Démonstration du

Théorème de Pythagore

Christophe Poulain
chrpoulain@nordnet.fr

16 mars 2002

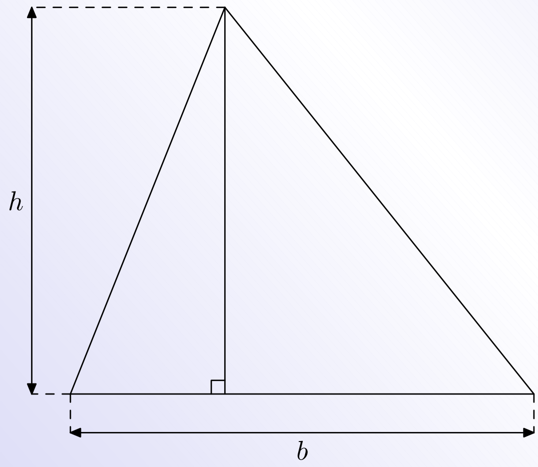
Il est possible de démontrer le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle d'une manière abordable en 4^{e}. Il suffit de savoir calculer l'aire d'un triangle, d'avoir des acquis sur les angles et le développement d'expressions littérales.

Page d'accueil
Page de Titre
Sommaire
Page 1 de 16
Retour
Plein Ecran
Fermer
Quitter

Table des matières

1. Notions nécessaires

1.1. Aire d'un triangle



Rappellons quelques éléments nécessaires pour calculer l'aire d'un triangle.
Il faut disposer de :

- la mesure, notée b, de l'un des 3 côtés du triangle que nous appellerons base ;
- la mesure, notée h, de la hauteur relative à cette base.

La formule de calcul est la suivante

$$\frac{b \times h}{2}$$

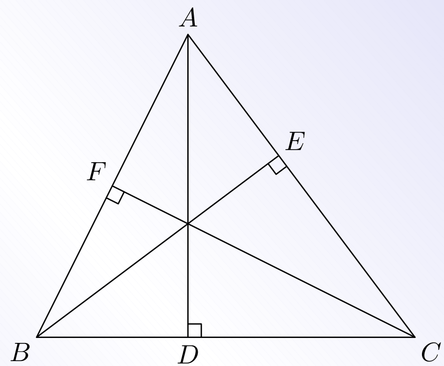
Remarquons qu'il y a donc trois façons possibles de calculer l'aire d'un triangle.

Cas particulier : Le cas du triangle rectangle est plus simple. Même si cette formule reste valable, il faut également se souvenir qu'un triangle rectangle représente un demi-rectangle.

Page d'accueil
Page de Titre
Sommaire
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 3 de 16
Retour
Plein Ecran
Fermer
Quitter

Début (Pour remettre à 0 les scores, cliquez sur début)

Voici un questionnaire pour lequel la figure de référence est la suivante :



1. Quelle est l'expression de l'aire du triangle ABC ?

☐ $\dfrac{BC \times BE}{2}$ ☐ $\dfrac{BC \times AD}{3}$ ☐ $\dfrac{AB \times CF}{2}$ ☐ $BE \times AC$

2. Quelle est l'expression de l'aire du triangle CFA ?

☐ $\dfrac{CF \times AB}{2}$ ☐ $\dfrac{AF \times AD}{2}$ ☐ $AF \times CA$ ☐ $\dfrac{CF \times AF}{2}$

3. Si $BE = 10\,cm$ et $AE = 5\,cm$, quelle est l'aire du triangle BEA ?

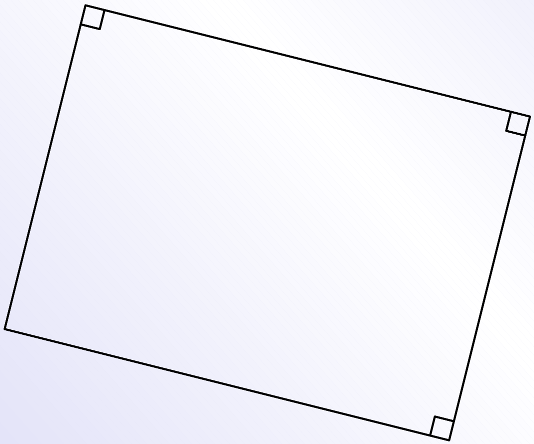
☐ $25\,cm^2$ ☐ $18\,cm^2$ ☐ $20\,cm^2$ ☐ $84\,cm^2$

