dans le mois, on note $P_1(x)$ et $P_2(x)$ les prix payés respectivement avec la 1re formule et la 2e formule. Complète le tableau suivant.

| | Expression en fonction de $x$ | Programme de calcul |
|---|---|---|
| **Situation 1** | $P_1(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ | $x \xrightarrow{\times\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ |
| **Situation 2** | $P_2(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ | $x \xrightarrow{\times\ldots} \ldots\ldots \xrightarrow{\ldots} \ldots\ldots$ |

   iii. Calcule $P_1(20)$ et $P_2(20)$.

(b) En 1998, la production de blé a augmenté de 8% par rapport à 1997 pour tous les agriculteurs

   i. Si un agriculteur a produit 540 quintaux de blé en 1997, calcule sa production en 1998.

   ii. En 1997, un agriculteur a produit $x$ quintaux de blé. Notons $Q(x)$ sa production en 1998. Recopie et complète

$$Q(x) = x + \ldots\ldots \times x = (\ldots + \ldots) \times x = \ldots \times x$$

   iii. Recopie et complète

| | Expression en fonction de $x$ | Programme de calcul |
|---|---|---|
| **Situation 3** | $Q(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ | $x \xrightarrow{\times\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ |

iv. Calcule $Q(1000)$.

(c) $RST$ est un triangle rectangle isocèle en $R$. Notons $x$ la longueur $RT$ et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce triangle. Recopie et complète

| | Expression en fonction de $x$ | Programme de calcul |
|---|---|---|
| **Situation 4** | $\mathcal{A}(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ | $x \xrightarrow{\dots\dots} \dots\dots \xrightarrow{\dots\dots} \dots\dots$ |

Calcule $\mathcal{A}(5)$.

(d) Lorsqu'à tout nombre $x$ on associe le produit $a \times x$ (où $a$ est un nombre « fixe »), on définit **la fonction linéaire** de <u>coefficient</u> $a$.
Quelles sont les situations étudiées qui définissent une fonction linéaire ? Donne leur coefficient.

### 5.1.3 Fonction linéaire : représentation graphique

Soit $f$ la fonction linéaire de coefficient 2.

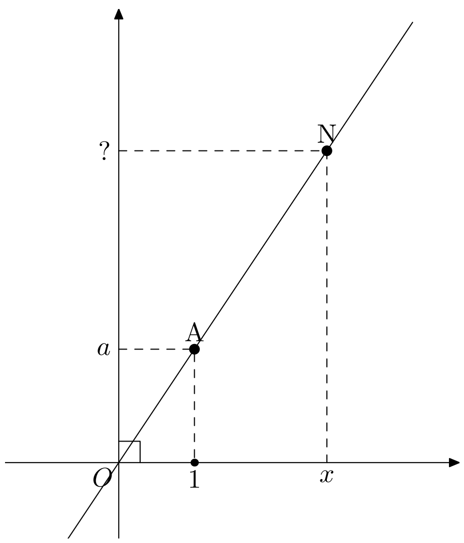
$$f : x \mapsto 2x \quad \text{ou} \quad f(x) = 2x$$

1. Recopie et complète le tableau.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | $-1$ | $-2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

2. Place les points obtenus dans un repère. Que remarque-t-on ?
3. Il faut maintenant prouver cette remarque.

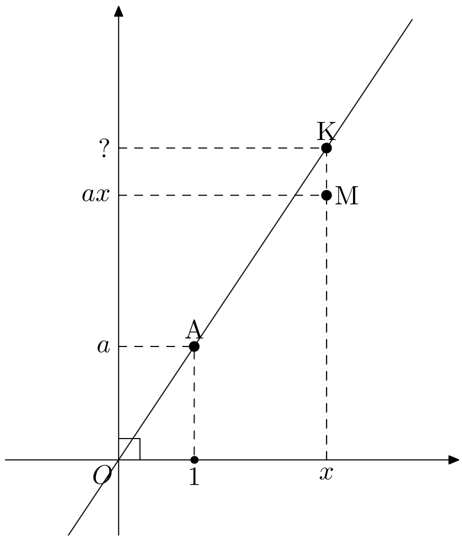
(a) Soit $g$ une fonction linéaire de coefficient $a$ ($a \neq 0$).




Sur le graphique ci-contre, on a placé les points $O$ et $A$ qui appartiennent à la représentation graphique de $g$.
Soit $N$ un point de la droite $(OA)$ d'abscisse $x$.
Prouve que l'ordonnée de $N$ est $a \times x$.

Si $N$ est un point de la droite $(OA)$ alors $N$ appartient à la représentation graphique de $g$.

(b)




Sur le graphique ci-contre, $O$, $A$ et $M$ appartiennent à la représentation graphique de $g$. $K$ est le point de la droite $(OA)$ qui a la même abscisse que $M$.
Quelles sont les coordonnées de $M$ ?
Quelles sont les coordonnées de $K$ ?
Que peut-on en conclure ?

Si $O$, $A$ et $M$ sont trois points de la représentation graphique de $g$ alors ils sont ................................

### 5.1.4 Fonction affine : représentation graphique

1. Un vendeur de voitures reçoit un salaire de 180€ par voiture vendue. Soit $x$ le nombre de voitures vendues mensuellement.
   (a) Exprime, en fonction de $x$, le salaire $S(x)$ du vendeur.
   ..........................................................................................
   (b) Quel type de fonction obtient-on ? Donne son élément caractéristique.
   ..........................................................................................
   (c) Représente graphiquement la fonction $S$. On obtient la droite $(d)$. Donne une équation de la droite $(d)$.
   (Abscisse : $1\,cm$ pour 1 voiture - Ordonnée : $1\,cm$ pour 90€).
2. Le patron, souhaitant récompenser son vendeur, décide d'augmenter de manière fixe son salaire. L'augmentation s'élève à 270€.
   (a) Exprime, en fonction de $x$, le salaire $S_1(x)$ du vendeur.
   ..........................................................................................
   (b) Quel type de fonction obtient-on ? Donne ses éléments caractéristiques.
   ..........................................................................................
   (c) Comment va se traduire graphiquement cette augmentation ?
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   A quelle transformation géométrique cela correspond-t-il ?
   ..........................................................................................
   ..........................................................................................
   (d) Représente alors dans le même repère la fonction $S_1$.
3. Trace la droite $(d)$ réprésentant la fonction linéaire qui à $x$ associe $-\frac{1}{4}x$ puis construis la représentation graphique de la fonction affine qui à $x$ associe $-\frac{1}{4}x+4$.

## 5.2. Cours

### 5.2.1 Fonction linéaire

**Définitions**

Exemple : L'unité de longueur est le centimètre. Notons $x$ la longueur du côté d'un carré et $y$ le périmètre de ce carré.

| $x$ | 1 | 0,8 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 3,2 | 12 |

On obtient un tableau de proportionnalité : le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté et 4 est le coefficient de proportionnalité.
On peut écrire $y = 4 \times x$ ou $y = 4x$.

Soit $a$ un nombre quelconque « fixe ».
Si à chaque nombre $x$ on peut associer son produit par $a$ (c'est à dire $x \times x$) alors on définit **la fonction linéaire** de coefficient $a$

$$x \xrightarrow{\times a} ax$$

On dit que $ax$ est l'image de $x$.

Notation La fonction linéaire de coefficient $a$ se note $x \mapsto ax$ et se lit « à $x$, on associe $ax$ ».
On peut également la noter par une lettre, $f$ par exemple. Alors l'image de $x$ par la fonction linéaire $f$ se note $f(x)$ et se lit « $f$ de $x$ ».

Exemple
- La fonction linéaire qui à $x$ associe le nombre $4x$ a pour coefficient 4. On écrit

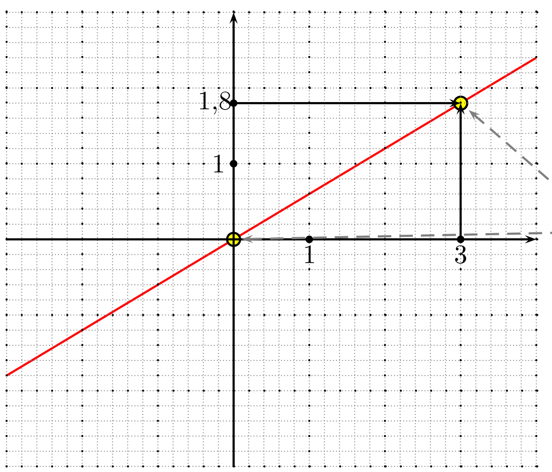
$$f : x \mapsto 4x \text{ ou } f(x) = 4x$$

- Si $f$ est la fonction linéaire de coefficient $-2$ alors l'image de 3 est $-2 \times 3 = -6$ et on note $f(3) = -6$.
- Si $g$ est la fonction linéaire de coefficient 5 alors le nombre $x$ qui a pour image 15 est 3.

Remarque : Une fonction linéaire représente une situation de proportionnalité.

**Représentation graphique d'une fonction linéaire**

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient $a$ est une droite passant par l'origine du repère.




Représenter graphiquement la fonction linéaire $f$ de coefficient 0,6.

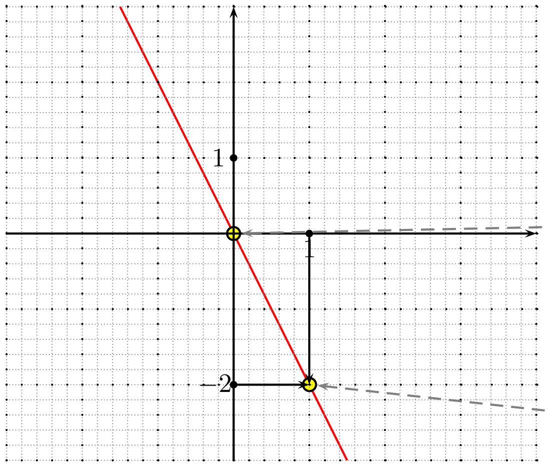
$$f : x \mapsto 0,6x$$

Comme $f$ est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite qui passe par $\boxed{\text{l'origine du repère}}$.

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1,8 |

On prend $x = 3$ : son image est $f(3) = 0,5 \times 3 = 1,8$. Je place $\boxed{\text{le point de coordonnées } (3; 1,8)}$.

Soit $(d)$ la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient $a$.
On dit alors que $a$ est **le coefficient directeur** de la droite $(d)$ et que $y = ax$ est une **équation de la droite** $(d)$.




Représenter graphiquement la fonction linéaire $g$ de coefficient $-2$.

$$f : x \mapsto -2x$$

Comme $f$ est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite qui passe par $\boxed{\text{l'origine du repère}}$.

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | -2 |

On prend $x = 1$ : son image est $g(1) = -2 \times 1 = -2$. Je place $\boxed{\text{le point de coordonnées } (1; -2)}$.

**Fonction linéaire et pourcentage**

Prendre $t\%$ d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\dfrac{t}{100}$.
Augmenter un nombre de $t\%$, c'est multiplier ce nombre par $1 + \dfrac{t}{100}$.
Diminuer un nombre de $t\%$, c'est multiplier ce nombre par $1 - \dfrac{t}{100}$.

Exemples $15\%$ de $x$ : $x \times \dfrac{15}{100}$. On lui associe la fonction linéaire $x \mapsto 0,15 \times x$.
Diminuer $x$ de $12\%$ : $x \times \left(1 - \dfrac{12}{100}\right) = x \times 0,88$. On lui associe la fonction linéaire $x \mapsto 0,88 \times x$.
Augmenter $x$ de $3\%$ : $x \times \left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = x \times 1,03$. On lui associe la fonction linéaire $x \mapsto 1,03 \times x$.

### 5.2.2 Fonction affine

**Définitions**

Soit $a$ et $b$ deux nombres quelconques « fixes ».
Définir une fonction affine, c'est associer à chaque nombre $x$, le nombre $ax + b$.
On dit que $ax + b$ est l'image de $x$.

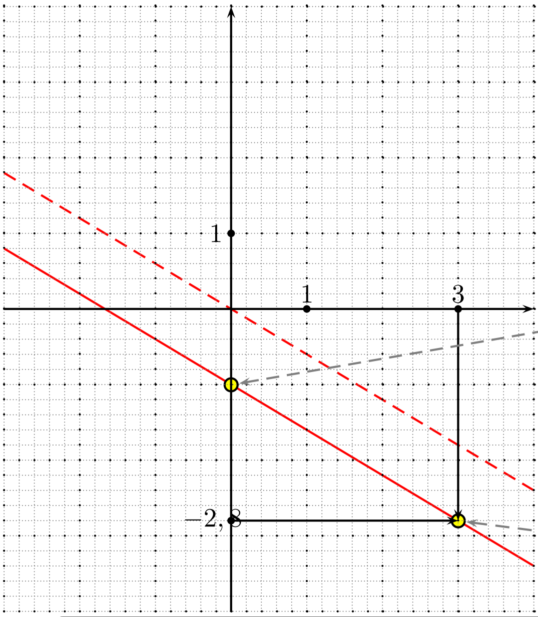
Notation La fonction affine qui à $x$ associe $ax + b$ se note $x \mapsto ax + b$ et se lit « à $x$, on associe $ax + b$ ».
On peut également la noter par une lettre, $f$ par exemple. Dans ce cas, l'image de $x$ se note $f(x)$ et se lit « $f$ de $x$ ».

Exemple $f$ est la fonction affine qui à $x$ associe $2x - 1$.
L'image de 3 est $2 \times 3 - 1 = 5$ et on note $f(3) = 5$.
Cas particuliers : $b = 0$ On obtient $f : x \mapsto ax$, c'est à dire une fonction linéaire.
$a = 0$ On obtient $f : x \mapsto b$, c'est à dire une fonction **constante**.

▌ On dit que $x \mapsto ax$ est la fontion linéaire associée à la fonction affine $x \mapsto ax + b$.

### Représentation graphique d'une fonction linéaire

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est la droite $(d)$ :
– qui passe par le point $B$ de coordonnées $(0; b)$ ;
– qui est parallèle à la droite $(d')$ représentant la fonction linéaire associée.




Représenter graphiquement la fonction affine $f$ définie par

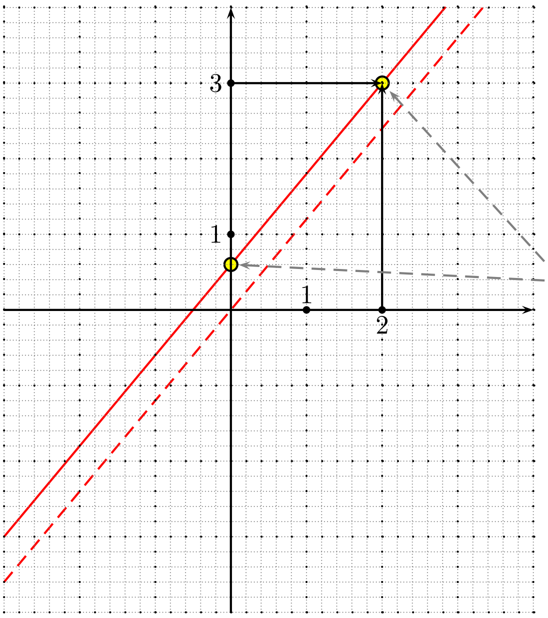
$$f : x \mapsto -0,6x{-}1$$

Comme $f$ est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite qui passe par l'ordonnée à l'origine (0,−1).

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | -2,8 |

On prend $x = 3$ :
son image est $f(3) = -0,6 \times 3 - 1 = -1,8 - 1 = -2,8$.
Je place le point de coordonnées $(3; -2,8)$.

On dit que $y = ax+b$ est une équation de la droite $(d)$ qui représente la fonction affine qui à $x$ associe $ax + b$. On dit également que :
– $b$ est l'ordonnée à l'origine,
– $a$ est le coefficient directeur.




Représenter graphiquement la fonction affine $g$ définie par

$$g : x \mapsto 1,2x{+}0,6$$

Comme $g$ est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite qui passe par l'ordonnée à l'origine (0,+0,6).

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 1 | 3 |

On prend $x = 2$ :
son image est $g(2) = 1,2 \times 2 + 0,6 = 2,4 + 0,6 = 3$. Je place le point de coordonnées $(2; 3)$.

### Proportionnalité des accroissements

<u>Admis</u> Soit $f$ une fonction affine $x \mapsto ax + b$.
<u>Si</u> $x$ varie (c'est à dire augmente ou diminue) d'un nombre $h$, <u>alors</u> son image $f(x)$ varie de $ah$.

Application Déterminer la fonction affine $f$ tel que $f(1) = 4$ et $f(3) = 8$.

1$^{\text{re}}$méthode Une application affine est de la forme $x \mapsto ax + b$.

| $x$ | 1 | 3 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 8 |

Donc

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \times a \\ a &= 2 \end{aligned}$$

D'où $f$ est de la forme $x \mapsto 2x + b$.
Or $f(1) = 2 \times 1 + b$ et $f(1) = 4$.
D'où

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + b \\ b &= 2 \end{aligned}$$

L'application affine cherchée est $x \mapsto 2x + 2$.

2$^{\text{e}}$méthode Une application affine est de la forme $x \mapsto ax + b$. Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = a \times 1 + b \\ 8 = a \times 3 + b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = a + b \\ 8 = 3a + b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -4 = -a - b \\ 8 = 3a + b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = 2a \\ 8 = 3a + b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ 8 = 6 + b \end{array} \right.$$

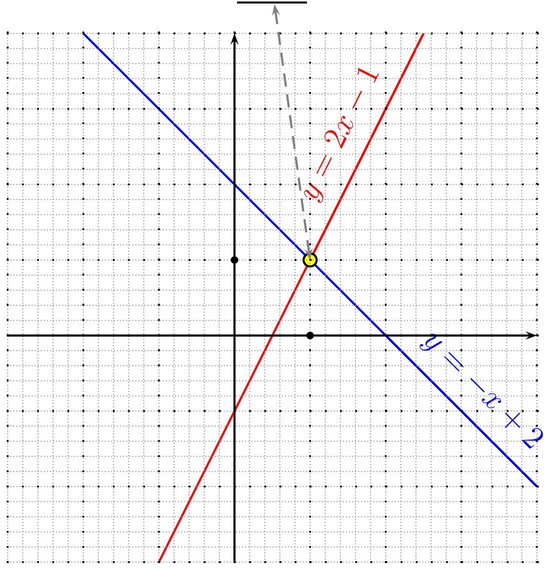
$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Donc la fonction $f$ est $x \mapsto 2x + 2$.

### 5.2.3 Interprétation graphique d'un système de 2 équations du 1$^{\text{er}}$ degré à 2 inconnues

Exemple Résoudre graphiquement le système $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -x - y = -2 \end{array} \right.$

On obtient $\left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = -x + 2 \end{array} \right.$ et la solution est le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites ; c'est à dire dans ce cas le couple $(1; 1)$.



## 5.3. Exercices

**Exercice 1** – affine/exo1

1. Détermine l'image de 1 et $-2$ pour chacune des fonctions linéaires suivantes :

   (a) $f : x \mapsto 3x$

   (b) $g : x \mapsto -2x$

   (c) $h : x \mapsto \dfrac{2}{3}x$

   (d) $i : x \mapsto \dfrac{4}{5}x$

2. Détermine le nombre qui a pour image 3 par ces mêmes fonctions linéaires.
3. Représente graphiquement chacune des fonctions linéaires ci-dessus et donne une équation de leur représentation graphique.

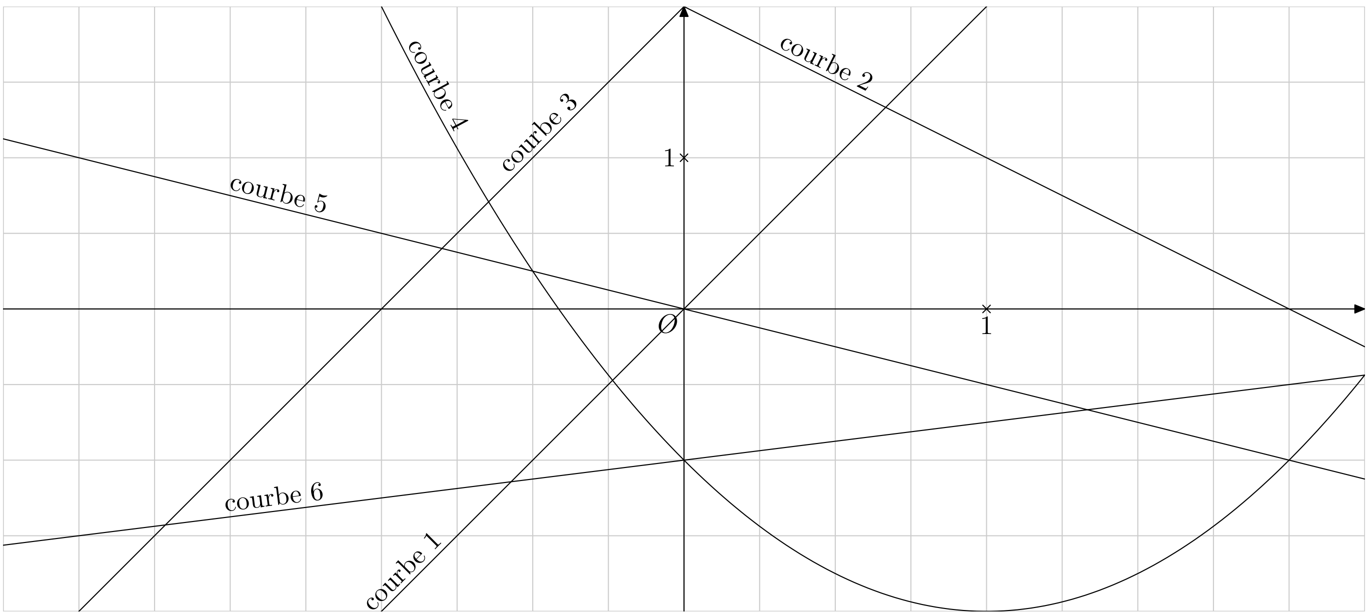
**Exercice 2** – affine/exo2

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction linéaire telle que :

**1/** l'image de 3 est 5 ;
**2/** l'image de $-1$ est 4 ;
**3/** l'image de $-2$ est $-5$
**4/** le nombre qui a pour image 6 est 1,5 ;
**5/** $g(4) = \dfrac{1}{3}$.

**Exercice 3** – affine/exo3

Voici un graphique représentant plusieurs fonctions. Repère les représentations graphiques des fonctions linéaires et détermine ces fonctions linéaires à l'aide du graphique.




**Exercice 4** – affine/exo4

1. Détermine l'image de 1 et $-2$ pour chacune des fonctions affines suivantes :

   (a) $f : x \mapsto 3x + 2$

   (b) $g : x \mapsto -2x - 1$

   (c) $h : x \mapsto \dfrac{2}{3}x + 1$

   (d) $i : x \mapsto \dfrac{4}{5}x - 4$

2. Détermine le nombre qui a pour image 3 par ces mêmes fonctions linéaires.
3. Représente graphiquement chacune des fonctions affines ci-dessus et donne une équation de leur représentation graphique.