Fin

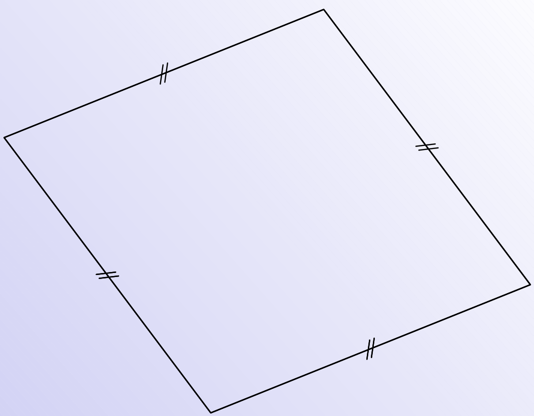
Score : Réponses (Pour voir le score cliquez sur fin)

1.2. Le carré

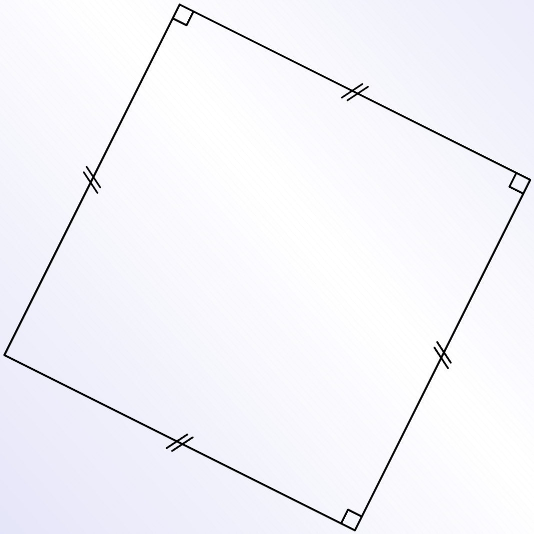
Rappellons quelques définitions et propriétés des quadrilatères particuliers.



Définition 1 *Si quadrilatère possède 3 angles droits alors ce quadrilatère est un rectangle.*



Définition 2 *Si un quadrilatère possède 4 côtés de même longueur alors ce quadrilatère est un losange.*



Définition 3 *Si un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange alors ce quadrilatère est un carré.*

Rappellons également que l'aire d'un carré de côté c est donnée par la formule

$$\mathcal{A} = c^2$$

1.3. Développement

On a la propriété suivante :

Proposition 1 *Si a, b, c, d sont 4 nombres quelconques alors*

$$(a+b)\times(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

Donnons quelques exemples d'applications

$$(2x+4)\times(x+3) = 2x\times x + 2x\times 3 + 4\times x + 4\times 12$$
$$(2x+4)\times(x+3) = 2x^2 + 6x + 8x + 12$$
$$(2x+4)\times(x+3) = 2x^2 + 14x + 12$$

$$(4x-1)\times(x+2) = 4x\times x + 4x\times 2 + (-1)\times x + (-1)\times 2$$
$$(4x-1)\times(x+2) = 4x^2 + 8x + (-x) + (-2)$$
$$(4x-1)\times(x+2) = 4x^2 + 7x - 2$$

$$(3x-1)^2 = (3x-1)\times(3x-1)$$
$$(3x-1)^2 = 3x\times 3x + 3x\times(-1) + (-1)\times 3x + (-1)\times(-1)$$
$$(3x-1)^2 = 9x^2 - 3x - 3x + 1$$
$$(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$$

Début (Pour remettre à 0 les scores, cliquez sur début)

1. Quel est le développement de l'expression $A = (x+2) \times (x+1)$?

☐ $A = 2x + 3$ ☐ $A = x^2 + 2$ ☐ $A = x^2 + 2x + 2$ ☐ $A = x^2 + 3x + 2$

2. Quel est le développement de l'expression $B = (2x-1) \times (3x-2)$?

☐ $B = 6x^2 - 7x + 2$ ☐ $6x^2 + 2$ ☐ $5x^2 - 7x + 2$ ☐ $5x - 3$

3. Quel est le développement de l'expression $C = (x+3)^2$?

☐ $x^3 + 9$ ☐ $x^2 + 6x + 9$ ☐ $2x + 6$ ☐ $x^2 + 9$

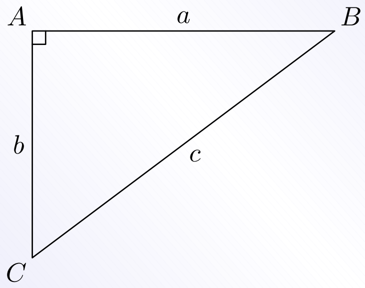
4. Quel est le développement de l'expression $D = (a+b)^2$?

☐ $D = a^2 + b^2$ ☐ $D = a^2 + a \times b + b^2$ ☐ $D = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$ ☐ $D = 2a + 2b$

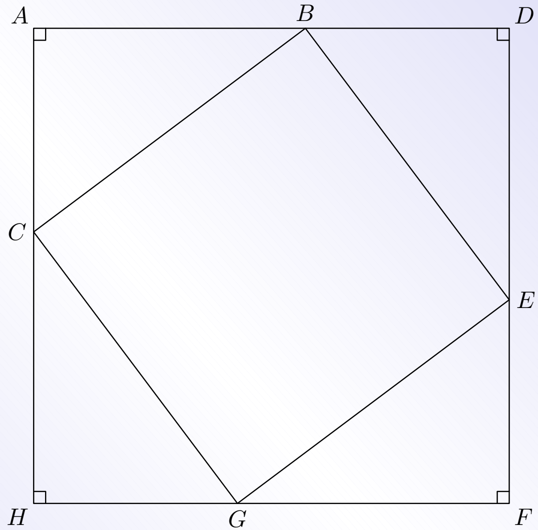
Fin

Score : Réponses (Pour voir le score cliquez sur fin)

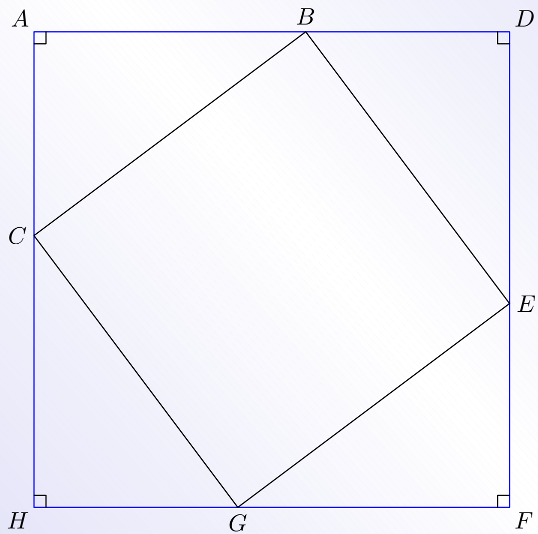
2. Démonstration



Considérons, comme figure de départ, le triangle ABC, rectangle en A, ci-contre et posons $AB = a$, $AC = b$ et $BC = c$.



On construit alors la figure ci-contre, composée de 4 triangles ABC, BDE, EFG et GHC, identiques tels que les points A, B, D soient alignés tout comme les points D, E, F puis les points F, G, H et enfin les points H, C, A.