**Exercice 5** – affine/exo5

Dans chacun des cas suivants, détermine la fonction affine telle que :

**1/** l'image de 3 est 5 et l'image de 4 est 7 ;

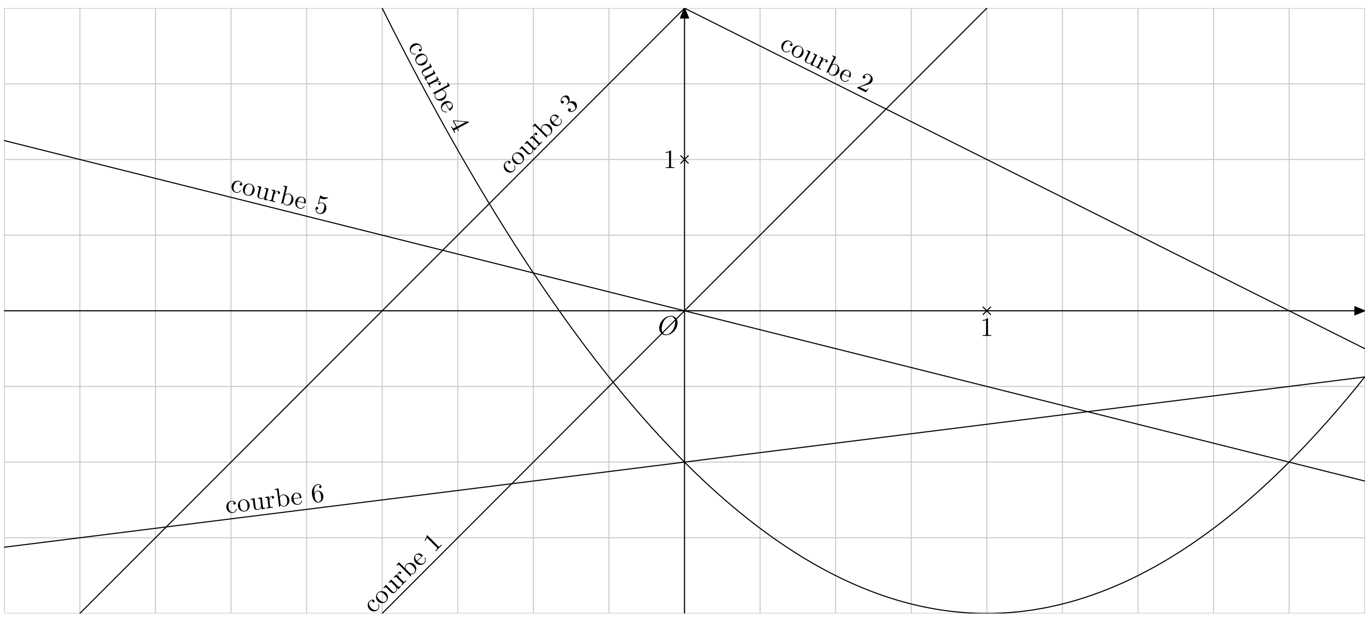
**2/** l'image de $-1$ est 4 et l'image de 3 est 0 ;

**3/** l'image de $-2$ est $-5$ et l'image de $-1$ est 8.

**4/** $g(4) = \dfrac{1}{3}$ et $g(2) = 1$.

**Exercice 6** – affine/exo6

Voici un graphique représentant plusieurs fonctions. Repère les représentations graphiques des fonctions affines et détermine ces fonctions affines à l'aide du graphique.




**Exercice 7** – affine/exo7

Le 1er janvier 2002, les prix seront donnés en euros. On sait que 1 euro vaut 6,55957 francs.

1. En appelant $x$ le prix en euros et $y$ le prix en francs, exprime $y$ en fonction de $x$.
2. Quel sera le prix en francs d'un loyer valant 280 euros ?
3. Quel sera le prix en euros d'un véhicule valant 58 500 francs ?

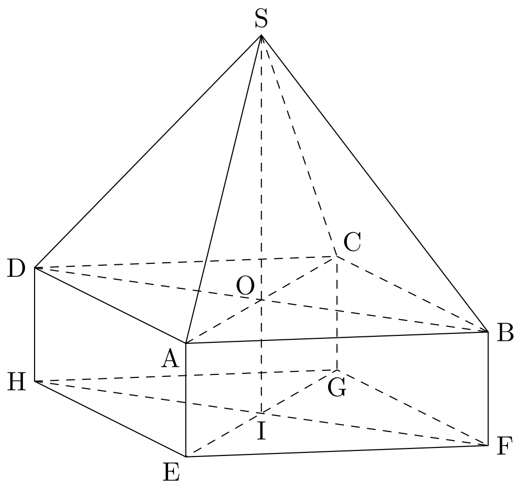
**Exercice 8** – affine/exo8

Un employé à gagné 90€ pour 15 heures de travail.

1. Calcule son salaire horaire.
2. Exprime le salaire $S$ (en €) en fonction du temps $t$ (en heures).
3. Construis la représentation graphique de la fonction $S$ pour $0 < t < 20$ (1 $cm$ pour 2 heures sur l'axe des abscisses ; 1 $cm$ pour 100€ sur l'axe des ordonnées).
4. Détermine graphiquement (on laissera apparent les traits de construction nécessaires) :
   - Le salaire correspondant à 10 heures de travail.
   - le nombres d'heures correspondant à un salaire de 120€.
   - Vérifie ces résultats par le calcul.

5. Cet employé a consacré 15% de son salaire à l'achat d'un vêtement, quel est le prix de ce vêtement ?
6. Il consacre 75€ à ses loisirs. Quel est le pourcentage du salaire cela représente-t-il ?

**Exercice 9** – affine/exo9




Voici un solide constitué d'un parallélépipède rectangle surmonté d'une pyramide à base rectangulaire.
La hauteur totale du solide est $SI = 12\,cm$.
Le parallélépipède rectangle a pour longueur $EF = 10\,cm$, pour largeur $HE = 6\,cm$ et pour hauteur $BF = x$.

1. Entre quelles valeurs $x$ peut-il varier ?
2. Exprime le volume $\mathcal{V}_1$ du parallélépipède rectangle en fonction de $x$.
3. Montre que le volume $\mathcal{V}_2$ de la pyramide est égal à $240 - 20x$.
4. Pour quelle valeur de $x$ les volumes $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont-ils égaux ? Donne alors la valeur commune de ces deux volumes.
5. Pour quelles valeurs de $x$ le volume de la pyramide est-il inférieur à $200\,cm^3$ ?

**Exercice 10** – affine/exo10

C'est la période des soldes :

1. J'achète un pull dont le prix est 53€. Combien vais-je payer ce pull sachant qu'à la caisse on me fera une remise de 20% ?
2. J'achète aussi une chemise que je paie 37€. Quel était le prix de la chemise avant la réduction de 20% ?
3. J'achète également un pantalon dont le prix est 63€. Quel est le pourcentage de remise accordé si je paie à la caisse 54€ ce pantalon ?

**Exercice 11** – affine/exo11

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ et $AD = 5$. Le point $M$ est sur le segment $[DC]$ et on note $x$ la longueur $DM$.

**1/** Exprime en fonction de $x$ l'aire du triangle $ADM$.

**2/** Représente graphiquement la fonction associée à l'aire du triangle $ADM$.

**3/** Détermine graphiquement la position du point $M$ sur le segment $[DC]$ pour que l'aire du triangle $ADM$ soit égale à 20.
Retrouve le résultat par le calcul.

**Exercice 12** – affine/exo12

Un cycliste effectue un trajet de $30\,km$. Il roule d'abord sur $15\,km$ à la vitesse moyenne de $20\,km/h$ puis le reste du trajet à la vitesse moyenne de $30\,km/h$.
Calcule la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet. Que constate-t-on ?

**Exercice 13** – affine/exo13

Pour tout l'exercice, on considère un objet dont le prix de départ, en euros, est $x$.

1. On augmente le prix de l'objet de 15% et on appelle $f(x)$ le prix en euros après l'augmentation.
   (a) Calcule $f(100)$ et $f(400)$.
   (b) Exprime $f(x)$ en fonction de $x$. Le prix final est-il proportionnel au prix initial ?

(c) Sur papier millimétré, représente la fonction $f$. On prendra 1 $cm$ pour 100 euros en abscisse et 1 $cm$ pour 100 euros en ordonnée.

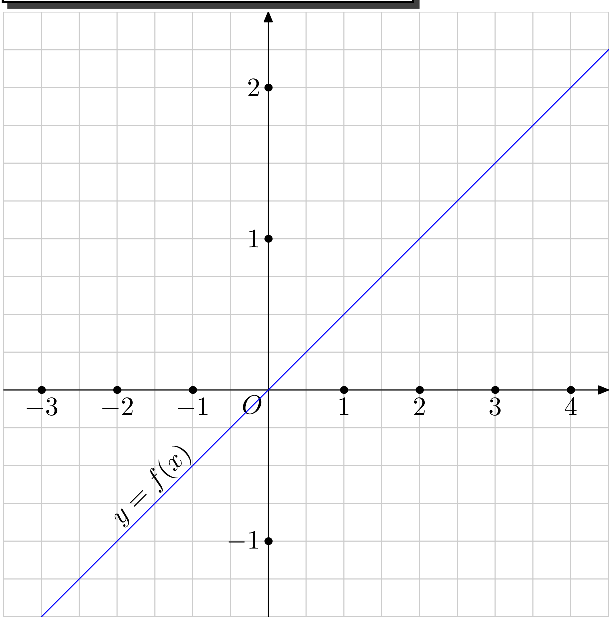
2. On augmente le prix de cet objet de 50% puis de 3 euros. On appelle $g(x)$ le prix en euros après les deux augmentations.
   (a) Calcule $g(100)$ et $g(400)$.
   (b) Exprime $g(x)$ en fonction de $x$. Le prix final est-il proportionnel au prix initial ?
3. On diminue le prix de cet objet de 50% et on l'augmente de 2 euros. On appelle $h(x)$ le prix après la réduction et l'augmentation.
   (a) Calcule $h(100)$ et $h(400)$.
   (b) Exprime $h(x)$ en fonction de $x$. Le prix final est-il proportionnel au prix initial ?
4. (a) Pour quel prix de départ, les prix finaux des questions 2 et 3 sont-ils égaux ?
   (b) Pour quel prix de départ, les prix finaux des questions 1 et 2 sont-ils égaux ?

## **Exercice 14** – affine/exo14

Maxime et Lucie aiment beaucoup la marche à pied. Ils partent tous les deux à midi d'un même point $O$ et se déplacent en suivant deux directions perpendiculaires. Maxime marche à la vitesse constante $V_1 = 8\,km/h$ tandis que Lucie se déplace à la vitesse constante $V_2 = 6\,km/h$.

1. Quelle distance sépare nos marcheurs à $13\,h45\,min$ ?
2. A quelle heure précise Maxime et Lucie sont-ils séparés par une distance de $36\,km$ ?
3. Au bout de 2 heures, Maxime s'arrête. Il décide de repartir lorsque Lucie aura parcouru la distance qu'il vient de parcourir.
   (a) A quelle heure Maxime repartira-t-il ?
   (b) Quelle distance séparera Maxime et Lucie lorsque Maxime repartira ?

## **Exercice 15** – affine/exo15




Sur la figure ci-contre, on a représenté une fonction linéaire de coefficient $a$.

$$f(x) = ax$$

**1/** A l'aide de ce graphique, complète le tableau suivant.

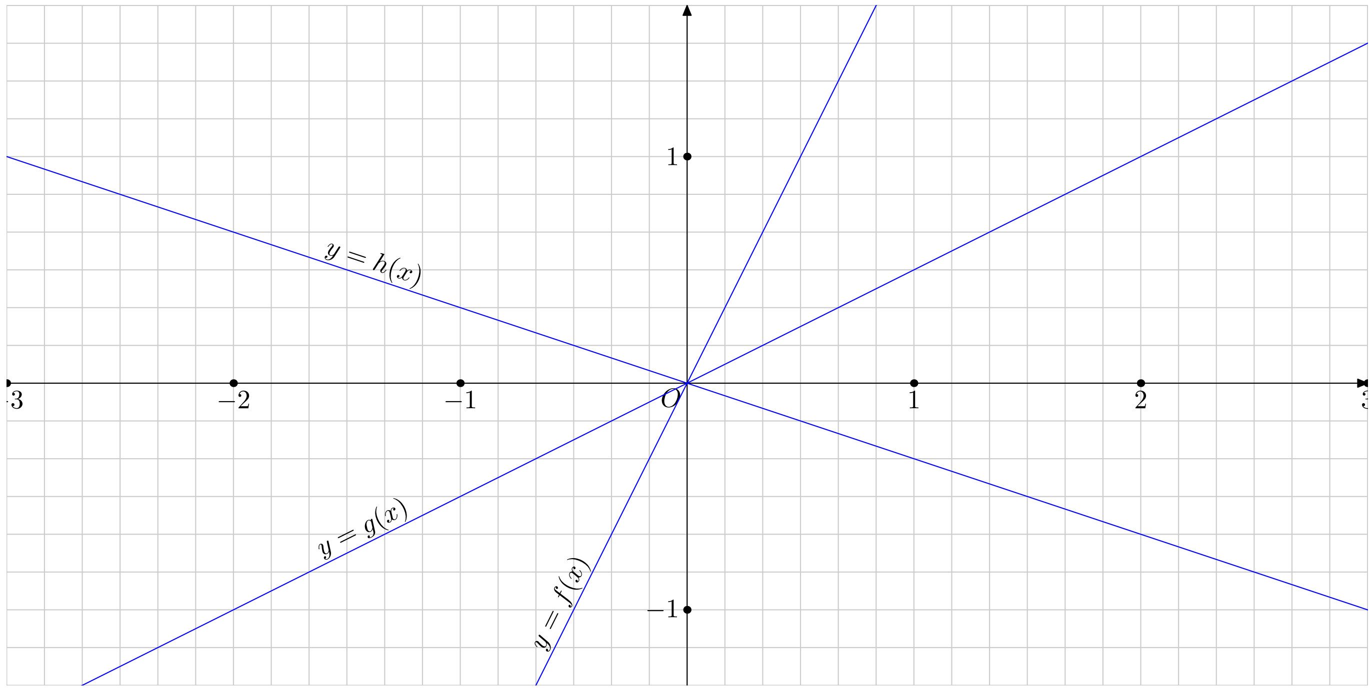
| | | |
|---|---|---|
| $f(4) = \ldots$ | $f(-3) = \ldots$ | $f(-2) = \ldots$ |
| $f(\ldots) = 1$ | $f(\ldots) = \frac{3}{2}$ | $f(\ldots) = -\frac{5}{4}$ |

**2/** Détermine la valeur du coefficient $a$ de cette fonction linéaire.

## **Exercice 16** – affine/exo16

Sur la figure ci-dessous, on a représenté 3 fonctions linéaires $f$, $g$ et $h$.

$$f(x) = ax \qquad g(x) = bx \qquad h(x) = cx$$




**1/** A l'aide du graphique, complète le tableau suivant.

| | | |
|---|---|---|
| $f\left(\dfrac{1}{6}\right) = \ldots$ | $g(2) = \ldots$ | $h(-2) = \ldots$ |
| $f(\ldots) = -\dfrac{2}{3}$ | $g(\ldots) = \dfrac{3}{2}$ | $h(\ldots) = 1$ |

**2/** Détermine les fonctions linéaires $f$, $g$ et $h$.

**Exercice 17** – affine/exo17

Dans un repère d'origine $O$, place les points $A$, $B$, $C$ et $D$ de coordonnées respectives $(3; 4)$, $(-2; 3)$, $(-3; -1)$ et $(4; -1)$.

Détermine une équation des droites $(OA)$, $(OB)$, $(OC)$ et $(OD)$.

# Deuxième partie

# Géométrique

Chapitre 6

# Théorème de Thalès et sa réciproque

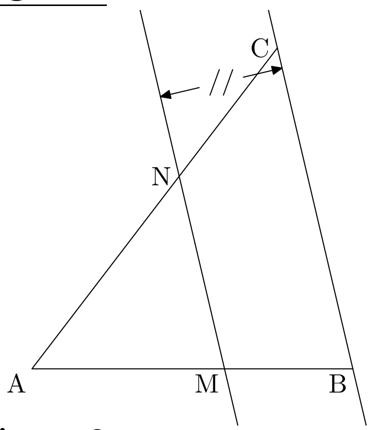
## Sommaire

## 6.1. Activités

### 6.1.1 Théorème de Thalès

Dans les 3 figures ci-dessous, les droites $(MN)$ et $(BC)$ sont parallèles.

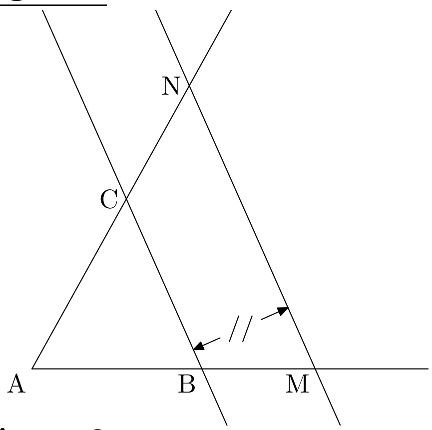
**Figure 1**




Compléte

> Dans le triangle $ABC$, ...est sur le segment $[AB]$ et ...est sur le segment $[AC]$ tels que les droites $(MN)$ et $(BC)$ soient parallèles. Donc
>
> $$\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

**Figure 2**

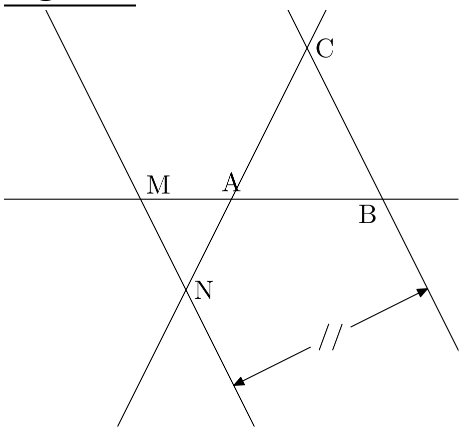



1. Que peut-on utiliser comme propriété ? Ecris-la

> ..............................................
> ..............................................
> ..............................................
> ..............................................
>
> $$\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

2. Où sont positionnés les points $M$ et $N$ ?......
..............................................

**Figure 3**




1. Construis les points $M'$ et $N'$ symétriques respectifs des points $M$ et $N$ par rapport au point $A$. Que peut-on dire des droites $(M'N')$ et $(BC)$ ? Justifie. ............................
..............................................
..............................................
..............................................
..............................................
..............................................
2. Que peut-on en déduire ?.............................................................
.................................................................................
.................................................................................
.................................................................................

$$\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

3. Explique pourquoi

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

.................................................................................

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

4. Où sont positionnés les points $M$ et $N$ ? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Quelle propriété peut permettre d'écrire la même chose pour les 3 figures ?

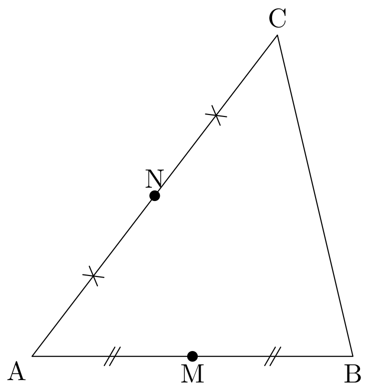
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

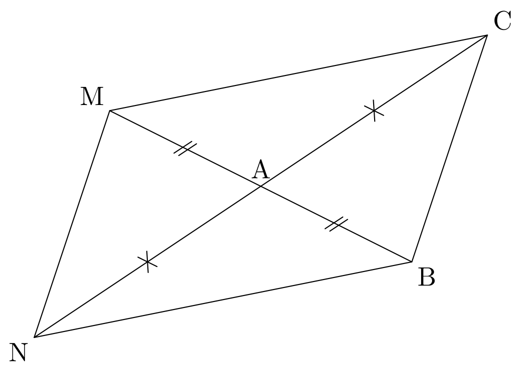
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

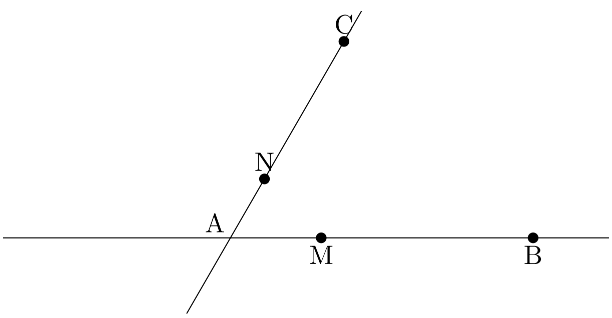
### 6.1.2 La « réciproque » du théorème de Thales

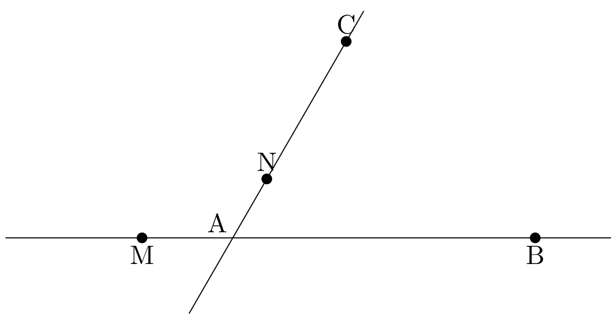
1. Dans les deux cas suivants, compare les rapports $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$. Justifie ensuite que les droites $(MN)$ et $(BC)$ sont parallèles.




2. Dans les deux cas suivants, compare les rapports $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$.
$AB = 4\,cm,\ AC = 3\,cm,\ AM = 1,2\,cm,\ AN = 0,9\,cm$




$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{\dots}{\dots} = \\[2ex] \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{\dots}{\dots} = \end{array}\right\} \quad \dfrac{AM}{AB} \quad \dfrac{AN}{AC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{\dots}{\dots} = \\[2ex] \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{\dots}{\dots} = \end{array}\right\} \quad \dfrac{AM}{AB} \quad \dfrac{AN}{AC}$$

3. Peut-on conclure uniquement avec l'égalité des rapports ? Que manque-t-il ?

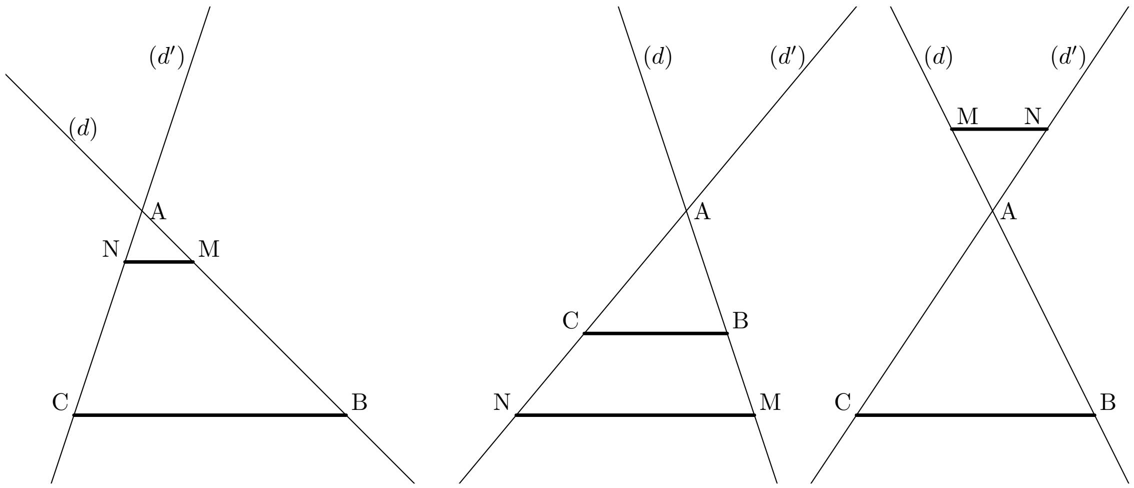
## 6.2. Cours

### 6.2.1 Enoncé du théorème

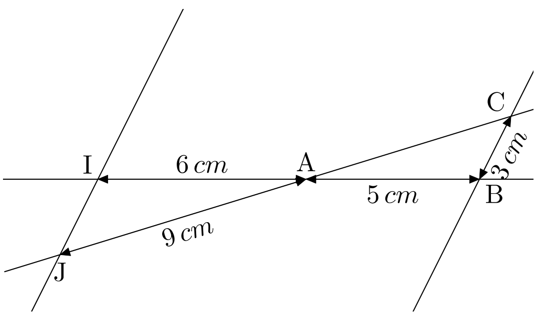
Soit $(d)$ et $(d')$ deux droites sécantes en $A$.
$B$ et $M$ sont 2 points de la droite $(d)$, distincts de $A$.
$C$ et $N$ sont 2 points de la droite $(d')$, distincts de $A$.
Si les droites $(BC)$ et $(MN)$ sont parallèles alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \qquad \frac{\text{côtés du triangle } AMN}{\text{côtés correspondants du triangle } ABC}$$

Configurations de Thalès




Exemple




*Les droites $(CJ)$ et $(BI)$ se coupent en $A$. Les droites $(BC)$ et $(IJ)$ sont parallèles. Calculer les longueurs $AC$ et $IJ$.*

Dans le triangle $ABC$, $I$ est un point de la droite $(AB)$ et $J$ est un point de la droite $(AC)$ tels que la droite $(IJ)$ soit parallèles à la droite $(BC)$. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \frac{6}{5} = \frac{9}{AC} = \frac{IJ}{3}$$

On utilise

$$\frac{6}{5} = \frac{9}{AC}$$
$$6 \times AC = 9 \times 5$$
$$AC = \frac{9 \times 5}{6} = 7,5\,cm$$

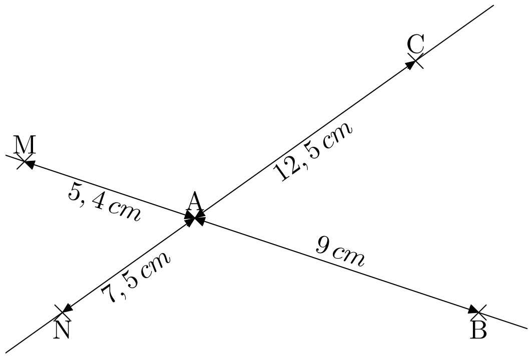
On utilise

$$\frac{6}{5} = \frac{IJ}{3}$$
$$5 \times IJ = 6 \times 3$$
$$IJ = \frac{6 \times 3}{5} = 3,6\,cm$$

### 6.2.2 La réciproque du théorème de Thalès

Soit $(d)$ et $(d')$ deux droites sécantes en $A$.
$B$ et $M$ sont 2 points de la droite $(d)$, distincts de $A$.
$C$ et $N$ sont 2 points de la droite $(d')$, distincts de $A$.
Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ et les points $A, M, B$ sont alignés dans le même ordre que les points $A, N, C$ alors les droites $(MN)$ et $(BC)$ sont parallèles.

Exemple

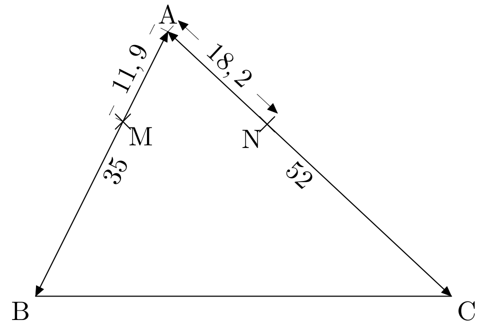



> *Est-ce que les droites $(MN)$ et $(BC)$ sont parallèles ? Justifier.*

Dans le triangle $ABC$, $M$ est un point de la droite $(AB)$ et $N$ un point de la droite $(AC)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{5,4}{9} = 0,6 \\[2ex] \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{7,5}{12,5} = 0,6 \end{array}\right\} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$$

De plus, les points, $A, M, B$ sont alignés dans le même ordre que les points $A, N, C$. Donc les droites $(MN)$ et $(BC)$ sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.




> *Est-ce que les droites $(MN)$ et $(BC)$ sont parallèles ? Justifier*

Dans le triangle $ABC$, $M$ est un point de la droite $(AB)$ et $N$ un point de la droite $(AC)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{11,9}{35} = 0,34 \\[2ex] \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{18,2}{52} = 0,35 \end{array}\right\} \dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$$

Donc les droites $(MN)$ et $(BC)$ ne sont pas parallèles.

## 6.3. Exercices

**Exercice 1** – thales/exo1

Soit $EFG$ un triangle tel que $EF = 4\,cm$, $EG = 8\,cm$ et $\widehat{FEG} = 60°$. Place le point $M$ sur le segment $[EF]$ tel que $EM = 1\,cm$.
Construis ensuite la parallèle à la droite $(FG)$ passant par le point $M$. Elle coupe la droite $(EG)$ en $N$.
Calcule la longueur $EN$.

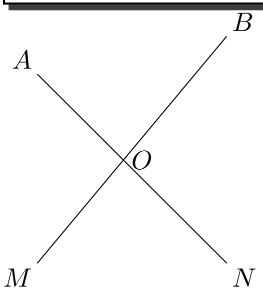
**Exercice 2** – thales/exo2

**Partie 1 : Nouveau théorème** Soit $ABC$ un triangle quelconque. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe la droite $(BC)$ en $D$. La parallèle à la droite $(AC)$ passant par $C$ coupe la droite $(AB)$ en $E$. Démontre que $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$.

**Partie 2 : Application du théorème** Soit un triangle $ABC$ tel que $AB = 24\,cm$, $AC = 56\,cm$ et $BC = 40\,cm$.
La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe la droite $(CB)$ en $D$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite $(AC)$ en $E$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ coupe la droite $(AB)$ en $F$.

1. Calcule les longueurs $DB$, $DC$, $EA$, $EC$, $FA$ et $FB$.
2. Evalue les rapports $\dfrac{ID}{IA}$, $\dfrac{IE}{IB}$ et $\dfrac{IF}{IC}$. Calcule leur produit.

**Exercice 3** – thales/exo3




$[AN]$ et $[BM]$ sont deux segments qui se coupent en $O$ comme sur la figure ci-contre et qui vérifient $AN = 6\,cm$, $OA = 1,5\,cm$, $BO = 2,5\,cm$, $BM = 10\,cm$.
*Attention, cette figure n'a pas été réalisée en vraie grandeur.*
Montrer que les droites $(AB)$ et $(MN)$ sont parallèles ; vous justifierez votre réponse en citant avec précision le théorème que vous utilisez.

**Exercice 4** – thales/exo4

Soit un triangle $ABC$ tel que $AB = 7\,cm$, $AC = 5\,cm$, $BC = 4\,cm$. Soit le point $M$ du segment $[AC]$ tel que $AM = 3\,cm$. La parallèle à la droite $(BC)$ passant par $M$ coupe le segment $[AB]$ en $P$.

1. Fais une figure en vraie grandeur.
2. Calcule la longueur $AP$.

**Exercice 5** – thales/exo5

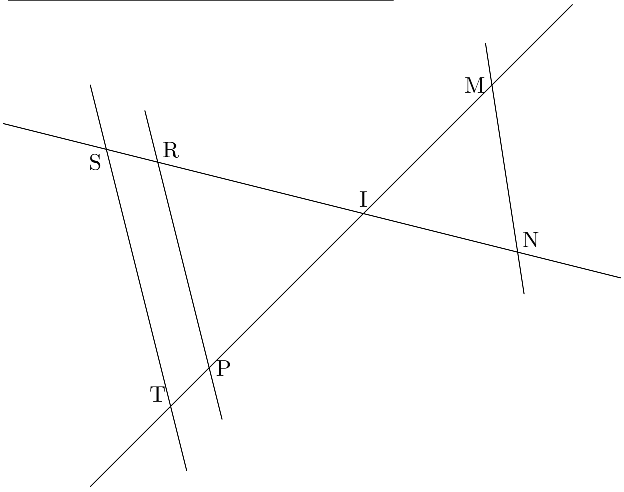
Soit $ABC$ un triangle quelconque et une droite $(d)$ qui coupe les droites $(AB)$, $(AC)$ et $(BC)$ respectivement en $I$, $J$, $K$.
La perpendiculaire à la droite $(d)$ passant par $A$ coupe la droite $(d)$ en $A'$.
La perpendiculaire à la droite $(d)$ passant par $B$ coupe la droite $(d)$ en $B'$.
La perpendiculaire à la droite $(d)$ passant par $C$ coupe la droite $(d)$ en $C'$.

1. (a) Montre que $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{BB'}{CC'}$
   (b) Montre que $\dfrac{JC}{JA} = \dfrac{CC'}{AA'}$

(c) Montre que $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{AA'}{BB'}$

2. Déduis-en que
$$\frac{KB}{KC} \times \frac{JC}{JA} \times \frac{IA}{IB} = 1$$

**Exercice 6** – thales/exo6




Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur :
$IR = 8\,cm$, $RP = 10\,cm$,
$IP = 4,8\,cm$, $IM = 4\,cm$,
$IS = 10\,cm$, $IN = 6\,cm$,
$IT = 6\,cm$.
(On ne demande pas de refaire la figure.)

1. Démontre que les droites $(ST)$ et $(RP)$ sont parallèles.
2. Déduis-en la longueur $ST$.
3. Les droites $(MN)$ et $(ST)$ sont-elles parallèles ? Justifie.

**Exercice 7** – thales/exo7

On considère un trapèze $ABCD$ dont les bases parallèles sont $(AB)$ et $(CD)$. $O$ est le point d'intersection des diagonales. On trace la parallèle à la droite $(BC)$ passant par $A$ : elle coupe la droite $(BD)$ en $M$. La parallèle à la droite $(AD)$ passant par $B$ coupe la droite $(AC)$ en $N$.
Démontre que les droites $(MN)$ et $(DC)$ sont parallèles.

Chapitre 7

# Géométrie dans l'espace

## Sommaire

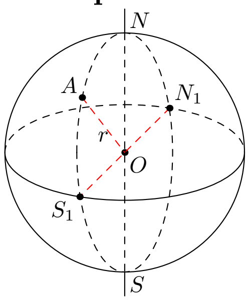
## 7.1. Cours

### 7.1.1 Sphère et boule

**Définitions**

Soit $O$ est un point de l'espace et $r$ est un nombre positif donné.
- La **sphère** de centre $O$ et de rayon $r$ est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de $O$ égale à $r$.
- La **boule** de centre $O$ et de rayon $r$ est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de $O$ inférieure ou égale à $r$.
- Un **grand cercle** d'une sphère de centre $O$ et de rayon $r$ est un cercle de centre $O$ et de rayon $r$.

**Exemples**




- la sphère de centre $O$ et de rayon $r$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $OM = r$. Ici, le point $A$ appartient à la sphère de centre $O$ et de rayon $r$ mais le point $O$ non.
- la boule de centre $O$ et de rayon $r$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $OM \leqslant r$. Ici, les points $A$ et $O$ appartiennent à la boule de centre $O$ et de rayon $r$.
- Le cercle de centre $O$ et de rayon $OA$ est un grand cercle ($OA = r$).

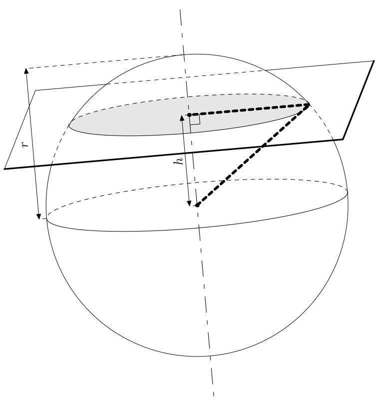
**Section d'une sphère par un plan**

Lorsqu'elle existe, la section d'une sphère par un plan est un cercle.

Soit $\mathcal{P}$ un plan perpendiculaire en $I$ à l'un des diamètres $[NS]$ d'une sphère de rayon $r$. Posons $OI = h$ qui est **la distance du point $O$ au plan $\mathcal{P}$**.

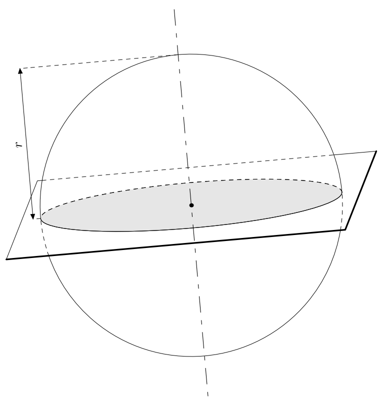
$\underline{0 < h < r}$

Le cercle de section a pour centre $I$.



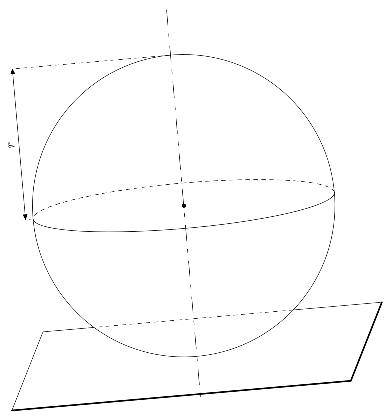
$\underline{h = 0}$

Le cercle de section a le même centre $O$ et le même rayon $r$ que la sphère : on dit que c'est un **grand cercle** de la sphère.

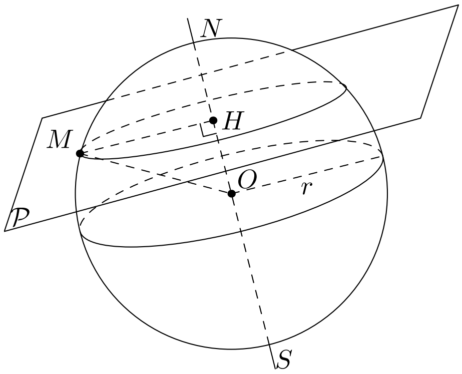


$\underline{h = r}$

Le cercle de section a pour centre $S$ et pour rayon 0. On dit que **le plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère en $S$.**



**Exemple**



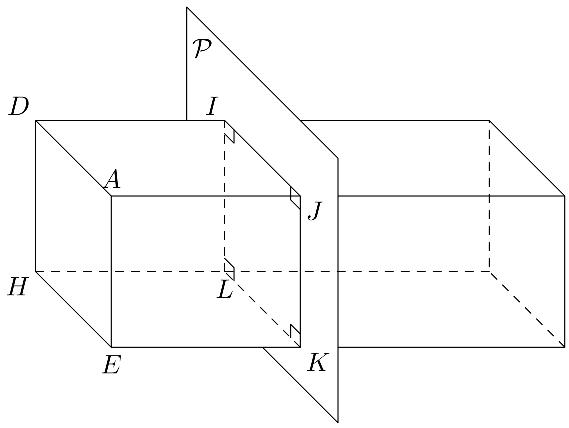

Le plan $\mathcal{P}$ coupe la sphère de centre $O$ et de rayon $r$ : la section obtenue est un cercle de centre $H$ et de rayon $MH$ que l'on calcule à l'aide du théorème de Pythagore.

**Aire d'une shpère – Volume d'une boule**

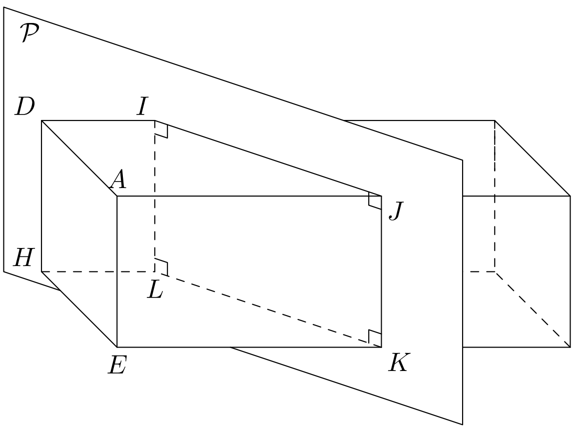
Soit $r$ un nombre positif.
- L'aire d'une sphère de rayon $r$ est $4\pi r^2$.
- Le volume d'une boule de rayon $r$ est $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

### 7.1.2 Sections de différents solides

**Le parallélépipède rectangle**

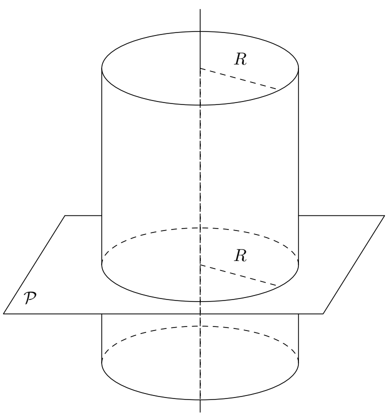



$\mathcal{P}$ est parallèle à la face $ADHE$.

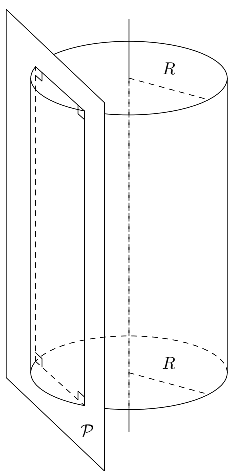



$\mathcal{P}$ est parallèle à l'arête $[AE]$.

**Le cylindre de révolution**

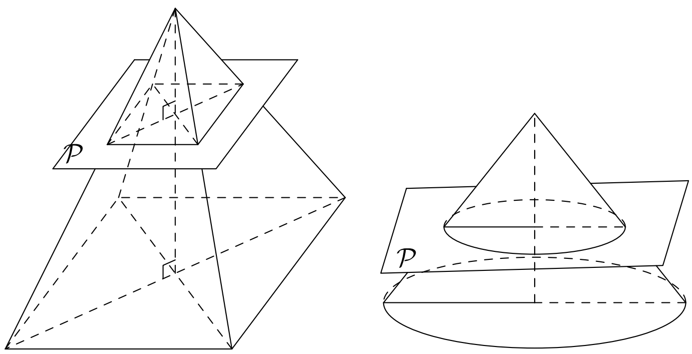



$\mathcal{P}$ est perpendiculaire à l'axe de révolution.




$\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe de révolution.

**La pyramide et le cône de révolution**




$\mathcal{P}$ est parallèle au plan de base.

### 7.1.3 Agrandissement - réduction

L'**agrandissement de rapport** $k$ d'un objet est la transformation qui consiste à multiplier toutes les longueurs de cet objet par un nombre $k$ supérieur à 1.
La **réduction de rapport** $k$ d'un objet est la transformation qui consiste à multiplier toutes les longueurs de cet objet par un nombre $k$ inférieur à 1.

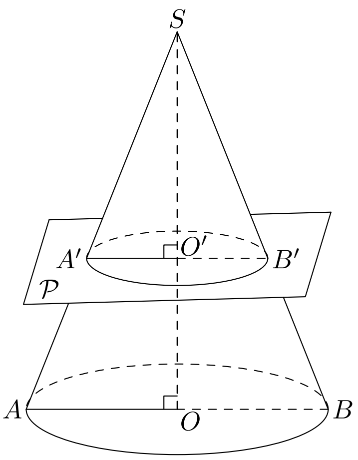
Exemples :

- une maquette réalisée à l'échelle 1/100 est la réduction de rapport $\dfrac{1}{100}$ de l'objet réel.
- une feuille de format A3 (rectangle de dimensions $29,7\,cm$ et $42\,cm$) est un agrandissement de rapport $\sqrt{2}$ d'une feuille de format A4 (rectangle de dimensions $21\,cm$ et $29,7\,cm$).

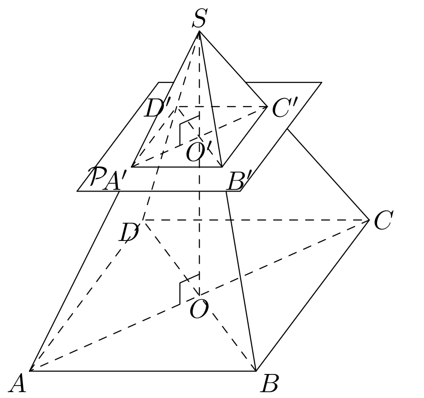
> Admis Dans un agrandissement ou une réduction de rapport $k$, les aires sont multipliées par $k^2$ et les volumes sont multipliés par $k^3$.

Exemples :

- Deux feuilles de format A4 sont nécessaires pour recouvrir exactement une feuille de format A3 ($k = \sqrt{2}$ et $k^2 = 2$ soit le double de la surface).
- huit petits cubes d'arête $a$ sont nécessaires pour remplir un cube d'arête $2a$ ($k = 2$ et $k^3 = 8$).




$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA} = \dots$$



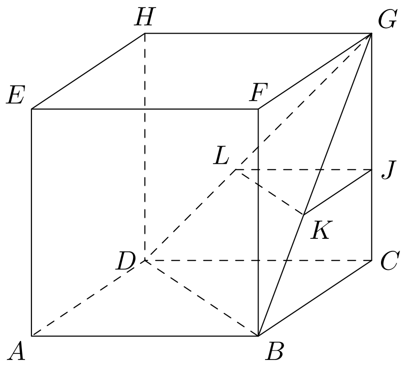

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O'}{AO} = \dots$$

## 7.2. Exercices

**Exercice 1** – espace/exo1

On dispose d'un verre en forme de cône de diamètre 6 *cm* et de hauteur 9 *cm*. Le verre est rempli jusqu'à la moitié de sa hauteur. Est-il à moitié plein ? Justifie la réponse.
Indication : Il peut être utile de faire une figure.

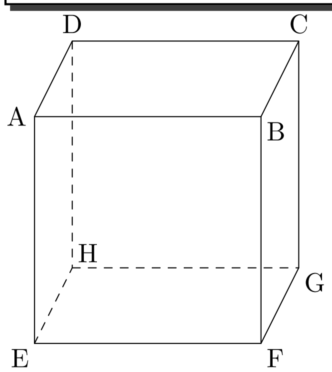
**Exercice 2** – espace/exo2




Un cube $ABCDEFGH$ a pour côté 6 *cm*. $J$ est le point de l'arête $[CG]$ tel que $GJ = 4\,cm$. On coupe $\mathcal{P}$ la pyramide de sommet $G$ et de base $BCD$ par le plan passant par $J$ et parallèle à cette base. On obtient la section $JKL$.

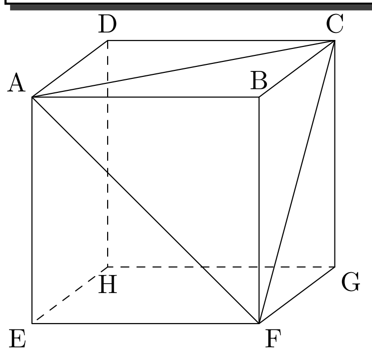
1. (a) Quel est le volume de la pyramide $\mathcal{P}$ ?
   (b) Dessine un patron de cette pyramide.
2. (a) Quelle est la nature du triangle $JKL$ ? Justifie la réponse.
   (b) Calcule la longueur $JK$.
   (c) Dessine la section $JKL$ en vraie grandeur.

**Exercice 3** – espace/exo3




1. Dans le cube ci-contre de 12 *cm* d'arête, détermine la longueur exacte de la diagonale $[AG]$.
2. On considère un cône ayant le même volume que ce cube et dont la base est un disque de rayon 15 *cm*.
   Combien mesure la hauteur de ce cône ? Donne le résultat arrondi au millimètre.

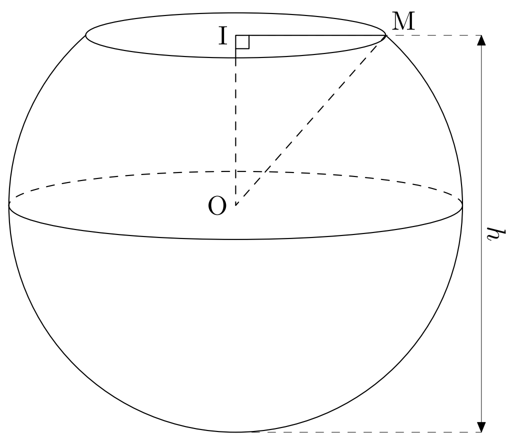
**Exercice 4** – espace/exo4




On considère la figure ci-contre où $ABCDEFGH$ est un cube de côté 3 *cm*.