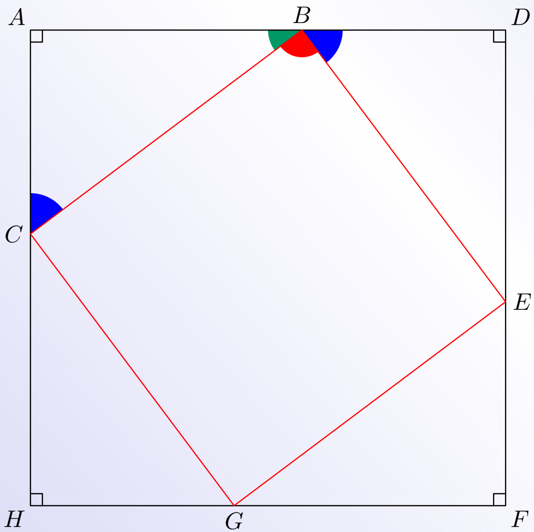


Le quadrilatère $ADFH$ possède 3 angles droits donc le quadrilatère $ADFH$ est un rectangle.
Les côtés du quadrilatère $ADFH$ ont la même longueur $a+b$ donc le quadrilatère $ADFH$ est un losange.
Comme le quadrilatère $ADFH$ est à la fois un rectangle et un losange alors le quadrilatère $ADFH$ est un carré.

Son aire est, par conséquent :

$$\mathcal{A}_{ADFH} = AD^2$$
$$\mathcal{A}_{ADFH} = (a+b)^2$$
$$\mathcal{A}_{ADFH} = (a+b)\times(a+b)$$
$$\mathcal{A}_{ADFH} = a\times a + a\times b + b\times a + b\times b$$
$$\mathcal{A}_{ADFH} = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$\mathcal{A}_{ADFH} = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$\mathcal{A}_{ADFH} = a^2 + 2\times ab + b^2$$

Or, le carré $ADFH$ est composé de 5 pièces : 4 triangles rectangles identiques et d'un quadrilatère $BEGC$. Quelle est la nature de ce quadrilatère ?



Comme les triangles ABC et BDE sont identiques alors les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EBD}$ sont égaux.
Donc

$$\widehat{ABC} + \widehat{CBE} + \widehat{EBD} = 180$$

$$\widehat{ABC} + \widehat{CBE} + \widehat{ACB} = 180$$

$$\widehat{CBE} + \underbrace{\widehat{ACB} + \widehat{ABC}}_{= 90 \text{ car } ABC \text{ est rectangle en } A} = 180$$

$$\widehat{CBE} + 90 = 180$$

$$\widehat{CBE} = 180 - 90$$

$$\widehat{CBE} = 90^\circ$$

De même, on démontre que

$$\widehat{BEG} = \widehat{EGC} = 90^\circ$$

Le quadrilatère $BEGC$ possède donc 3 angles droits : c'est un rectangle.

De plus, $BE = EG = GC = CB = c$.

Le quadrilatère $BEGC$ possède 4 côtés de même longueur : c'est un losange.

Par conséquent, le quadrilatère $BEGC$ est à la fois un rectangle et un losange : le quadrilatère $BEGC$ est un carré.

Son aire est :

$$\mathcal{A}_{BEGC} = BE^2$$
$$\mathcal{A}_{BEGC} = c^2$$

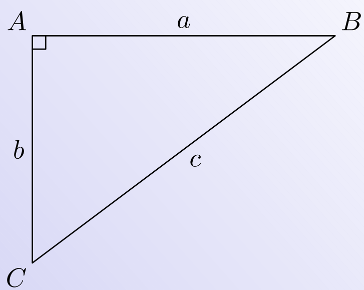
On peut recalculer l'aire du carré $ADFH$:

$$\mathcal{A}_{ADFH} = 4 \times \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{BEGC}$$
$$\mathcal{A}_{ADFH} = 4 \times \frac{AB \times AC}{2} + c^2$$
$$\mathcal{A}_{ADFH} = 2 \times a \times b + c^2$$

Et on avait obtenu

$$\mathcal{A}_{ADFH} = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

On a alors deux expressions différentes pour l'aire $\mathcal{A}_{ADFH}$: ces deux expressions sont égales.



$$a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = 2 \times a \times b + c^2$$
$$\underbrace{2 \times a \times b}_{} + a^2 + b^2 = \underbrace{2 \times a \times b}_{} + c^2$$

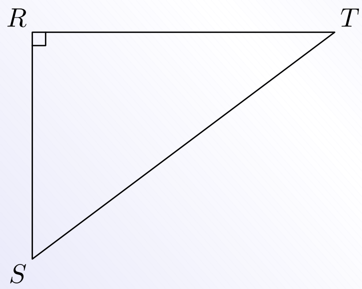
$$a^2 + b^2 = c^2$$

C'est le Théorème de Pythagore.