1. Montrer que le triangle $ACF$ est équilatéral.
2. On considère alors la pyramide $CABF$, de base le triangle $ABF$ et de hauteur $CB$.
   (a) Calculer le volume de cette pyramide.
   (b) Dessiner un patron de cette pyramide ; on laissera les traits de construction.

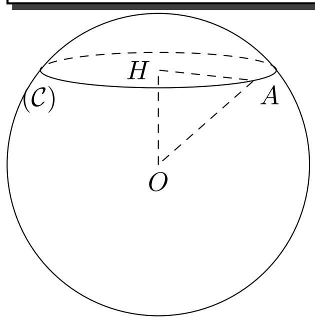
**Exercice 5** – espace/exo5




La figure ci-contre représente un aquarium qui a la forme d'une calotte sphérique de cnetre $O$, de rayon $R = 12\,cm$ et de hauteur $h$ égale à $21\,cm$, dont l'ouverture est un cercle de centre $I$ et de rayon $IM$.

1. Calcule la valeur exacte du rayon $IM$.
2. Calcule le volume de l'aquarium sachant que le volume d'une calotte sphérique est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h)$, où $R$ est le rayon de la sphère et $h$ la hauteur de la calotte sphérique. On donnera le résultat de $\mathcal{V}$ arrondi à l'unité près.
3. Combien faut-il de bouteilles de 2 litres pour remplir complétement l'aquarium ?

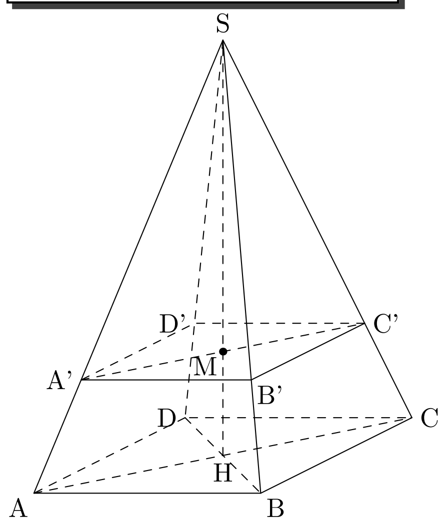
**Exercice 6** – espace/exo6




Sur le dessin ci-contre, la sphère a pour centre $O$. Un plan coupe cette sphère selon un cercle $(\mathcal{C})$ de centre $H$ et de rayon $4,5\,cm$.

1. Sachant que $HO = 2,2\,cm$, dessiner le triangle rectangle $OHA$ en vraie grandeur.
2. Calculer le rayon de la sphère à $1\,mm$ près.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HOA}$. On donnera une valeur arrondie à 1 degré près.

**Exercice 7** – espace/exo7




La figure ci-contre représente une pyramide régulière $SABCD$ à base carée, de sommet $S$, de hauteur $SH$. L'unité est le centimètre et on a $SH = 6$ et $AD = 8$.

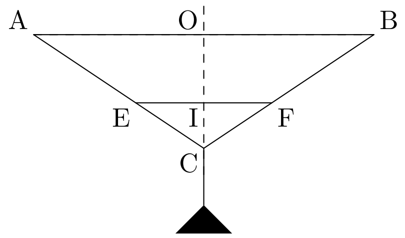
**Première partie**

1. (a) Trace, en vraie grandeur, le quadrilatère $ABCD$.
   (b) Calcule la longueur $AC$ en valeur exacte.
2. (a) Trace, en vraie grandeur, le triangle $SAH$.
   (b) Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ASH}$ (on donnera un résultat arrondi au degré près).

**Deuxième partie**

1. Calcule le volume de la pyramide $SABCD$.
2. On appelle $M$ le point du segment $[SH]$ tel que $SM = \dfrac{3}{4}SH$. On coupe la pyramide $SABCD$ par un plan parallèle à la base et passant par $M$, comme indiqué sur la figure.
   (a) Quelle est la forme du quadrilatère $A'B'C'D'$ ?
   (b) Calcule le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$.

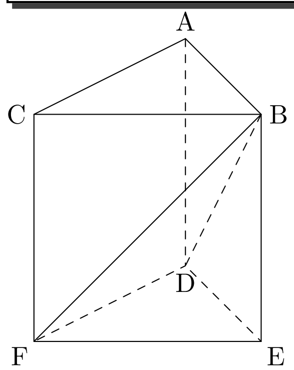
**Exercice 8** – espace/exo8




Dans un verre à pied, ayant la forme d'un cône, et représenté en coupe ci-contre, on laisse fondre 5 glaçons sphériques de $2\,cm$ de diamètre. On donne $OB = 6\,cm$ et $OC = 4\,cm$.

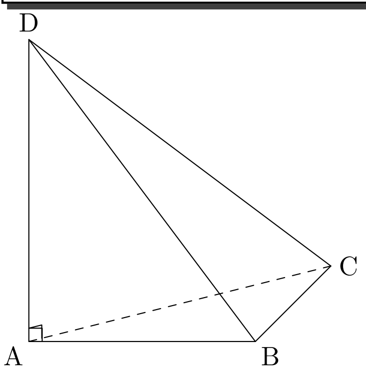
1. Quelle est la valeur exacte $\mathcal{V}$, en $cm^3$, du volume du verre ?
2. Exprime, en fonction de $\pi$, le volume total de glace, en $cm^3$.
3. Lors de la fusion de la glace, le volume de l'eau produite est obtenu en multipliant par 0,9 celui de la glace. Quelle est la valeur exacte $\mathcal{W}$, en $cm^3$, du volume d'eau dans le verre, résultant de la fusion complète des 5 glaçons ?
4. Prouve que $\mathcal{V} = 8\mathcal{W}$.
5. Déduis-en la hauteur $CI$ de l'eau dans le verre à pied après fusion complète de la glace.

## **Exercice 9** – espace/exo9




$ABCDEF$ est un prisme droit.
On donne $BE = EF = 5\,cm$, $DE = 3\,cm$, $DF = 4\,cm$.
Fais un patron en vraie grandeur de la pyramide $BDEF$ et de la pyramide $BACFD$.

## **Exercice 10** – espace/exo10




On considère la pyramide $ABCD$ de hauteur $[AD]$ telle que $AD = 5\,cm$ et de base $ABC$ telle que $AB = 4,8\,cm$ ; $BC = 3,6\,cm$ ; $CA = 6\,cm$. (La figure n'est pas aux dimensions.)

1. Démontre que le triangle $ABC$ est rectangle en $B$.
2. Calcule le volume de cette pyramide.
3. On désire fabriquer de telles pyramides en plâtre. Combien peut-on en obtenir avec $1\,dm^3$ de plâtre ?

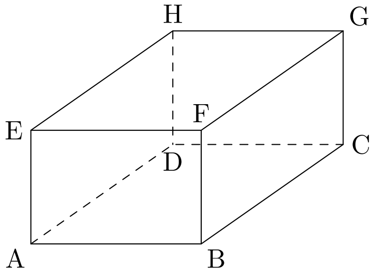
## **Exercice 11** – espace/exo11

Soit un cône de révolution de sommet $S$ et de hauteur $[SH]$. La longueur d'*une génératrice*[1] de ce cône est $SA = 6\,cm$ et de plus $\widehat{HSA} = 60^\circ$.

1. Fais une figure regroupant toutes les indications données.
2. (a) Calcule la longueur $SH$.
   (b) Calcule la longueur $AH$. Donne la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.
3. $\mathcal{P}$ est le plan perpendiculaire à la hauteur $[SH]$ en son milieu $I$. Il coupe la génératrice $[SA]$ en $J$.
   (a) Complète la figure.
   (b) Que représente le point $J$ pour le segment $[SA]$ ?
   (c) Calcule la longueur $IJ$ : donne la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.

[1] Segment joignant le sommet à un point de la circonférence de la base

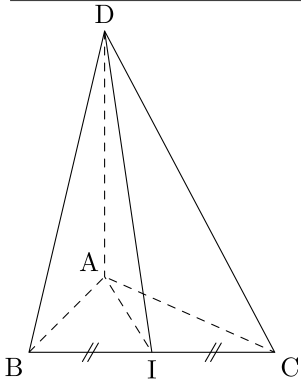
## Exercice 12 – espace/exo12




$ABCDEFGH$ est un parallélépipède à base carrée. On donne $AB = BC = 6\,cm$ et $BF = 4,5\,cm$.

1. Montre que $DG = 7,5\,cm$.
2. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{CDG}$ arrondie au degré près.
3. Calcule, en $cm^3$, le volume de la pyramide $ABCDG$.
4. Construis un patron de cette même pyramide.

## Exercice 13 – espace/exo13



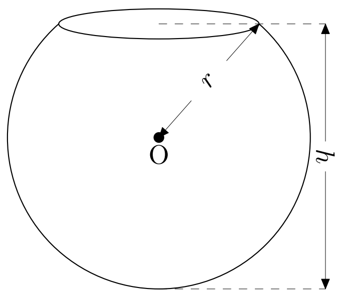

Le solide représenté ci-contre est un tétraèdre $ABCD$. L'unité utilisé est le centimètre.
On sait que $AB = 3$, $AD = 5$, $BC = 5$. De plus, $I$ est le milieu du segment $[BC]$ et les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{IAD}$ sont droits.

1. Calcule la longueur $AC$.
2. Calcule la longueur $AI$.
3. Calcule la longueur $ID$. On donnera une valeur approchée au $mm$.
4. Calcule le volume de ce tétraèdre. On donnera la réponse en litre.

## Exercice 14 – espace/exo14

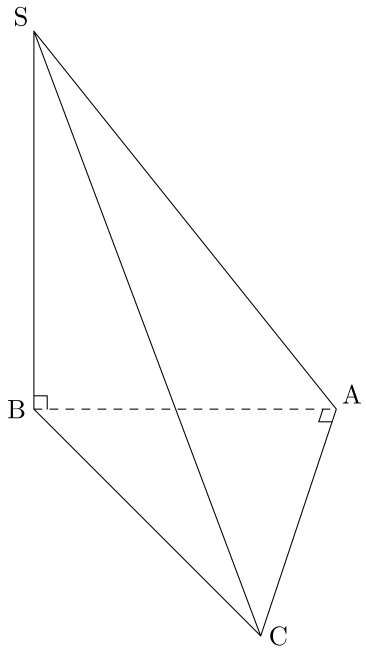
La figure ci-dessous représente une calotte sphérique de centre $O$, de rayon $r$ et de hauteur $h$. C'est un solide obtenue après section d'une sphère $\mathcal{S}$ par un plan. Le volume d'un tel solide est donné par la formule suivante

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$




1. Si une calotte sphérique a pour rayon $r = 15\,cm$ et pour hauteur $h = 20\,cm$, quel est son volume ?
2. Si une calotte sphérique a pour hauteur $h = 10\,cm$ et pour rayon $r = 6\,cm$, quel est le rayon $r_1$ du cercle de section ?
3. Si une calotte sphérique a pour hauteur $h = 12\,cm$ et pour rayon $r = 8\,cm$, quel est le volume du solide que l'on a enlevé à la sphère $\mathcal{S}$ pour obtenir cette calotte ?

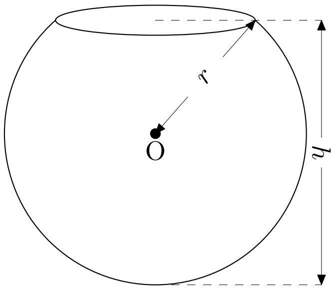
## Exercice 15 – espace/exo15




On considère une pyramide de hauteur $SB = 7\,cm$ et dont la base est un triangle $ABC$ rectangle en $A$ tel que $AB = 3\,cm$ et $AC = 4\,cm$.

1. Construis un patron de cette pyramide.
2. Calcule le volume de cette pyramide.
3. On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base : on obtient les points $B'$ sur l'arête $[SB]$, $A'$ sur $[SA]$ et $C'$ sur $[SC]$ tels que $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{3}{7}$.
   (a) Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$ ? Justifie.
   (b) Calcule le volume de la pyramide $SA'B'C'$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au $mm^3$.

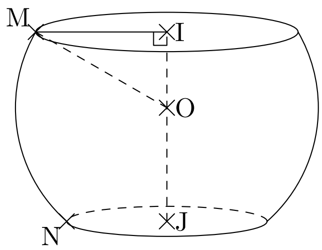
**Exercice 16** – espace/exo16




**Partie A** La figure ci-contre représente une calotte sphérique de centre $O$, de rayon $r$ et de hauteur $h$. Le volume d'un tel solide est donné par la formule suivante

$$\mathcal{V} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

1. Si une calotte sphérique a pour rayon $r = 15\,cm$ et pour hauteur $h = 20\,cm$, quel est son volume ?
2. Si une calotte sphérique a pour hauteur $h = 9\,cm$ et pour volume $\mathcal{V} = 81\pi\,cm^3$, quel est son rayon ?
3. Si une calotte sphérique a pour hauteur $h = 10\,cm$ et pour rayon $r = 6\,cm$, quel est le rayon $r_1$ du cercle de section ?




**Partie B** Un aquarium a la forme d'une sphère de $16\,cm$ de rayon coupée par deux plans parallèles. Ces plans sont situés respectivement à $12,8\,cm$ et $9,6\,cm$ du centre.

1. Calcule l'aire des disques de sections en fonction de $\pi$.
2. Calcule le volume de l'aquarium. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au $mm^3$ près.

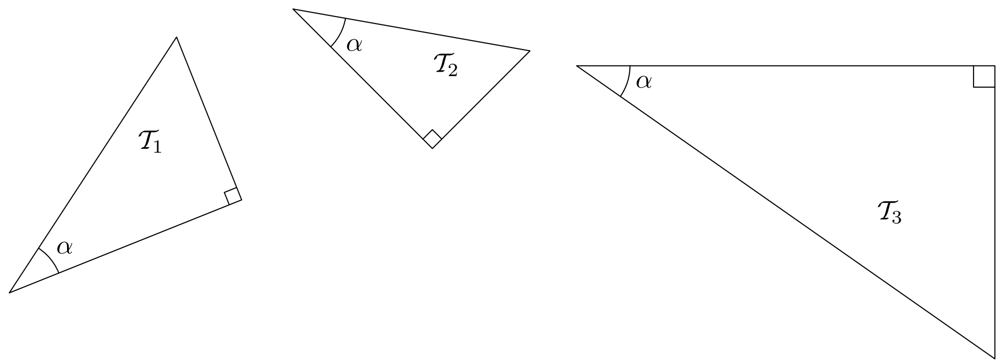
Chapitre 8

# Trigonométrie – Angle inscrit

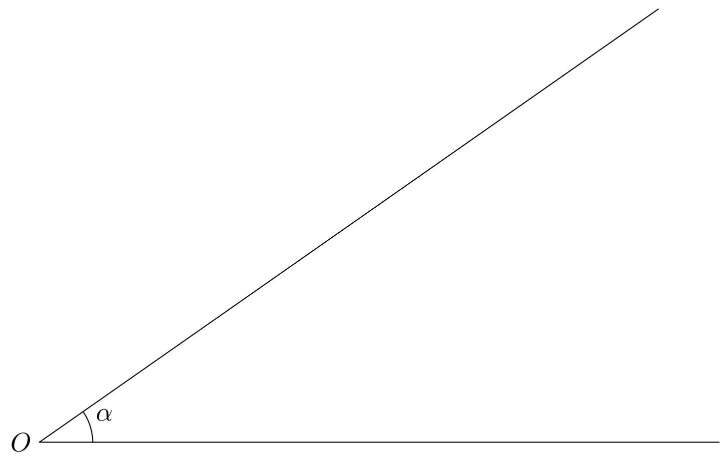
## Sommaire

### 8.1.1 Sinus et tangente d'un angle aigu

1. Détermine la valeur de l'angle $\widehat{BCA}$ à 1 degré près dans le triangle $ABC$ rectangle en $B$ tel que $AB = 3\,cm$ et $BC = 4\,cm$.
2. Sur la figure ci-dessous, les trois triangles rectangles ont leurs angles identiques.




(a) Sur la figure ci-dessous, $\widehat{xOy}$ représente un angle dont la mesure, en degré, est $\alpha$. Reproduis, sur cette figure, les 3 triangles $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$.




On adopte les notations suivantes : on note $\mathcal{T}_1$ le triangle $OAD$ rectangle en $A$ ; $\mathcal{T}_2$ le triangle $OBE$ rectangle en $B$ ; $\mathcal{T}_3$ le triangle $OCF$ rectangle en $C$.

(b) Pourquoi les droites $(DA)$, $(EB)$ et $(FC)$ sont-elles parallèles ?

(c) i. Que représente le triangle $ODA$ pour le triangle $OEB$ ? Donne la caractéristique de cette « transformation ».

ii. Compare les rapports $\dfrac{AD}{OD}$ et $\dfrac{BE}{OE}$ puis les rapports $\dfrac{AD}{AO}$ et $\dfrac{BE}{BO}$.

(d) i. Que représente le triangle $OFC$ pour le triangle $OEB$ ? Donne la caractéristique de cette « transformation ».

ii. Compare les rapports $\dfrac{CF}{OF}$ et $\dfrac{BE}{OE}$ puis les rapports $\dfrac{CF}{CO}$ et $\dfrac{BE}{BO}$.

Les rapports $\frac{CF}{OF}$, $\frac{BE}{OE}$ et $\frac{AD}{OD}$ sont ............et ne dépendent pas des longueurs des triangles rectangles mais uniquement de l'angle $\alpha$ des triangles rectangles. Ces quotients définissent un nombre appelé .........de l'angle $\alpha$.

$$\ldots\ldots\ \alpha = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{CF}{OF} = \frac{BE}{OE} = \frac{AD}{OD}$$

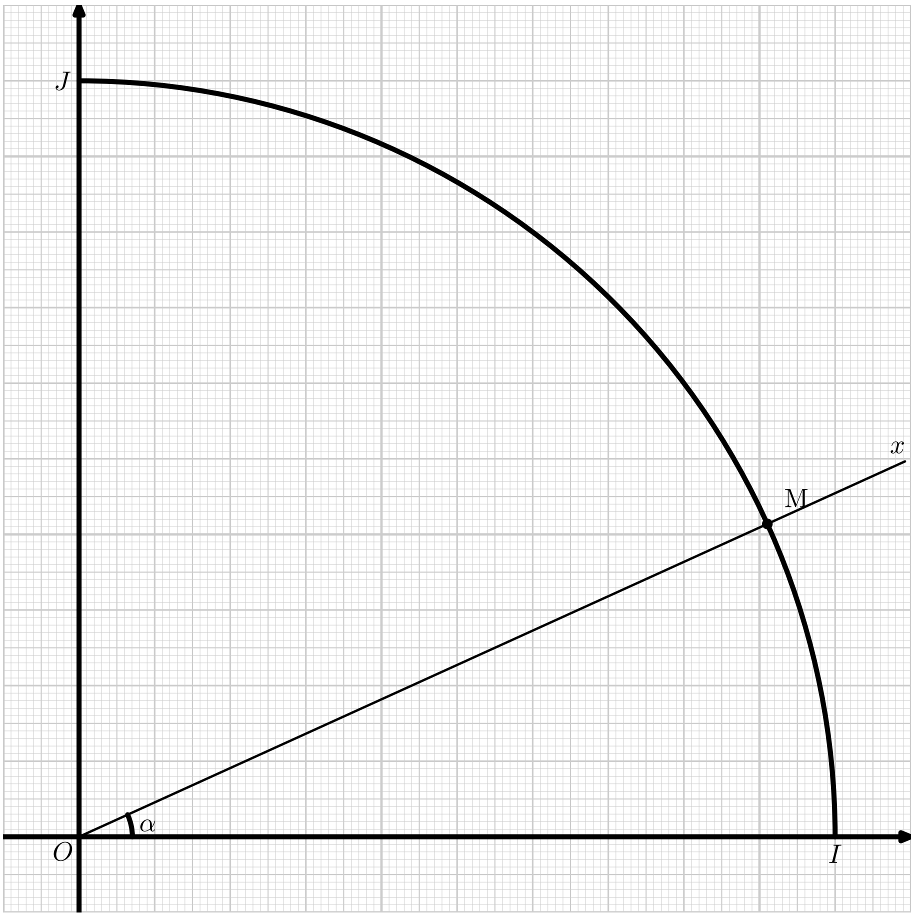
Les rapports $\frac{CF}{CO}$, $\frac{BE}{BO}$ et $\frac{AD}{AO}$ sont ............et ne dépendent pas des longueurs des triangles rectangles mais uniquement de l'angle $\alpha$ des triangles rectangles. Ces quotients définissent un nombre appelé .........de l'angle $\alpha$.

$$\ldots\ldots\ \alpha = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{CF}{CO} = \frac{BE}{BO} = \frac{AD}{AO}$$

### 8.1.2 Le quart de cercle trigonométrique

**Définition**

On considère la figure ci-dessous qui représente un quart de cercle de rayon 1. On a construit l'angle $\widehat{IOx}$ de mesure $\alpha$ (en degrés) et on appelle $M$ l'autre point d'intersection de cet angle avec le quart de cercle.




1. Lis graphiquement les coordonnées du point $M$.
2. On appelle $H$ le point de l'axe des abscisses qui à la même abscisse que $M$ et $K$ le point de l'axe des ordonnées qui à la même ordonnée que $M$.
   (a) Complète la figure.

   (b) Calcule les longueurs $OH$ et $OK$.
   (c) Donne alors une valeur approchée de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
3. Construis la tangente au cercle en $I$. Elle recoupe l'angle $\widehat{IOx}$ en $N$.
   (a) Calcule la longueur $IN$.
   (b) Donne alors une valeur approchée de $\tan\alpha$.

**Liens entre le cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu**

1. Applique le théorème de Thalès aux triangles $OMH$ et $OIN$. Quelle formule obtient-on ?
2. Applique le théorème de Pythagore au triangle $OHM$. Quelle formule obtient-on ?

### 8.1.3 Théorème de l'angle inscrit

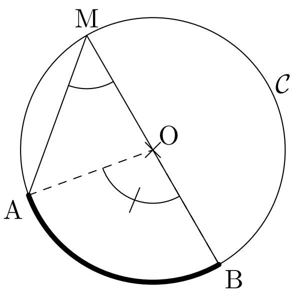



Figure 1

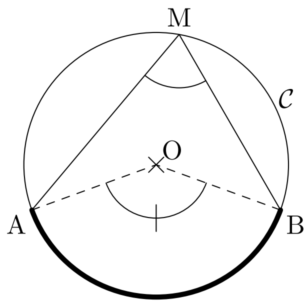



Figure 2

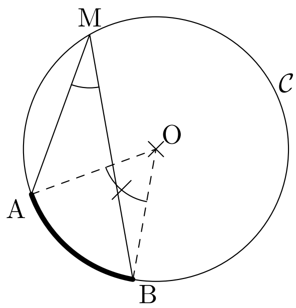


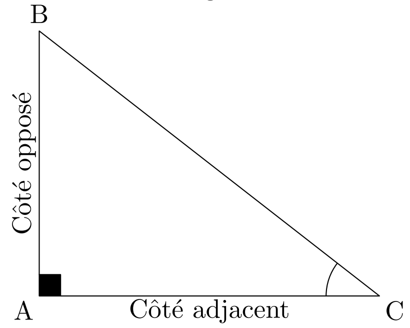

Figure 3

1. Pour chacune des figures, que sont les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ ?
2. Pour la **figure 1**,
   (a) Démontre que $2 \times \widehat{OMA} = 180 - \widehat{AOM}$ et que $\widehat{AOB} = 180 - \widehat{AOM}$.
   (b) Déduis-en l'expression de $\widehat{AOB}$ en fonction de l'angle $\widehat{AMB}$.
3. Pour les **figures 2** et **3**,
   (a) Reproduis les figures et complète-les en traçant le diamètre $[MN]$ du cercle $\mathcal{C}$.
   (b) En utilisant le résultat de la question 2b, exprime $\widehat{AON}$ en fonction de $\widehat{AMN}$ puis $\widehat{NOB}$ en fonction de $\widehat{NMB}$.
   (c) Exprime $\widehat{AOB}$ en fonction de $\widehat{AMB}$.
4. Enonce la propriété ainsi démontrée.

## 8.2. Cours

### 8.2.1 Vocabulaire

Dans un triangle $ABC$ rectangle en $A$ :



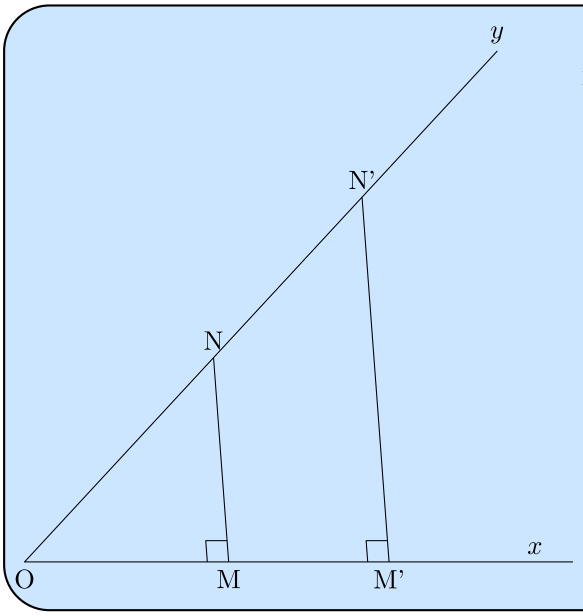

le segment $[BC]$ est l'hypoténuse.
le segment $[AC]$ est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$.
le segment $[AB]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$.

Rappel : Dans le triangle $ABC$ rectangle en $A$, on a

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \qquad \cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC}$$

### 8.2.2 Sinus et tangente d'un angle aigu




Soit $\widehat{xOy}$ un angle aigu. Pour tout triangle rectangle ayant $\widehat{xOy}$ comme angle, on a

$$\sin\widehat{xOy} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{xOy}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin\widehat{xOy} = \frac{MN}{ON} = \frac{M'N'}{ON'}$$

$$\tan\widehat{xOy} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{xOy}}{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{xOy}}$$

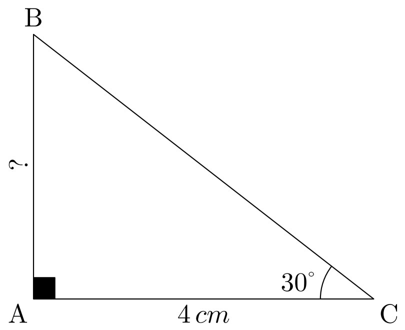
$$\tan\widehat{xOy} = \frac{MN}{OM} = \frac{M'N'}{OM'}$$

Si $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ alors $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$ et $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$

### 8.2.3 Applications

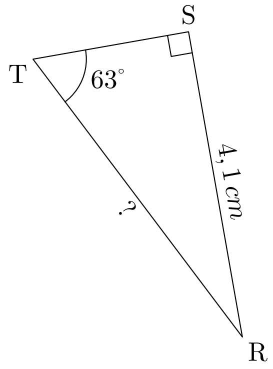
Pour les calculs, on utilise le mode « **degré** » de la calculatrice.

**Calculer une longueur**




Dans le triangle $ABC$ rectangle en $C$, on a

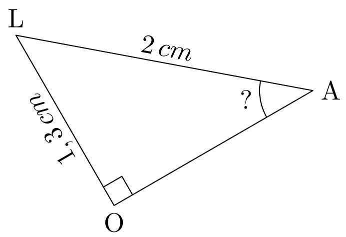
$$\tan \widehat{CAB} = \frac{BC}{AC}$$
$$\tan 30 = \frac{BC}{4}$$
$$BC = 4 \times \tan 30$$
$$BC \simeq 2,3\,cm$$




Dans le triangle $RST$ rectangle en $S$, on a

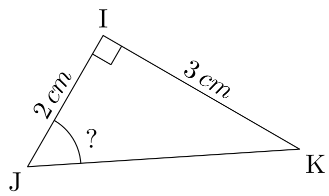
$$\sin \widehat{RTS} = \frac{RS}{RT}$$
$$\sin 63 = \frac{4,1}{RT}$$
$$RT \times \sin 63 = 4,1$$
$$RT = \frac{4,1}{\sin 63}$$
$$RT \simeq 4,6\,cm$$

**Calculer un angle**




Dans le triangle $LOA$ rectangle en $O$, on a

$$\sin \widehat{LAO} = \frac{OL}{AL}$$
$$\sin \widehat{LAO} = \frac{1,3}{2}$$
$$\widehat{LAO} \simeq 41^\circ$$




Dans le triangle $IJK$ rectangle en $I$, on a

$$\tan \widehat{IJK} = \frac{IK}{IJ}$$
$$\tan \widehat{IJK} = \frac{3}{2}$$
$$\widehat{IJK} \simeq 56^\circ$$

### 8.2.4 Relations trigonométriques

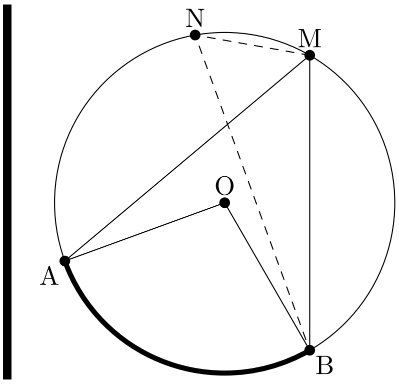
Dans un triangle rectangle, si $x$ désigne la mesure de l'un des angles aigus alors

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Remarque : On note également $(\sin x)^2 = \sin^2 x$ et $(\cos x)^2 = \cos^2 x$.

### 8.2.5 Le théorème de l'angle inscrit

#### Vocabulaire




Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$.

- On dit qu'un angle $\widehat{AMB}$ est **<u>inscrit</u>** dans le cercle $\mathcal{C}$ lorsque son sommet $M$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ <u>et</u> lorsque $[MA]$ et $[MB]$ sont des cordes du cercle $\mathcal{C}$.

  On dit que l'angle $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $AB$.

  <u>Exemple</u> : l'angle $\widehat{MNB}$ est un angle incrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et il intercepte l'arc $MB$.
- L'angle $\widehat{AOB}$ est **<u>l'angle au centre</u>** associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ : ces deux angles interceptent le même arc $AB$.

#### Enoncé du théorème

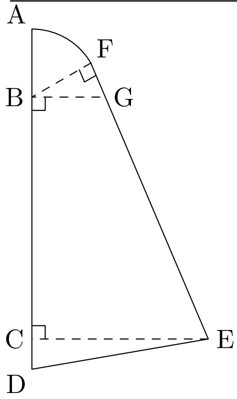
<u>Dans un cercle</u>, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

<u>Conséquence</u> : <u>Si</u> deux angles inscrits interceptent le même arc <u>alors</u> ces deux angles sont égaux.

## 8.3. Exercices

**Exercice 1** – trigo/exo1



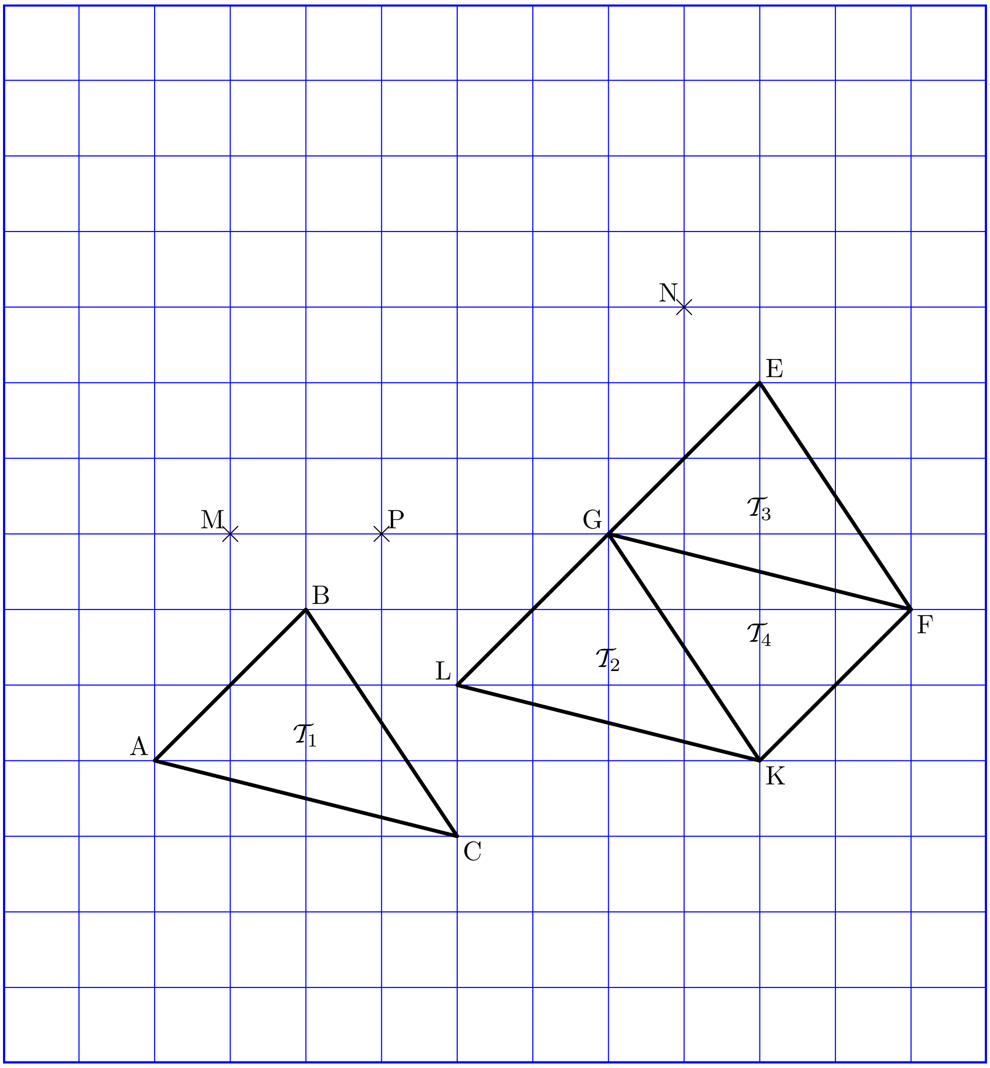

La voile d'une planche à voile a la forme ci-contre avec $AF$ un arc de cercle de centre $B$ et de rayon $AB$. Les dimensions connues sont les suivantes : $AD = 4,50\,m$ ; $DE = 2,50\,m$ ; $AB = 0,90\,m$ ; $CD = 0,40\,m$ ; $\widehat{ABF} = 60°$.
Détermine l'aire de la voile.

CHAPITRE 9

# Les vecteurs

## Sommaire

### 9.1.1 Translation et vecteurs




1. Construis l'image du triangle $\mathcal{T}_1$ par la symétrie d'axe $(MP)$.
2. Construis l'image du triangle $\mathcal{T}_3$ par la symétrie de centre $N$.
3. (a) Quelle est l'image du point $C$ par la translation qui transforme $M$ en $N$ ?
   (b) Quelle est l'image du triangle $\mathcal{T}_1$ par cette translation ?
4. (a) Quelle translation permet d'obtenir le triangle $\mathcal{T}_2$ à partir du triangle $\mathcal{T}_1$ ?
   (b) Construis l'image du point $P$ par cette translation.
5. Construis l'image du triangle $\mathcal{T}_1$ par la translation qui transforme $B$ en $K$.

### 9.1.2 Vecteurs et parallélogramme

1. Soit 2 vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
   Recopie et complète :
   – Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $B$ est l'image de $A$ par ........................................
   – Comme $B$ est l'image de $A$ par ..............................alors $B$ est l'image de $A$ par ............................... qui .........................................$A$ en $B$.

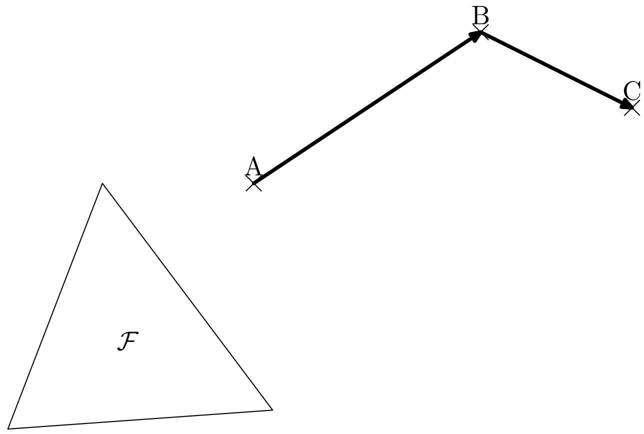
– Comme $B$ est l'image de $A$ par .................................. qui ...... $A$ en $B$ alors le quadrilatère $AB\ldots$ est un parallélogramme.

2. Soit $IJKL$ un parallélogramme.
   Recopie et complète :
   – Comme $IJKL$ est un parallélogramme alors $K$ est l'image de .............................. par la ......................................................qui transforme $I$ en $J$.
   – Comme $K$ est l'image de ............................................................ par la ...................qui transforme $I$ en $J$ alors $K$ est l'image de ................... par la ......................................................................
   – Comme $K$ est l'image de ............................................................ par la .....................................................................alors $\overrightarrow{\ldots} = \overrightarrow{\ldots}$.

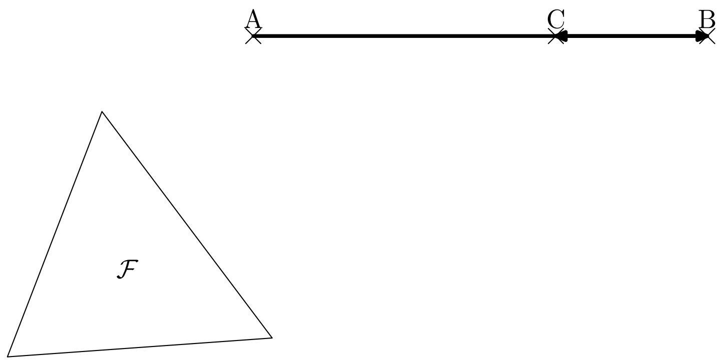
### 9.1.3 Composée de 2 translations

**Somme de 2 vecteurs**

1. Déplace la figure $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On obtient la figure $\mathcal{F}_1$.
   Déplace la figure $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On obtient la figure $\mathcal{F}_2$.
   Existe-t-il un déplacement qui envoie directement la figure $\mathcal{F}$ sur la figure $\mathcal{F}_2$ ?




2. Déplace la figure $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On obtient la figure $\mathcal{F}_1$.
   Déplace la figure $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On obtient la figure $\mathcal{F}_2$.
   Existe-t-il un déplacement qui envoie directement la figure $\mathcal{F}$ sur la figure $\mathcal{F}_2$ ?



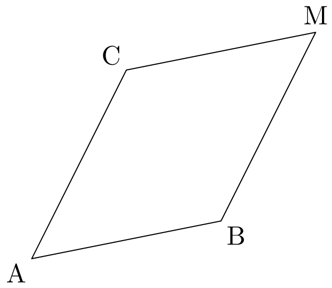

Dans les deux cas, on dit que **la somme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ et on note

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad \textbf{Relation de Chasles}$$

3. Soit 4 points $A$, $B$, $C$, $D$. Complète

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \ldots \qquad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \ldots \qquad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \ldots$$

**Où l'on retrouve le parallélogramme**




Soit $ABMC$ un parallélogramme.
On souhaite construire la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1. Peut-on appliquer la relation de Chasles ? Pourquoi ?

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

2. Quelles égalités vectorielles a-t-on ?

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................

3. Complète

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \ldots \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \ldots + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \ldots \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \ldots$$

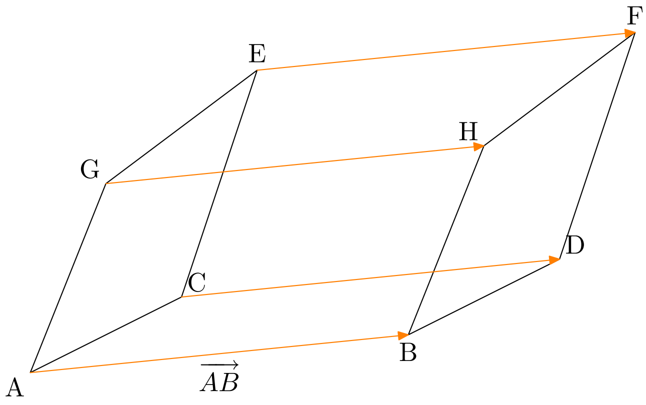
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \ldots$$

<u>Si</u> $IJKL$ est un parallélogramme <u>alors</u> $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IK}$

## 9.2. Cours

### 9.2.1 Définition

La translation qui transforme $A$ en $B$ s'appelle la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



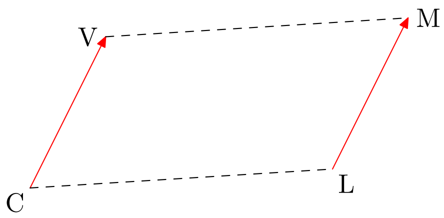

Si $B$, $D$, $F$, $H$ sont les images respectives de $A$, $C$, $E$ et $G$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{u}$$

On dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$,... sont des *représentants* du vecteur $\overrightarrow{u}$.

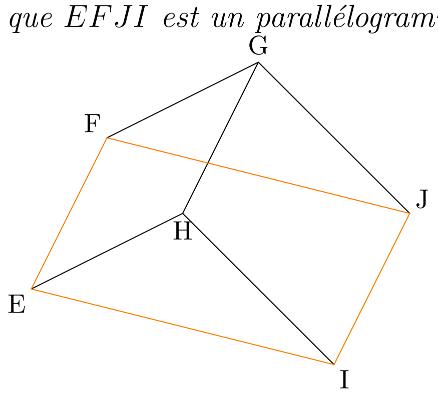
Si $ERTY$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{YT}$ et $\overrightarrow{EY} = \overrightarrow{RT}$.

Si $\overrightarrow{CV} = \overrightarrow{LM}$ alors le quadrilatère $CVML$ est un parallélogramme.




**Remarque** A l'aide de cette propriété, on peut démontrer que deux segments ont le même milieu (diagonales d'un parallélogramme), que deux segments ont la même longueur (côtés opposés d'un parallélogramme),...

**Exemple d'utlisation de ces propriétés** *Soit $EFGH$ et $GHIJ$ deux parallélogrammes. Démontre que $EFJI$ est un parallélogramme.*




Comme $EFGH$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

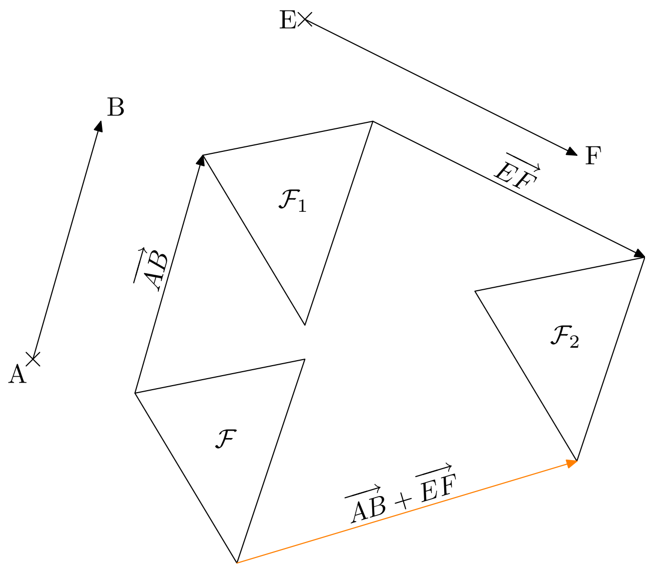
Comme $GHIJ$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{IJ}$.

Comme $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{IJ}$ alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ}$.

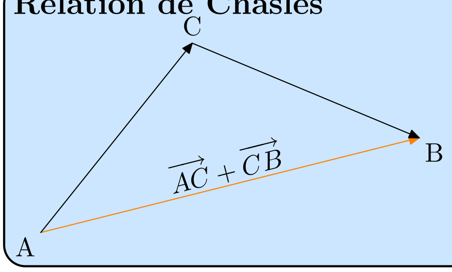
Comme $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ}$ alors le quadrilatère $EFJI$ est un parallélogramme.

### 9.2.2 Composition de 2 translations

<u>Si</u> $\mathcal{F}_1$ est l'image d'une figure $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et <u>si</u> $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ <u>alors</u> la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF}$.




**Relation de Chasles**



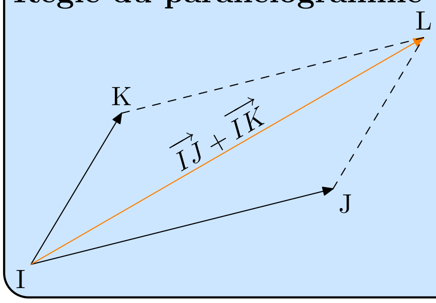

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points. Alors

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$$

**Remarques**

- L'extrémité du 1$^{\text{er}}$ vecteur est l'origine du 2$^{\text{e}}$ vecteur.
- On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$. Un tel vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé *vecteur nul* et se note $\overrightarrow{0}$.
- On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$ s'appelle *l'opposé* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et se note $-\overrightarrow{AB}$.

**Règle du parallélogramme**



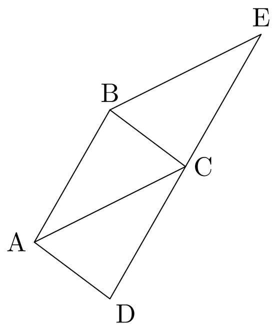

Soit $I$, $J$ et $K$ trois points. Alors

$$\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IL}$$

où $L$ est le point tel que $IJLK$ soit un parallélogramme.