Page d'accueil
Page de Titre
Sommaire
Page 12 de 16
Retour
Plein Ecran
Fermer
Quitter

3. Enoncé du théorème et applications

Théorème 1 (Théorème de Pythagore) *Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit.*



Si RST est un triangle rectangle en R, le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$ST^2 = SR^2 + RT^2$$

3.1. Applications

Le théorème de Pythagore permet deux applications :

– Le calcul de la longueur d'un côté du triangle rectangle connaissant les deux autres :

– La démonstration qu'un triangle n'est pas rectangle.

Page d'accueil
Page de Titre
Sommaire
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Page 13 de 16
Retour
Plein Ecran
Fermer
Quitter

3.1.1. Calcul de longueurs

Considérons un triangle EDF rectangle en F tel que $EF = 4\,cm$ et $FD = 3\,cm$.

Dans le triangle EDF, rectangle en F, le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\begin{aligned}
ED^2 &= EF^2 + DF^2\\
ED^2 &= 4^2 + 3^2\\
ED^2 &= 16 + 9\\
ED^2 &= 25\\
ED &= 5 \text{ car } 5 \times 5 = 25
\end{aligned}$$

La longueur ED mesure $5\,cm$.

Considérons un triangle RST rectangle en R tel que $ST = 13\,cm$ et $RT = 10\,cm$.

Dans le triangle RST, rectangle en R, le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\begin{aligned}
ST^2 &= SR^2 + RT^2\\
13^2 &= SR^2 + 10^2\\
169 &= SR^2 + 100\\
SR^2 &= 169 - 10\\
SR^2 &= 69\\
SR &= \sqrt{69}\\
SR &\simeq 8,3\,cm
\end{aligned}$$

La longueur SR mesure environ $8,3\,cm$.

Début (Pour remettre à 0 les scores, cliquez sur début)

1. Dans le triangle ABC, rectangle en B, le théorème de Pythagore permet d'écrire

☐ $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ☐ $BC^2 = AC^2 + AB^2$ ☐ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

2. Si $OM = 9$ alors

☐ $OM^2 = 81$ ☐ $OM^2 = 3$ ☐ $OM^2 = 18$

3. Si $KL^2 = 64$ alors

☐ $KL = 32$ ☐ $KL = 8$ ☐ $KL = 9$

4. Si le triangle RST est rectangle en R tel que $RS = 12\,cm$ et $RT = 5\,cm$ alors

☐ $ST = \sqrt{119}\,cm$ ☐ $ST = 17\,cm$ ☐ $RS = 13\,cm$

5. Si le triangle EDF est rectangle en D tel que $ED = 5\,cm$ et $EF = 12\,cm$ alors

☐ $DF = 13\,cm$ ☐ $DF = \sqrt{119}\,cm$ ☐ $DF = 17\,cm$

Fin

Score : Réponses (Pour voir le score cliquez sur fin)

3.1.2. Démonter qu’un triangle n’est pas rectangle

Considérons un triangle ABC tel que $AB = 3\,cm$, $AC = 4\,cm$ et $BC = 6\,cm$.

On a

$$BC^2 = 6^2$$
$$BC^2 = 36$$

$$AC^2 + AB^2 = 4^2 + 3^2$$
$$AC^2 + AB^2 = 16 + 9$$
$$AC^2 + AB^2 = 25$$

Donc

$$BC^2 \neq AC^2 + AB^2$$

Si le triangle ABC **était** rectangle, il le **serait** forcément en A car le côté $[BC]$ est le plus grand et le théorème de Pythagore **permettrait** d’écrire

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

Ce qui est impossible car $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$. Donc le triangle ABC n’est pas rectangle.