**Remarque** Les vecteurs ont la même origine.

**Application : calcul avec des vecteurs**




*Sur la figure ci-contre, $ABCD$ et $ABEC$ sont des parallélogrammes. Evaluer la somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}$.*

Comme $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ d'après la règle du parallélogramme. Donc

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE} \text{ d'après la relation de Chasles}$$

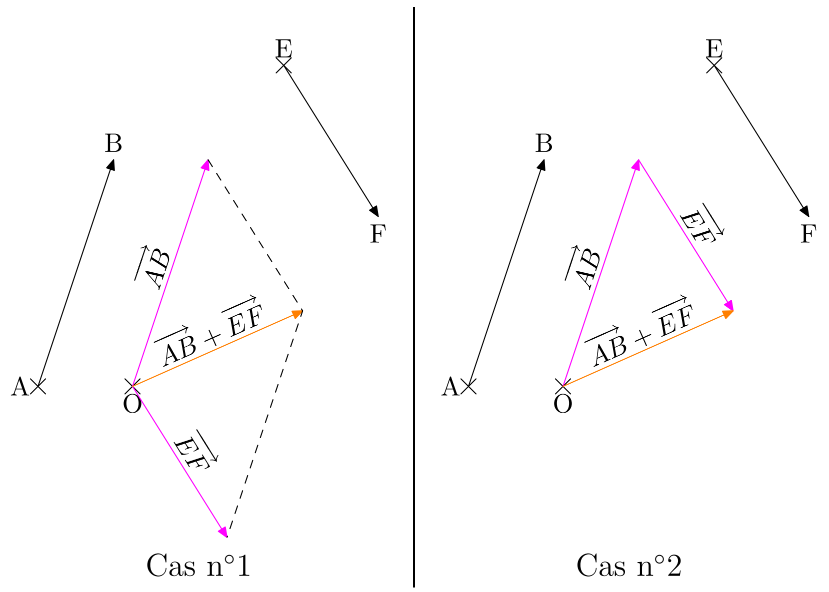
**Application : construction graphique de la somme de deux vecteurs**

3 cas se présentent :

**Les deux vecteurs ont la même origine** : on applique la règle de parallélogramme.

**L'extrémité du 1<sup>er</sup> vecteur est l'origine du 2<sup>e</sup> vecteur** : on applique la relation de Chasles.

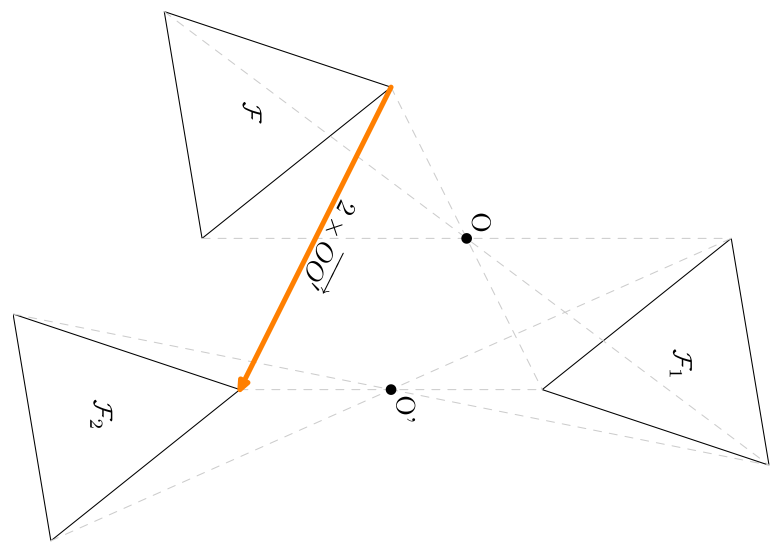
**Les deux vecteurs sont quelconques** : on choisit une origine pour construire un représentant de la somme des deux vecteurs et on se ramène à un des deux cas précédents.




Cas n°1 Cas n°2

### 9.2.3 Composée de deux symétries centrales

Si $\mathcal{F}_1$ est l'image d'une figure $\mathcal{F}$ par la symétrie centrale de centre $O$ et si $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la symétrie centrale de centre $O'$ alors la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $2\times\overrightarrow{OO'}$.


$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}_1$
$\mathcal{F}_2$
O
O'
$2 \times \overrightarrow{OO'}$

## 9.3. Exercices

**Exercice 1** – vecteurs/exo1

1. Construis un quadrilatère $ABCD$ **quelconque**. On appelle $O$ le centre de ce quadrilatère.
2. Construis les points $I$, $J$, $K$, $L$ tels que

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \qquad \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \qquad \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$$

3. Précise la nature du quadrilatère $IJKL$.
4. Que peut-on dire de ce quadrilatère si
   (a) $AC = BD$ ?
   (b) $AC = BD$ et les droites $(AC)$ et $(BD)$ sont perpendiculaires ?

**Exercice 2** – vecteurs/exo2

Soit $ABC$ un triangle tel que $AB = 4\,cm$, $AC = 3,5\,cm$ et $\widehat{CAB} = 50^\circ$. Soit $M$ un point du segment $[AC]$.

1. Contruis le point $E$ tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BM}$ et le point $F$ tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BM}$.
2. Calcule la longueur $EF$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $EMBA$ ? Justifie la réponse. Déduis-en ensuite la mesure de l'angle $\widehat{FEM}$.

**Exercice 3** – vecteurs/exo3

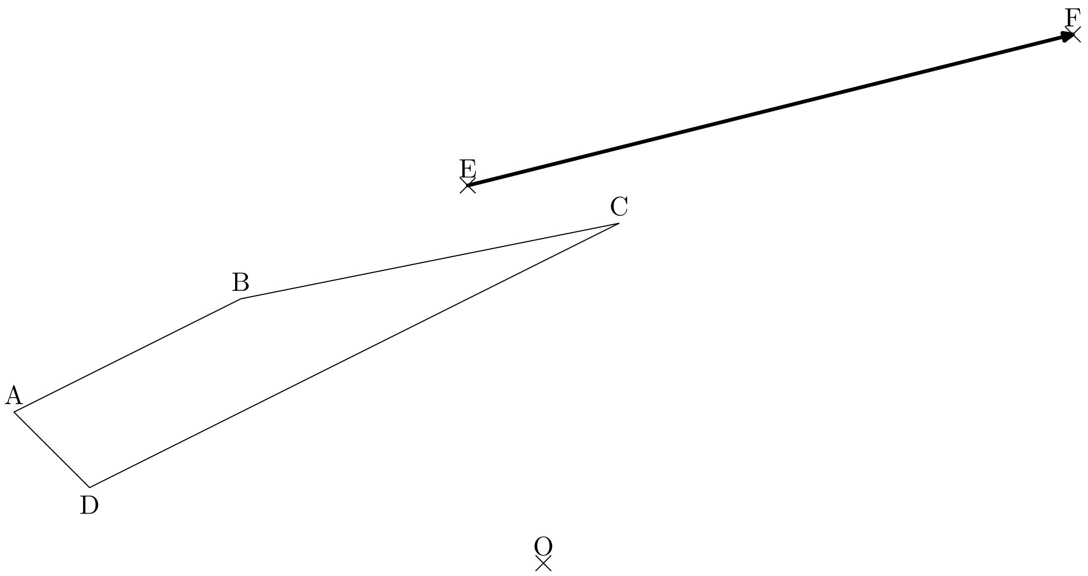
Soit un triangle $ABC$.

1. Construire les points $D$ et $E$ tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA}$.
2. Construire le point $I$ tel que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
3. Démontrer que
   (a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB}$.
   (b) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$.
   (c) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$.
   (d) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CA}$.

**Exercice 4** – vecteurs/exo4

**On répondra aux questions sur la figure ci-dessous.**

1. Construis le quadrilatère $GHIJ$, image du trapèze $ABCD$ par la symétrie centrale de centre $O$.
2. Construis le quadrilatère $RSTU$, image du trapèze $ABCD$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
3. Compare les vecteurs $\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{CT}$. Justifie
   Quelle est la nature du quadrilatère $BSTC$ ?




**Exercice 5** – vecteurs/exo5

*L'unité de longueur est le centimètre.*

On considère un triangle $ABC$ tel que $AB = 7$ ; $AC = 5$ ; $BC = 4$.

**1/** Construis le triangle $ABC$ en vraie grandeur.

**2/** Construis le point $M$ image du point $C$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**3/** (a) Construis le point $N$ tel que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

(b) Que représente le point $C$ pour le segment $[MN]$ ? Justifie.

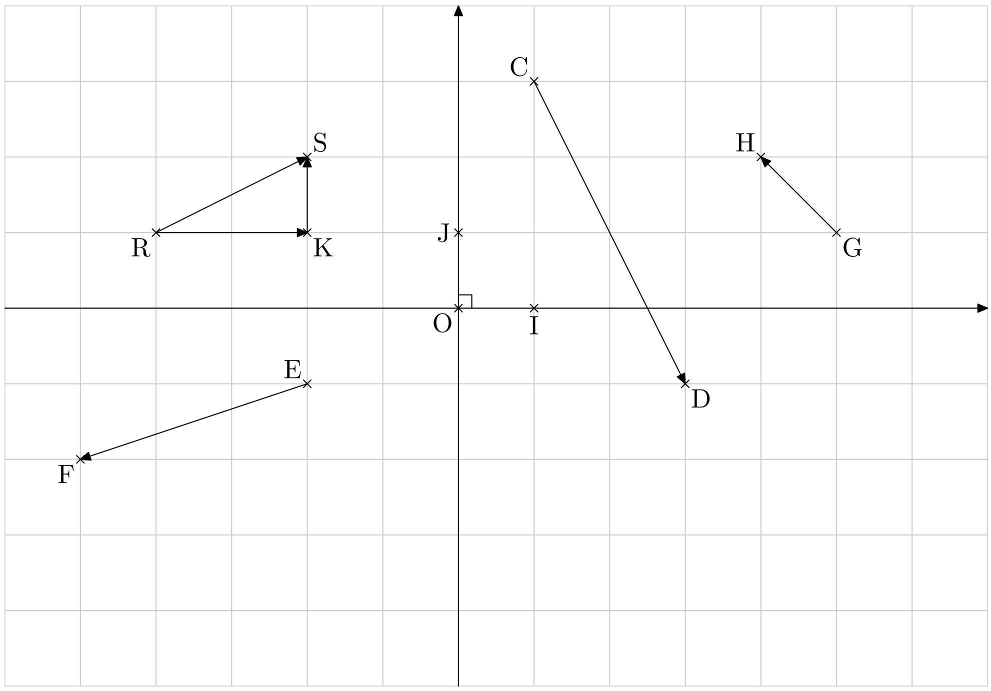
Chapitre 10

# Repère et coordonnées

## Sommaire

## 10.1. Activités

### Préliminaire




Pour aller de $R$ à $K$, on effectue une translation de vecteur $\overrightarrow{RK}$ ou graphiquement ................
..........................................................................................
On note ce déplacement $(2; 0)$.
Pour aller de $K$ à $S$, on effectue une translation de vecteur $\overrightarrow{KS}$ ou graphiquement.................
..........................................................................................
On note ce déplacement $(0; 1)$.
Pour aller de $R$ à $S$, on effectue :

- Soit une translation de vecteur $\overrightarrow{RK}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{KS}$ c'est à dire graphiquement un déplacement $(2; 0)$ suivi d'un déplacement $(0; 1)$.
- Soit une translation de vecteur ...... ou graphiquement un déplacement $(\ldots;\ldots)$.

On dit que **les coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{RS}$ sont $(\ldots;\ldots)$.

### Partie 1

1. Lis les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EF}$.

   $\overrightarrow{CD}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ $\quad$ $\overrightarrow{GH}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ $\quad$ $\overrightarrow{EF}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$

   (a) Place le point $M$ tel que le vecteur $\overrightarrow{EM}$ ait pour coordonnées $(2; -4)$.

   (b) Lis graphiquement les coordonnées de $M$.

   $$M(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$$

   Comment passe-t-on des coordonnées de $E$ à celles de $M$ ?..............................
   ..........................................................................................

   (c) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EM}$ ? ............................................
   ..........................................................................................

   (d) Quelle est la nature du quadrilatère $ECDM$ ? ........................................
   ..........................................................................................

**Partie 2**

1. (a) Soit le point $N$ tel que le vecteur $\overrightarrow{CN}$ ait pour coordonnées $(15; -13)$. Calcule les coordonnées du point $N$.

2. Soit $A$ le point de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de coordonnées $(a; b)$.
   (a) Quelles sont les coordonnées $(x_B; y_B)$ du point $B$ ?
   (b) Explique pourquoi $a = x_B - x_A$ et $b = y_B - y_A$.

   Si $A$ et $B$ ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

3. Soit $A$ de coordonnées $(2, 1)$ et $B$ le point de coordonnées $(-3, -4)$. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis vérifie graphiquement en plaçant les points $A$ et $B$ dans le repère $(O, I, J)$.

4. Application Soit $T$ le milieu du segment $[CD]$ qui a pour coordonnées $(x_T; y_T)$. Placer le point $T$ sur la figure.

   On a $\overrightarrow{CT}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ et $\overrightarrow{TD}(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.

   Or $\overrightarrow{\ldots\ldots} = \overrightarrow{\ldots\ldots}$ donc

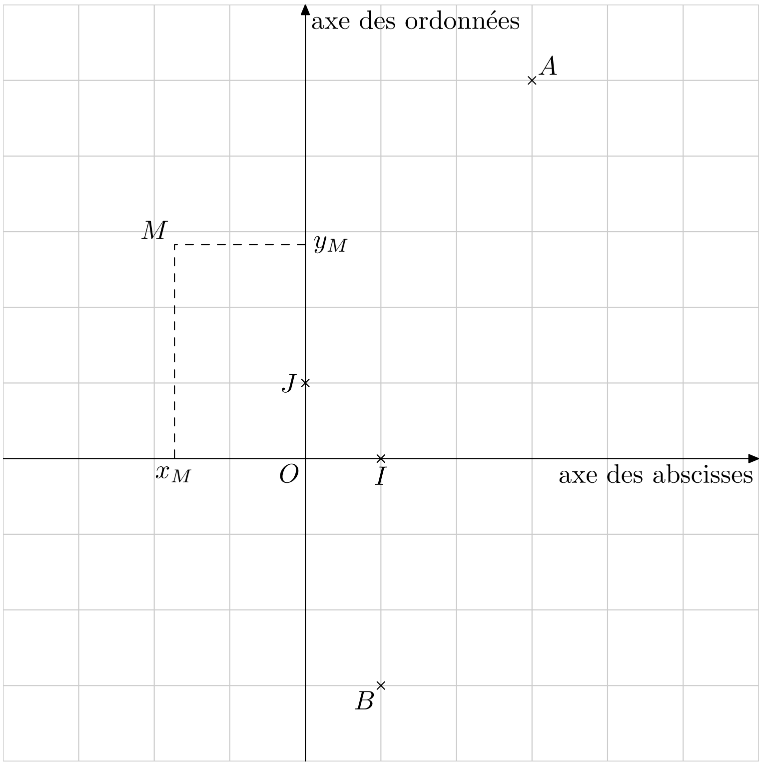
| | |
|---|---|
| ............ = ............ | ............ = ............ |
| ............ = ............ | ............ = ............ |
| ............ = ............ | ............ = ............ |
| ............ = ............ | ............ = ............ |

............ = ............ ............ = ............

## 10.2. Cours

### 10.2.1 Coordonnées d'un point

> Deux axes gradués de même origine et perpendiculaires définissent *un repère orthogonal*.
> De plus, si les axes possèdent la même unité de longueur alors le repère est dit *orthonormé*.




Dans l'exemple ci-dessus, on dira que les coordonnées du point $M$ sont $(x_M, y_M)$, que celles du point $A$ sont $(3; 5)$ et que celles du point $B$ sont $(1; -3)$.

> Dans un repère quelconque, soit $A$ et $B$ deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$. Alors les coordonnées du point $K$, milieu du segment $[AB]$ sont
>
> $$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

**Exemple** Sur la figure ci-dessus, le milieu $K$ du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$x_K = \frac{3+1}{2} \qquad y_K = \frac{5+(-3)}{2}$$

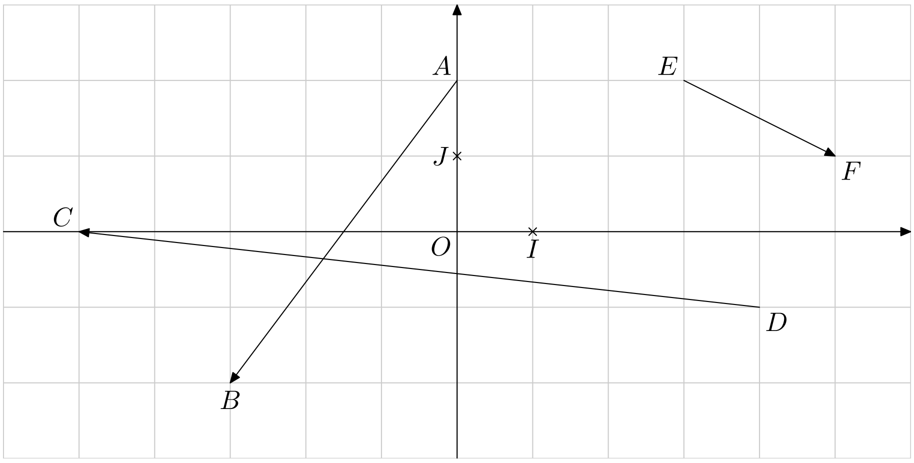
$$x_K = \frac{4}{2} \qquad y_K = \frac{2}{2}$$

$$x_K = 2 \qquad y_K = 1$$

### 10.2.2 Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère quelconque, soit $E$ et $F$ deux points de coordonnées respectives $(x_E; y_E)$ et $(x_F; y_F)$. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont

$$(x_F - x_E\,;\, y_F - y_E)$$




**Exemples**
Sur la figure ci-dessus, on a

$$\begin{array}{ll}
\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A) & \overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;\, y_C - y_D) \\
\overrightarrow{AB}(-3 - 0\,;\, -2 - 2) & \overrightarrow{DC}(-5 - 4\,;\, 0 - (-1)) \\
\overrightarrow{AB}(-3\,;\, -4) & \overrightarrow{DC}(-9\,;\, 1)
\end{array}$$

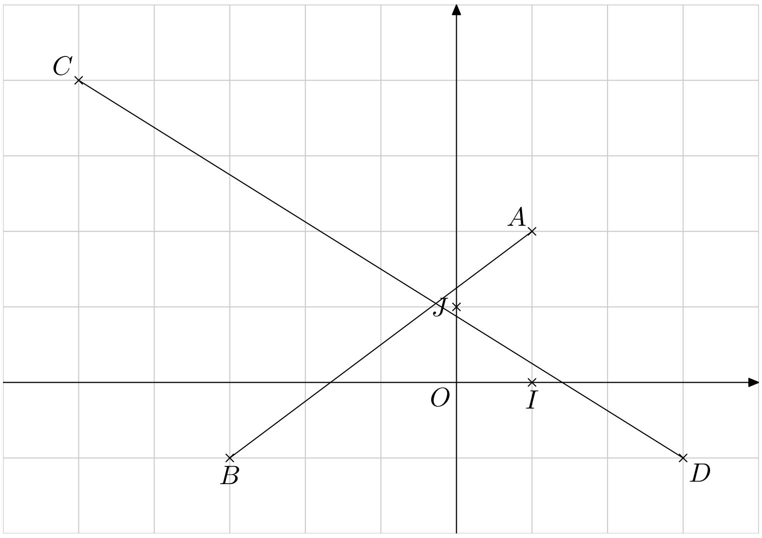
**Vérification graphique** Le déplacement rectiligne de $A$ à $B$ correspond graphiquement à un déplacement horizontal de 3 unités dans le sens négatif suivi d'un déplacement vertical de 4 unités dans le sens négatif.

▌ Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées.

### 10.2.3 Distance dans un repère orthonormé

Dans **un repère orthonormé**, soit $E$ et $F$ deux points de coordonnées respectives $(x_E; y_E)$ et $(x_F; y_F)$. Alors, on a

$$EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 \quad \text{et} \quad EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$$




**Exemples** Sur la figure ci-dessus, le repère est orthonormé : on a donc

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 & CD^2 &= (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 \\
AB^2 &= (-3-1)^2 + (-1-2)^2 & CD^2 &= (3-(-5))^2 + (-1-4)^2 \\
AB^2 &= (-4)^2 + (-3)^2 & CD^2 &= (3+5)^2 + (-5)^2 \\
AB^2 &= 16+9 & CD^2 &= 64+25 \\
AB^2 &= 25 & CD^2 &= 89 \\
AB &= 5 & CD &= \sqrt{89}
\end{aligned}
$$

**Remarques** Les réponses sont données dans l'unité de longueur commune aux deux axes.

## 10.3. Exercices

**Exercice 1** – reperes/exo1

*Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, I, J)$. L'unité choisie est le centimètre. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.*

1. Placer les points $A(4; 5)$, $B(0; -3)$ et $C(-6; 0)$.
2. (a) Montrer que $AB = \sqrt{80}\,cm$, $AC = \sqrt{125}\,cm$ et $BC = \sqrt{45}\,cm$.
   (b) En déduire que $ABC$ est un triangle rectangle. Préciser l'angle droit.
3. (a) Construis le point $D$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   (b) Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.
   (c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
   (d) Vérifier à l'aide d'un calcul que les coordonnées du point $D$ sont $(-2; 8)$.
4. (a) Calculer les coordonnées du point $K$ milieu du segment $[AC]$.
   (b) Que représente le point $K$ pour le quadrilatère $ABCD$ ?

**Exercice 2** – reperes/exo2

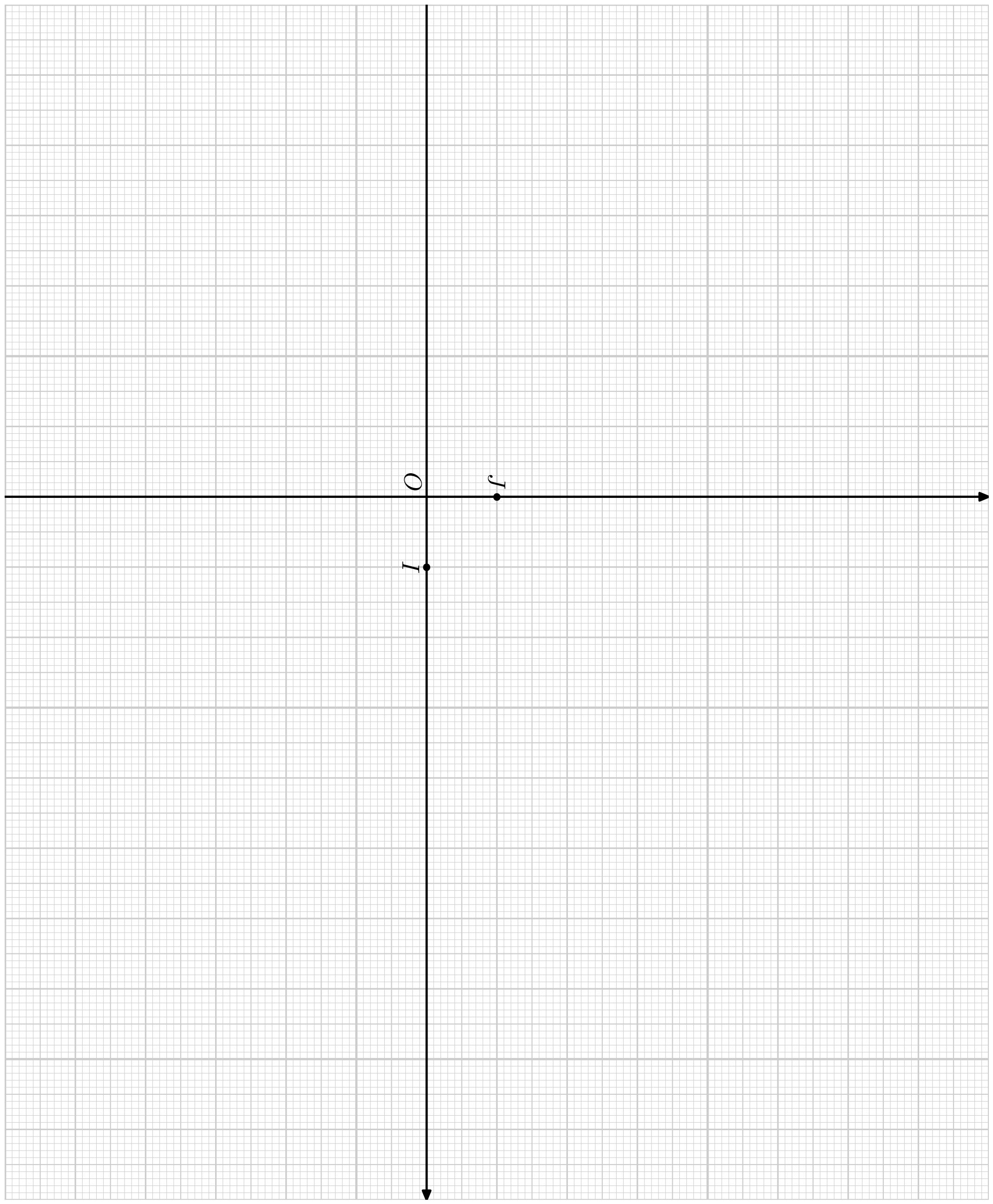
Dans un repère orthonormal $(O, I, J)$, on considère les points $A(-4; 3)$, $B(3; 2)$ et $C(1; -2)$. L'unité graphique est le centimètre.

### Partie A

1. Placer les points $A$, $B$ et $C$ dans le repère $(O, I, J)$ joint.
2. (a) Calculer la longueur $AB$.
   (b) On admet que le calcul donne $AC = \sqrt{50}$ et $BC = \sqrt{20}$. Que peut-on en déduire pour le triangle $ABC$ ?
3. Soit $H$ le milieu du segment $[BC]$. Vérifier par le calcul que $H$ a pour coordonnées $(2; 0)$.
4. Pourquoi le segment $[AH]$ est-il une hauteur du triangle $ABC$ ?
5. (a) Prouver que $AH = 3\sqrt{5}$.
   (b) Calculer l'aire du triangle $ABC$.

### Partie B

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Le point $D$ est l'image du point $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (a) Placer le point $D$.
   (b) Montrer par le calcul que $D$ a pour coordonnées $(8; -3)$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ACDB$ ? Justifier.


O
J
I

Chapitre 11

# La rotation

## Sommaire

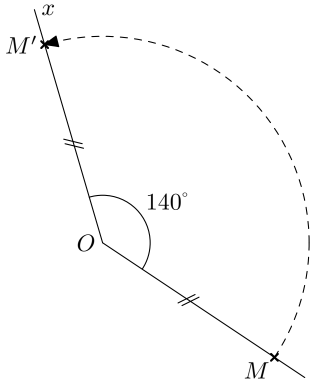
### 11.2.1 Image d'une figure par une rotation

$O$ désigne un point, $M$ un point différent de $O$ et $\alpha$ la mesure d'un angle en degrés. L'image $M'$ du point $M$ par la rotation de centre $O$ et de rayon $\alpha$ dans un sens précisé est tel que :
- $OM' = OM$ ;
- $\widehat{MOM'} = \alpha$ en tenant compte du sens de la rotation ;

**Remarque :** Il existe deux sens de rotation :
– le sens des inverse des aiguilles d'une montre : c'est le sens **direct** et c'est le plus utilisé ;
– le sens des aiguilles d'une montre : c'est le sens **indirect**

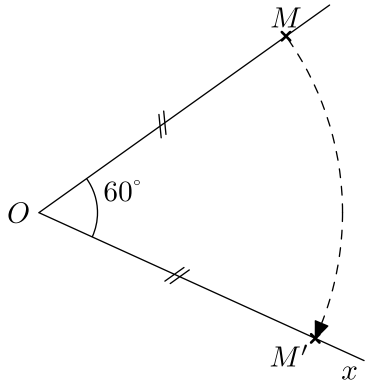
**Constructions :**

Rotation de sens direct



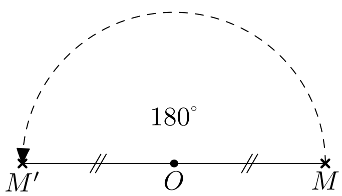

Pour construire le point $M'$ image de $M$ par la rotation d'angle 140° dans le sens **direct**, on trace la demi-droite $[Ox)$ avec le rapporteur (angle 140°) puis avec le compas pointé en $O$, on prend l'écartement $OM$ et on le reporte sur $[Ox)$. Le point d'intersection est l'image $M'$.

Rotation de sens indirect

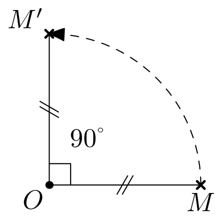



Pour construire le point $M'$ image de $M$ par la rotation d'angle 60° dans le sens **indirect**, on trace la demi-droite $[Ox)$ avec le rapporteur tourné dans l'autre sens (angle 60°) puis avec le compas pointé en $O$, on prend l'écartement $OM$ et on le reporte sur $[Ox)$. Le point d'intersection est l'image $M'$.

**Cas particuliers :**
Une rotation de centre $O$ et d'angle 180° est une symétrie (centrale) de centre $O$.



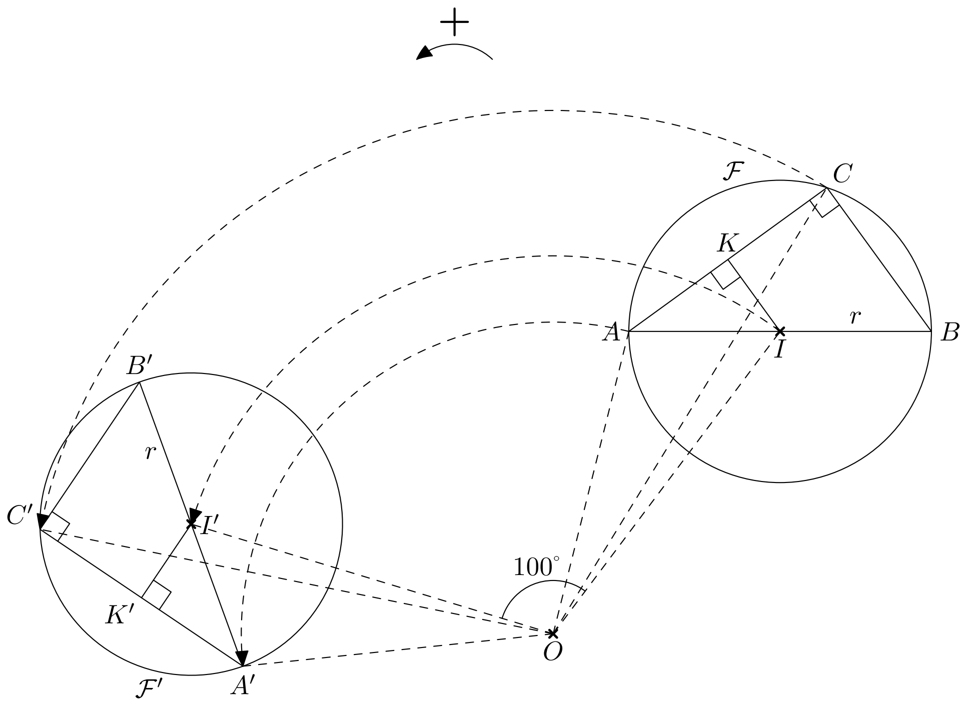
Une rotation de centre $O$ et d'angle 90° s'appelle **un quart de tour**.




### 11.2.2 Propriétés de conservation

Soit $A$, $B$, $C$ trois points et $A'$, $B'$, $C'$ leurs images respectives par une rotation.
- La rotation conserve les distances : $A'B' = AB$.
- La rotation conserve les aires.
- La rotation conserve les angles : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
- La rotation conserve l'alignement : si $A$, $B$, $C$ sont alignés alors $A'$, $B'$, $C'$ le sont aussi.
- La rotation conserve les milieux : si $C$ est le milieu du segment $[AB]$ alors $C'$ est le milieu du segment $[A'B']$.
- La rotation transforme un segment en un segment, une droite en une droite, une demi-droite en une demi-droite.
- La rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon.

**Exemple**
La figure $\mathcal{F}'$ est l'image de $\mathcal{F}$ par la rotation :
– de centre O,
– d'angle 110°,
– de sens direct.
$\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ sont **superposables**. Par cette rotation, $A'$, $B'$, $C'$ sont les images respectives de $A$, $B$ et $C$.




- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ et on a $A'B' = AB$.
- L'image du cercle de centre $I$ et de rayon $r$ est le cercle de centre $I'$ et de même rayon.
- L'image de la droite $(BC)$ est la droite $(B'C')$.

- Les images des deux droites parallèles $(IK)$ et $(CB)$ sont deux droites parallèles : $(I'K')$ et $(C'B')$.
- Les images des deux droites perpendiculaires $(IK)$ et $(CA)$ sont deux droites perpendiculaires : $(I'K')$ et $(C'A')$.

### 11.2.3 Polygones réguliers

**Un polygone régulier** est un polygone dont tous les sommets sont sur un cercle et dont tous les côtés ont la même longueur.

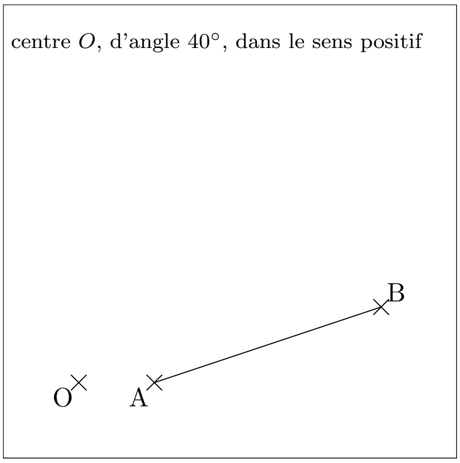
Exemple : un triangle équilatéral ou un carré sont des polygones réguliers.

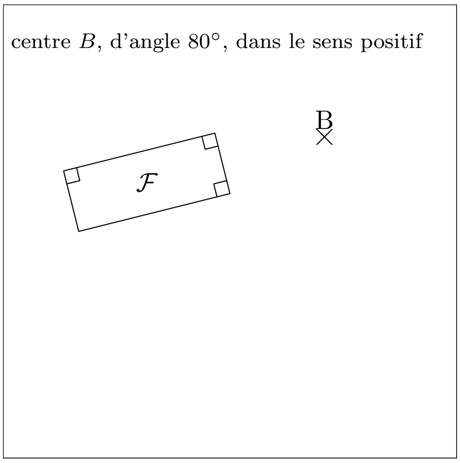
Tous les angles au centre d'un polygone régulier sont égaux.
Si $n$ est le nombre de côtés de ce polygone régulier alors l'angle au centre est égal à $\frac{360}{n}$.

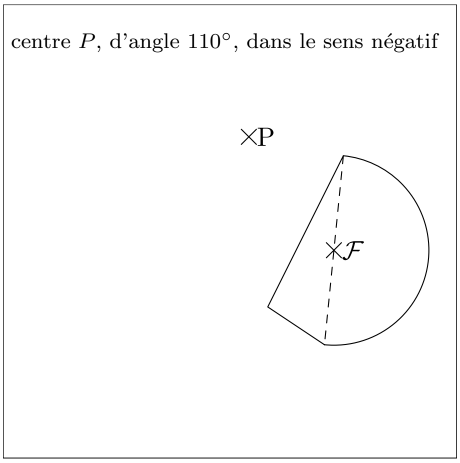
## 11.3. Exercices

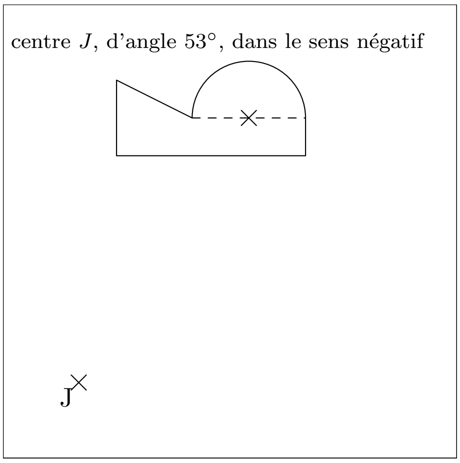
**Exercice 1** – rotation/exo1

Pour chacun des cas suivants, construis l'image de la figure $\mathcal{F}$ par la rotation dont les caractéristiques sont données sur chacune des figures.



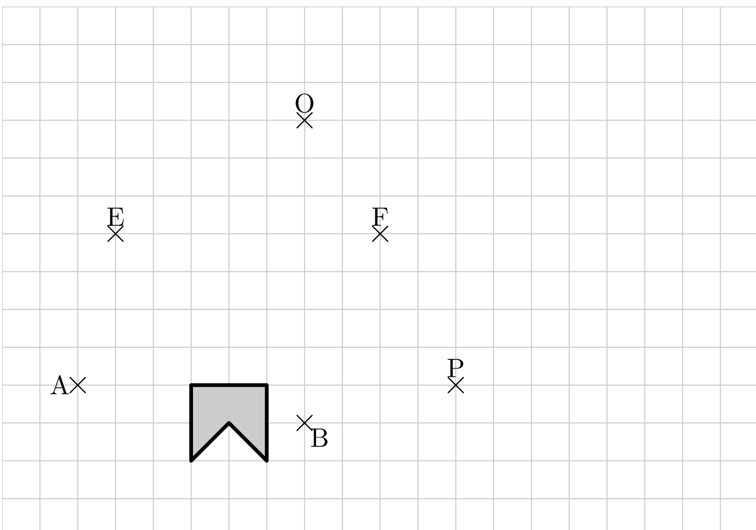



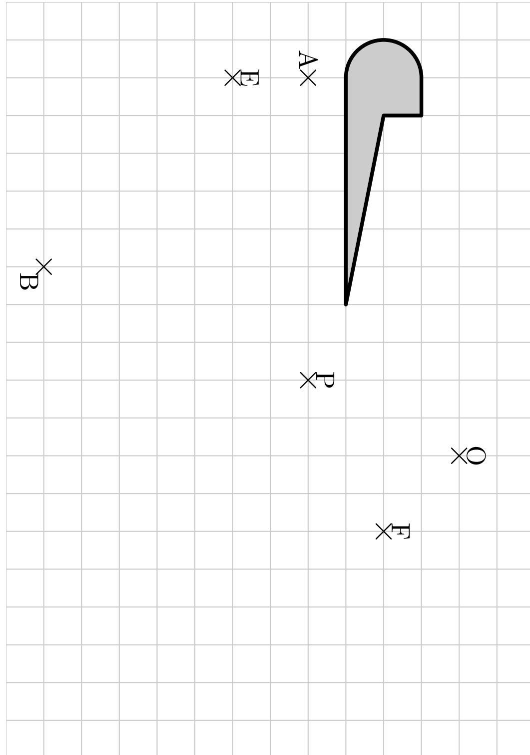




**Exercice 2** – rotation/exo2

Sur les quadrillages ci-dessous, construis l'image $\mathcal{F}_1$ de la figure $\mathcal{F}$ par la symétrie axiale d'axe $(EF)$ ; l'image $\mathcal{F}_2$ de la figure $\mathcal{F}$ par la symétrie centrale de centre $P$ ; l'image $\mathcal{F}_3$ de la figure $\mathcal{F}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'image $\mathcal{F}_4$ de la figure $\mathcal{F}$ par la rotation de centre $O$, d'angle 90° dans le sens indiqué par la flèche.




A
E
B
P
Q
F

# Troisième partie

# Gestion de données

Chapitre 12

# Statistiques

## Sommaire

## 12.1. Activités

• Voici les résultats de la classe de 3N au premier contrôle de Mathématiques.

$10-14-10-18-18-3-12-12-12-1-4-9,5-1-6-8-6-8-12-4-6-1-2-9-14-12$

1. (a) Combien y-avait-t-il d'élèves présents ? ..........................................
   ..........................................................................................
   (b) Complète le tableau suivant.

| Note | 01 | 02 | 03 | 04 | 06 | 08 | 09 | 09,5 | 10 | 12 | 14 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 3 | 1 | | | | | | | | | | |
| Effectifs Cumulés Croissants | | | | | | | | | | | | |

2. Rappelle la formule permettant de calculer la fréquence d'une valeur du caractère et complète le tableau

$$f = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

| Note | 01 | 02 | 03 | 04 | 06 | 08 | 09 | 09,5 | 10 | 12 | 14 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence en % | | | | | | | | | | | | |

• Voici les résultats de la classe de 3N au deuxième contrôle de Mathématiques.

$4-15-8-20-12-3-10-12-8,5-4-4-9-0-7-8,5-7-7-0-6-6-12-17-7-17$

1. (a) Combien y-avait-t-il d'élèves présents ? ..........................................
   ..........................................................................................
   (b) Complète le tableau suivant.

| Note | 00 | 03 | 04 | 06 | 07 | 08 | 08,5 | 09 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | | | | | | | | | | | | | |
| Effectifs Cumulés Croissants | | | | | | | | | | | | | |
| Fréquence en % | | | | | | | | | | | | | |

### 12.1.1 Caractéristiques de position

**La moyenne d'une série statistique**

1. Calcule la moyenne du premier contrôle.

$$M_1 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$M_1 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

$$M_1 = \ldots$$

2. Calcule la moyenne du deuxième contrôle.

$$M_2 = \rule{8cm}{0.4pt}$$

$$M_2 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

$$M_2 = \ldots$$

Que remarque-t-on ? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**La médiane d'une série statistique**

1. Dans le premier devoir, on remarque que 12 élèves ont obtenu une note strictement inférieure à 9 et 12 élèves ont obtenu une note strictementsupérieure à 9.
   9 s'appelle **la médiane** de la série.
2. Dans le deuxième devoir, on remarque que 12 élèves ont obtenu une note inférieure à . . . et 12 élèves ont obtenu une note supérieure à . . . .
   Dans ce cas, . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

> Les valeurs du caractère étant rangées par *ordre croissant* (ou *décroissant*), **la médiane** d'une série statistique est la valeur du caractère qui partage la série en deux parties de même effectif.

### 12.1.2 Caractéristique de dispersion

Quelle est, pour le premier devoir, la différence entre la plus grande note et la plus petite note ? . . .
Quelle est, pour le deuxième devoir, la différence entre la plus grande note et la plus petite note ? . .

> On appelle **étendue** d'une série statistique, la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs du caractère.

Quel est le meilleur contrôle ? Justifie. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

### 12.1.3 Exemple

On étudie la durée d'utilisation de 20 ordinateurs et on obtient le tableau suivant :

| Durée d'utilisation (années) | Effectif |
|---|---|
| $[0; 2[$ | 2 |
| $[2; 4[$ | 3 |
| $[4; 6[$ | 8 |
| $[6; 8[$ | 7 |

Calcule la moyenne, la médiane et l'étendue de cette série statistique.

**1/** Moyenne : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**2/** Médiane : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**3/** Etendue : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# 12.2. Cours

## 12.2.1 Caractéristiques de position d'une série statistique

### Moyenne d'une série statistique

- Série représentée en liste
  Une classe de 5$^{e}$ a fait un contrôle de mathématiques. Voici la liste des notes obtenues : 8, 11, 5, 12, 2, 17, 7, 8, 19, 2, 10, 4, 7, 7, 11, 14, 7, 8, 12, 5, 10, 8, 5, 10, 11, 8, 12, 10, 14, 12.
  Si l'on veut calculer la moyenne de ce contrôle, on additionne les notes et on divise par le nombre de notes :
$$\frac{8+11+5+\ldots+10+14+12}{30} = \frac{276}{30} = 9,2$$
- Série regroupée par valeurs dans un tableau
  On peut aussi regrouper ces nombres dans le tableau suivant selon les valeurs des notes obtenues :

| **Notes** | 2 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 14 | 17 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 |

  La moyenne est alors **une moyenne pondérée** par les effectifs ; on la calcule en multipliant chaque valeur par l'effectif correspondant, en faisant la somme de ces produits et en divisant par l'effectif total, soit :
$$\frac{2\times 2+4\times 1+5\times 3+\ldots+14\times 2+17\times 1+19\times 1}{30} = \frac{276}{30} = 9,2$$
- Série regroupée par classe dans un tableau
  On peut enfin regrouper ces nombres en classes dans le tableau suivant :

| **Notes** | $0 \leqslant n < 5$ | $5 \leqslant n < 10$ | $10 \leqslant n < 15$ | $15 \leqslant n \leqslant 20$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **centre de la classe** | 2,5 | 7,5 | 12,5 | 17,5 | |
| **Effectif** | 3 | 12 | 13 | 2 | 30 |

  On considère alors que le centre de chaque classe représente la classe donc la moyenne de la série ainsi regroupée en classesest égale à :
$$\frac{2,5\times 3+7,5\times 12+12,5\times 13+17,5\times 2}{30} = \frac{295}{30} \approx 9,83$$

**Remarques :**
- La moyenne et la moyenne pondérée par les effcetifs sont égales.
- Le regroupement en classes permet des calculs plus rapides mais ne permet pas d'obtenir la valeur exacte de la moyenne.

### Médiane d'une série statistique

La **médiane** $\mathcal{M}$ d'une série statistique est la valeur qui partage le groupe étudié en deux sous-groupes de même effectif chacun tels que :
- tous les éléments du premier groupe on des valeurs inférieures ou égales à $\mathcal{M}$ ;
- tous les éléments du deuxième groupe ont des valeurs supérieures ou égales à $\mathcal{M}$.

**Application :**

- **Détermination de la médiane d'une série statistique**
  - **A partir d'un tableau d'effectifs cumulés ou de fréquences cumulées**

*Exemple :*

Sur une population de 75 feuilles de platane, on étudie la longueur en $mm$ de la grande nervure. On obtient le tableau statistique suivant :

| Longueurs | 102 | 112 | 122 | 132 | 142 | 152 | 162 | 172 | 182 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 6 | 6 | 10 | 13 | 19 | 10 | 8 | 2 |
| Effectif cumulé croissant | 1 | 7 | 13 | 23 | 36 | 55 | 65 | 73 | 75 |

Les feuilles étant rangées par longueurs croissantes, la case grisée indique que de la 37^e^ à la 55^e^, les feuilles ont pour longueur 152 $mm$.

Or $75 = 37 + 1 + 37$ donc la médiane est la longueur de la 38^e^ feuille c'est-à-dire 152 $mm$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang : | $1^{re}$ | $2^e$ | ... | $36^e$ | $37^e$ | $38^e$ | $39^e$ | ... | $75^e$ |
| Longueur : | 102 | 112 | ... | 142 | 152 | 152 | 152 | ... | 182 |
| | | 37 feuilles | | | | | 37 feuilles | | |

D'autre part, la longueur moyenne de ces feuilles est de :

$$m = \frac{102 \times 1 + 112 \times 6 + 122 \times 6 + 132 \times 10 + 142 \times 13 + 152 \times 19 + 162 \times 10 + 172 \times 8 + 182 \times 2}{75}$$

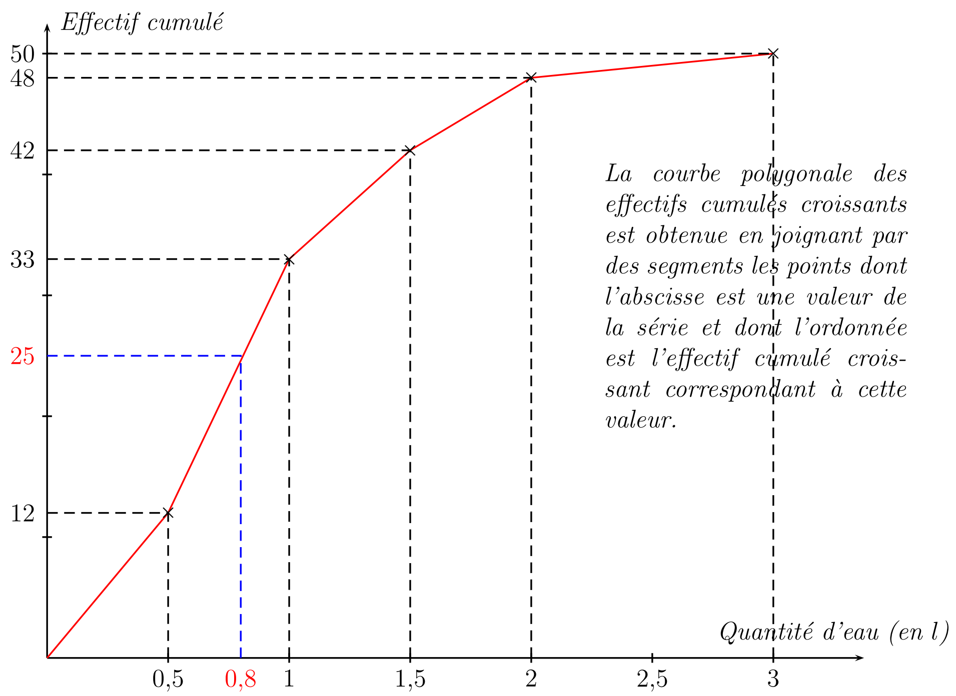
$$m = \frac{10920}{75}$$

$$m = 145,6\,mm$$

donc la médiane et la moyenne sont (en général) **différentes**.

  - **A partir d'une représentation graphique**

Une valeur approchée de la médiane peut être obtenue à l'aide de la courbe polygonale des effectifs cumulés croissants (ou des fréquences cumulées croissantes) en lisant la valeur correspondant à la moitié de l'effectif total (ou à une fréquence cumulée égale à 50%). A la question "Quelle quantité d'eau buvez-vous par jour ?", les 50 personnes interrogées ont donné des réponses qui ont permis de tracer le polygone des effectifs cumulés croissants suivant :




$\mathcal{M}$ est environ égal à $0,8\,l$ : en effet, la moitié des personnes interrogées consomme moins de $0,8\,l$ par jour (ou la moitié des personnes interrogées consomme plus de $0,8\,l$ par jour).

### 12.2.2 Une caractéristique de dispersion : l'étendue

**L'étendue** d'une série statistique est égale à la différence entre la plus grande et la plus petite valeur prises par cette série. Elle mesure la « dispersion » de cette série.

**Les critères de dispersion** indiquent de quelle façon les valeurs du caractère sont groupées (plus ou moins resserrées) autour des valeurs « centrales » : l'étendue est le plus simple de ces paramètres. En général, lorsque l'étendue est élevée, la dispersion est grande.
**Exemple :** pour la série avec les platanes, l'étendue est de $182 - 102 = 80$ mm.

## 12.3. Exercices

**Exercice 1** – gestion/exo1

Au CDI du collège, la documentaliste a récapitulé dans le tableau ci-dessous, le nombre de livres empruntés par niveau durant l'année scolaire.

| Classes | $6^e$ | $5^e$ | $4^e$ | $3^e$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'élèves | 120 | 110 | 92 | 96 | |
| Nombre de livres empruntés | 2540 | 1875 | 1835 | | 7500 |

1. Complète le tableau. On indiquera les calculs.
2. Calcule la fréquence en pourcentage de chaque niveau.
3. Quel est le nombre de livre moyen empruntés par chaque niveau ?

**Exercice 2** – gestion/exo2

On considère le tableau de répartition des tailles pour un échantillon de 1000 hommes et de 1000 femmes adultes (source INSEE).

| **Taille en cm** | **Hommes** | **Femmes** |
|---|---|---|
| $140 \leqslant t < 150$ | 10 | 38 |
| $150 \leqslant t < 160$ | 36 | 360 |
| $160 \leqslant t < 170$ | 383 | 531 |
| $170 \leqslant t < 195$ | 571 | 71 |

Dans cet échantillon,

1. Quel est le nombre total d'adultes de taille strictement inférieure à $170\,cm$ ?
2. Quel est le nombre de femmes dont la taille est supérieure ou égale à $160\,cm$ ?
3. Calculer la taille moyenne chez les hommes et chez les femmes.

**Exercice 3** – gestion/exo3

Pour une période de 5 mois (150 jours), une facture d'eau se calcule de la manière suivante : 70 francs d'abonnement et 11 francs par $m^3$ d'eau consommée.

1. Pendant cette période de 5 mois, la famille Laurent a consommé $74\,m^3$ d'eau. Etablis le montant de sa facture.
2. (a) La famille Cherrier a payé 1 126 francs pour cette période. Quelle quantité d'eau a-t-elle consommée ? (en $m^3$)
   (b) Pour la période suivante, la famille Cherrier décide de réduire sa consommation d'eau de 10%.
   En supposant que les tarifs restent les mêmes, quel sera la pourcentage de réduction sur la nouvelle facture ? Arrondis au dixième le plus proche.

**Exercice 4** – gestion/exo4

Soit $P$ le poids d'une personne en $kg$ et $T$ sa taille en mètres.

Le nombre $I = \dfrac{P}{T^2}$ est appelé *indice de corpulence*.

Si l'indice de corpulence d'une personne est compris entre 25 et 30, cette personne est considérée comme étant en surcharge de poids. Si le nombre $I$ est supérieur à 30, elle est considérée comme obèse.

1. Tom pèse $75\,kg$ et mesure $1,75\,m$. Calcule son indice de corpulence.
2. Jim est en surcharge de poids et mesure $1,60\,m$. Donne un encadrement de son poids.
3. Aux Etats-Unis, l'obésité est un problème de santé publique important. Un étude révèle que, sur un échantillon de 2 625 personnes, 630 sont obèses.
   Quel est le pourcentage de personnes obèses dans cet échantillon ?

4. Sam se rend à un examen médical. La fiche de résultats indique :

$$66\,kg \text{ soit } 110\% \text{ du poids idéal.}$$

De combien de kilos doit-il maigrir s'il veut retrouver son poids idéal ?

**Exercice 5** – gestion/exo5

Pour être vendues, les pommes doivent être calibrées : elles sont réparties en caisses suivant la valeur de leur diamètre.
Dans un lot de pommes, un producteur a évalué le nombre de pommes pour chacun des six calibres rencontrés dans le lot. Il a obtenu le tableau suivant :

| **Calibre (en $mm$)** | $[55;60[$ | $[60;65[$ | $[65,70[$ | $[70,75[$ | $[75,80[$ | $[80,85[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif (nombre de pommes)** | 13 | 20 | 30 | 23 | 26 | 18 |

1. Construis l'histogramme relatif à cet échantillon de pommes.
2. Combien de pommes ont un diamètre de moins de $70\,mm$ ?
3. Combien de pommes ont un diamètre d'au moins $75\,mm$ ?
4. Calculer, par rapport à l'effectif total, le pourcentage de pommes dont le diamètre $d$ est tel que $70 \leq d < 80$. On donnera le résultat à $10^{-1}$ près par excès.
5. Quel est le calibre moyen des pommes de ce producteur ?

**Exercice 6** – gestion/exo6

Lors d'une rentrée scolaire, les 352 000 élèves de première d'enseignement général se répartissaient de la façon suivante : 76 000 en section littéraire (L), 86 000 en série économique et sociale (ES) et 190 000 en section scientifique.
Reproduis et complète le tableau ci-dessous puis représente cette répartition sous forme d'un diagramme semi-circulaire de rayon $4\,cm$ (il sera acoompagné d'une légende).

| Sections | L | ES | S | Total |
|---|---|---|---|---|
| Nombres d'élèves | 76 000 | 86 000 | 190 000 | |
| Pourcentages | | | | 100% |
| Angles | | | | 180° |

**Exercice 7** – gestion/exo7

| Montant $m$ en € | Effectif élèves |
|---|---|
| $0 \leqslant m < 7$ | 5 |
| $7 \leqslant m < 14$ | 25 |
| $14 \leqslant m < 21$ | 20 |
| $21 \leqslant m < 28$ | 15 |
| $28 \leqslant m < 35$ | 30 |
| $35 \leqslant m < 42$ | 80 |
| $42 \leqslant m < 49$ | 15 |
| $49 \leqslant m < 56$ | 10 |
| $56 \leqslant m < 63$ | 40 |

Dans un collège, une enquête est effectuée auprès des 250 élèves des classes de troisième. Elle a pour but d'analyser le montant trimestriel des dépenses consacrées à l'achat de place de cinéma.
Un extrait des résultats obtenus est consigné dans le tableau ci-contre, où $m$ représente le montant trimestriel en € réservé à cette activité.

1. Combien y-a-t-il d'élèves qui dépensent moins de 63€ pour aller au cinéma ? Que remarque-t-on ?
2. Calcule le pourcentage d''élèves consacrant moins de 42€ par trimestre pour ce loisir.
3. Calcule le montant moyen dépensé par chaque élève pour aller au cinéma.

**Exercice 8** – gestion/exo8

Dans 2 classes de 24 élèves chacune, on demande aux collégiens combien de temps ils passent dans l'autobus pour se rendre au collège (tous prennent l'autobus).

1. Sachant que tous les élèves ont répondu, reproduis et complète le tableau ci-dessous présentant les résultats de cette enquête :

| **temps $t$ en min** | $0 \leqslant t < 15$ | $15 \leqslant t < 30$ | $30 \leqslant t < 45$ | $t \geqslant 45$ |
|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 6 | 24 | | 3 |

2. Quel est l'effectif d'élèves qui passent au moins 30 minutes dans l'autobus pour se rendre au collège ?
3. Déduis-en le pourcentage d'élèves passant au moins une demi-heure dans l'autobus pour se rendre au collège.
4. Calcule le temps moyen que les élèves passent dans l'autobus pour se rendre au collège. On prendra $t = 60$ minutes pour la dernière catégorie.

**Exercice 9** – gestion/exo9

Voici la répartition de 300 appelés du contingent suivant leur taille $t$ en mètre et leur poids $P$ en $kg$.

| $t$ \ $P$ | 62,5 | 65 | 67,5 | 70 | 72,5 | 75 | 77,5 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,70 | 14 | 19 | 8 | 1 | | | | |
| 1,75 | 2 | 20 | 30 | 17 | 4 | 1 | | |
| 1,80 | | 7 | 28 | 36 | 16 | 5 | 1 | |
| 1,85 | | 1 | 6 | 19 | 22 | 10 | 4 | 2 |
| 1,90 | | | | 4 | 5 | 8 | 7 | 3 |

1. (a) Fais un tableau $A$ indiquant les différentes tailles et leur effectif.
   (b) Fais un tableau $B$ indiquant les différents poids et leur effectif.
2. (a) Complète le tableau $A$ en indiquant les effectifs cumulés croissants.
   (b) Complète le tableau $B$ en indiquant les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.
3. (a) Calcule le poids moyen des 300 appelés.
   (b) Calcule la taille moyenne des 300 appelés.

**Exercice 10** – gestion/exo10

Il a été procédé à un relevé de tailles d'un échantillon de 184 enfants. Ces tailles sont regroupées en classes et exprimées en centimètres.

| Taille | $[145; 150[$ | $[150; 155[$ | $[155, 160[$ | $[160, 165[$ | $[165; 170[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 3 | 43 | 46 | 74 | 18 |

**1/** Calcule la fréquence en pourcentage de chaque catégorie de taille.
**2/** Construis un diagramme semi-circulaire représentant la situation.
**3/** Représente la situation par un histogramme.
**4/** Calcule une valeur approchée de la moyenne de cette échantillon.

**Exercice 11** – gestion/exo11

| $d$ : durée de vie en heures | Nombre d'ampoules |
|---|---|
| $1\,000 \leqslant d < 1\,200$ | 450 |
| $1\,200 \leqslant d < 1\,400$ | 550 |
| $1\,400 \leqslant d < 1\,600$ | 650 |
| $1\,600 \leqslant d < 1\,800$ | 500 |
| $1\,800 \leqslant d < 2\,000$ | 400 |

Une usine teste la durée de vie en heures d'ampoules électriques. Les résultats de ce test sont indiqués dans le tableau ci-contre.

1. Quel est le pourcentage d'ampoules qui ont une durée de vie de moins de $1\,400\,h$ ?
2. Calcule la durée de vie moyenne d'une ampoule.

**Exercice 12** – gestion/exo12

Sur un tronçon de route limité à 90 km.h$^{-1}$, les gendarmes ont relevé les vitesses suivantes :

85 – 96 – 87 – 90 – 86 – 103 – 102 – 84 – 101 – 91 – 76 – 92 – 100 – 99 – 81 – 89 – 95 – 97 – 89 – 92 – 105 – 88 – 90 – 103 – 78 – 81 – 95 – 100 – 89 – 94 – 100 – 92.

1. Etablis et complète le tableau ci-dessous :

| classe de vitesses | 76-80 | 81-85 | |
|---|---|---|---|
| effectif | | | |

2. (a) Complète le tableau précédent par les effectifs cumulés croissants.
   (b) Est-il vrai que moins de 50% des automobilistes contrôlés respectaient la limitation de vitesse ?
3. Calculer la vitesse moyenne :
   (a) à partir des données initiales ;
   (b) à partir du tableau construit à la question 1.

# Quatrième partie

# Annexes

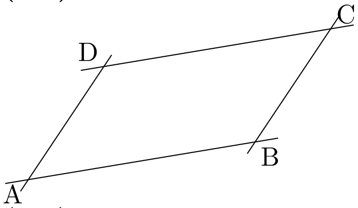
Annexe A

# Compléments

## A.1. Les quadrilatères particuliers

### A.1.1 Démontrer un parallélogramme ?

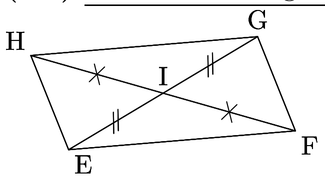
◇ **(P1)** Utiliser la définition




*Un parallélogramme est un . . . . . . . . . . . .qui a ses côtés opposés . . . . . . . . .deux à deux.*

On sait que $(AB)$ est . . . . . . . . .à $(CD)$ et $(AD)$ est . . . . . . . . .à $(BC)$
donc $ABCD$ est un . . . . . . . . . . . .

◇ **(P2)** Utiliser les diagonales

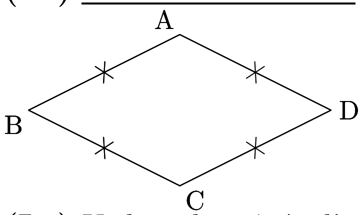



*Si les . . . . . . . . . . . .d'un quadrilatère ont le même . . . . . .alors c'est un . . . .*

On sait que $I$ est le . . . . . .de $[EG]$ et de . . . . . .
donc $EFGH$ est un . . . . . . . . . . . .

### A.1.2 Démontrer un losange ?

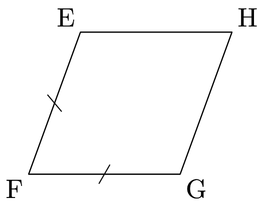
◇ **(L1)** Utiliser la définition




*Un losange est un . . . . . . . . . . . .dont les . . . . . . . . .ont même . . . . . . . . .*

On sait que . . . $\cdots =$ . . . $\cdots =$ . . . $\cdots =$ . . . . . .
donc $ABCD$ est un . . . . . . . . .

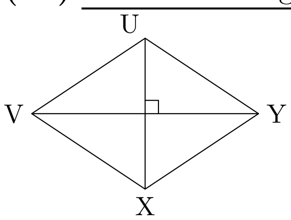
◇ **(L2)** Utiliser les côtés d'un parallélogramme




*Si un . . . . . . . . . . . . . . .a deux côtés . . . . . . . . . . . .de même . . . . . . . . ., alors c'est un . . . . . . . . .*

On sait que $EFGH$ est un . . . . . . . . . . . . . . .
et que $\cdots =$ . . .
donc $EFGH$ est un . . . . . . . . .

◇ **(L3)** Utiliser les diagonales d'un parallélogramme

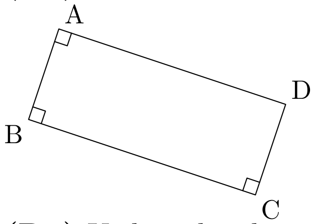



*Si un . . . . . . . . . . . . . . .a ses diagonales . . . . . . . . . . . . . . . alors c'est un . . . . . . . . .*

On sait que $UVXY$ est un . . . . . . . . . . . . . . .
et que $(UX)$ est . . . . . . . . . . . . . . .à . . .
donc $UVXY$ est un . . . . . . . . .

### A.1.3 Démontrer un rectangle ?

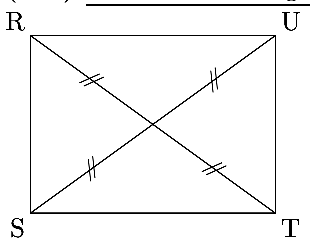
◇ **(R1)** Utiliser la définition




*Si un . . . . . . . . . . . . . . a . . . angles . . . . . . alors c'est un . . . . . . . . .*

On sait que $\widehat{DAB} = \ldots\cdots = \ldots\cdots = \ldots$
donc $ABCD$ est un . . . . . . . . .

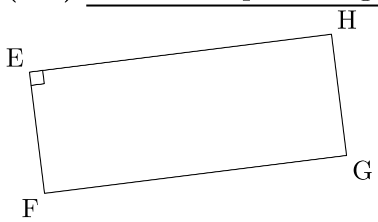
◇ **(R2)** Utiliser les diagonales d'un parallélogramme




*Si un . . . . . . . . . . . . . . a ses diagonales de même . . . . . . . . . alors c'est un . . . . . . . . .*

On sait que $RSTU$ est un . . . . . . . . . . . . . .
et que $RT = \ldots$
donc $RSTU$ est un . . . . . . . . .

◇ **(R3)** Utiliser un parallélogramme et un angle droit




*Si un . . . . . . . . . . . . . . a un . . . . . . droit alors c'est un . . . . . . . . .*

On sait que $EFGH$ est un . . . . . . . . . . . . . .
et que $\widehat{HEF} = \ldots$
donc $EFGH$ est un . . . . . . . . .

### A.1.4 Démontrer un carré ?

◇ Utiliser le fait qu'un carré est à la fois un . . . . . . . . . et un . . . . . . . . .

– **(C1)** Utiliser un rectangle et deux côtés

*Si un rectangle a deux . . . . . . . . . consécutifs de . . . . . . longueur alors c'est un carré*

– **(C2)** Utiliser les diagonales d'un rectangle

*Si un rectangle a ses diagonales . . . . . . . . . . . . . .*
*alors c'est un carré*

– **(C3)** Utiliser les diagonales d'un losange

*Si un losange a ses . . . . . . . . . de même . . . . . . . . .*
*alors c'est un carré*

– **(C4)** Utiliser un losange et un angle

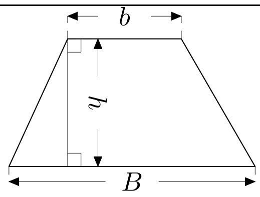
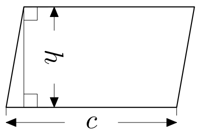
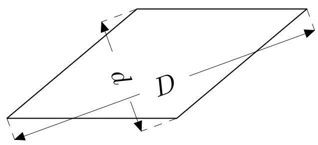
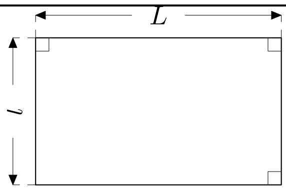
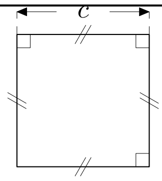
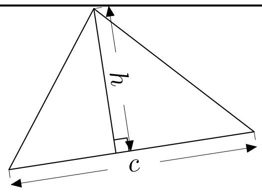
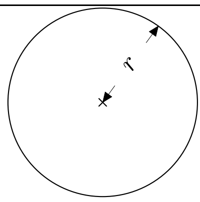
*Si un losange a un . . . . . . . . . . . . . . . . . alors c'est un carré*

# A.2. Périmètre et aire d'une surface

**Aire d'une surface** On note $\mathcal{A}$ l'aire d'une surface. On la mesure avec les unités obtenues à partir du mètre carré ($m^2$). Pour les conversions, il y a deux rangs par unité.

| $km^2$ | $hm^2$ | $dam^2$ | $m^2$ | $dm^2$ | $cm^2$ | $mm^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 31 | 00 | 00 | |
| | 0 | 08 | 50 | | | |

Exemples :
$31\,m^2 = 0,31\,dam^2 = 310\,000\,cm^2$ et $8,5\,dam^2 = 0,085\,hm^2 = 850\,m^2$.

| **Nom de la figure** | **Représentation** | **Périmètre et aire** |
|---|---|---|
| *Trapèze* de petite base $b$, de grande base $B$ et de hauteur $h$ |   | $\mathcal{P}$ = somme des côtés<br>$\mathcal{A} = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$ |
| *Parallélogramme* de côté $c$ et de hauteur relative à ce côté $h$ |   | $\mathcal{P}$ = somme des côtés<br>$\mathcal{A} = c \times h$ |
| *Losange* de côté $c$, de grande diagonale $D$ et de petite diagonale $d$ |   | $\mathcal{P} = 4c$<br>$\mathcal{A} = \dfrac{d \times D}{2}$ |
| *Rectangle* de longueur $L$ et de largeur $l$ |   | $\mathcal{P} = 2(l+L)$<br>$\mathcal{A} = L \times l$ |
| *Carré* de côté $c$ |   | $\mathcal{P} = 4c$<br>$\mathcal{A} = c^2$ |
| *Triangle* de côté $c$ et de hauteur relative à ce côté $h$ |   | $\mathcal{P}$ = somme des côtés<br>$\mathcal{A} = \dfrac{c \times h}{2}$ |
| *Cercle et disque* de rayon $r$ |   | $\mathcal{P} = 2\pi r$<br>$\mathcal{A} = \pi r^2$ |

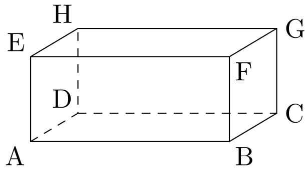
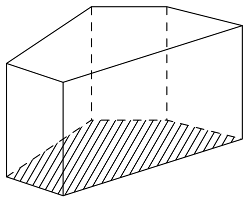
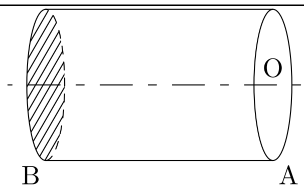
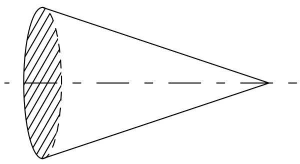
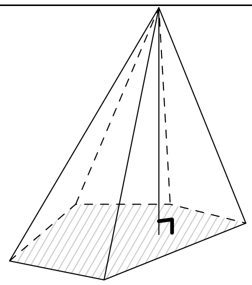
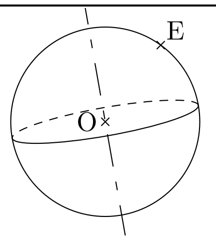
## A.3. Volume d'un solide

On note $\mathcal{V}$ le volume d'un solide. On le mesure avec les unités obtenues à partir du mètre cube ($m^3$). Pour les conversions, il y a trois rangs par unité.

| $km^3$ | $hm^3$ | $dam^3$ | $m^3$ | $dm^3$ | $cm^3$ | $mm^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 031 | 000 | | |
| | 0 | 008 | 500 | | | |

Exemples :
$31\,m^3 = 0,031\,dam^3 = 310\,000\,dm^3$ et $8,5\,dam^3 = 0,0085\,hm^3 = 8\,500\,m^3$.
**Remarque** : Il ne faut pas oublier que

$$1\,dm^3 = 1\,l$$

| Nom du solide | Représentation | Volume |
|---|---|---|
| **Parallélépipède rectangle** – Solide dont toutes les faces sont des rectangles. Le **cube** en est un cas particulier. |  | $\mathcal{V} = AB \times AD \times AE$ |
| **Prisme** – Solide composé de deux *bases* polygonales parallèles et dont toutes *les faces latérales* sont des rectangles. $\mathcal{A}$ est l'aire d'une base et $h$ la hauteur du prisme. |  | $\mathcal{V} = \mathcal{A} \times h$ |
| **Cylindre** – Solide engendré (c'est-à-dire créé) par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses axes de symétrie ou d'un des ses côtés. |  | $\mathcal{V} = \pi \times OA^2 \times AB$ |
| **Cône** – Solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et $h$ la hauteur du cône. |  | $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ |
| **Pyramide** – Solide composé d'une *base* polygonale et dont toutes les *faces latérales* sont des triangles qui ont un sommet commun $S$. $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et $h$ la hauteur de la pyramide. |  | $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h$ |
| **Sphère** – La sphère de centre $O$ et de rayon $r$ est composée de tous les points de l'espace situés à la même distance $r$ du point $O$. |  | $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times OE^3$ |