Augustin FRESNEL

Manuel LUQUE [*]

14 août 2 004

Table des matières

[*]Je remercie le groupe Mélusine : http://melusine.eu.org/syracuse/, et en particulier Jean-Paul VIGNAULT pour l'aide qu'ils m'ont apportée à la mise au point du code PostScript permettant la simulation numérique de ces phénomènes.

1 La vie d'Augustin Fresnel

La vie d'Augustin Fresnel et son œuvre scientifique sont parfaitement connues grâce à ses contemporains : François Arago, son ami et collaborateur, qui rédigea son éloge devant l'Académie de Sciences le 26 juillet 1830, dont le texte a été repris dans le troisième tome des œuvres complètes [8], son frère Léonor Fresnel qui participa à la publication des travaux d'Augustin, Émile Verdet qui fut l'un des maîtres d'œuvre de cette publication et qui en écrivit l'introduction. Signalons que lors du centenaire de la mort d'Augustin Fresnel, Charles Fabry[1] donna dans une remarquable conférence, une biographie de Fresnel dans laquelle, avec le recul du temps, il essaie de porter un « jugement sur Fresnel et son œuvre »[2].

[1] C'est le texte de cette conférence que R.Massain donne dans *Physique et Physiciens*, publié par Magnard (1966), dans la lecture xxxviii, dédiée à « Fresnel et l'optique ».

[2] « Un siècle s'est écoulé depuis la mort de Fresnel ; le recul est assez grand pour qu'on puisse se demander ce que le temps a fait de son øeuvre. Peut-on dire que cette œuvre est restée immuable, que nous envisageons la théorie de la lumière sous l'aspect même où il l'avait laissée ? Assurément non. Et d'ailleurs, serait-ce faire un grand éloge d'une oeuvre scientifique que de dire qu'il a été impossible d'y rien ajouter ? La science n'est jamais finie, et dire d'une découverte qu'il a été impossible d'y rien ajouter, ne serait-ce pas dire qu'elle a conduit à une impasse ? Tel n'a pas été le cas de l'œuvre de Fresnel. Les lois qu'il a découvertes, les grandes notions introduites par lui sont restées à la base de la science ; mais les idées ont continué à évoluer. Nous ne croyons plus à l'existence

La naissance d'Augustin-Jean FRESNEL le 10 mai 1788 à Broglie (Eure) est due au fait que son père, architecte, avait été engagé dès 1784 afin de diriger les travaux de rénovation du château de Broglie : il y rencontra Augustine MÉRIMÉE[3] qu'il épousa l'année suivante. Ils eurent quatre fils : Louis, Augustin, Léonor et Fulgence. Leonor suivra particulièrement les travaux d'Augustin et lui succédera à la commission des phares et balises en 1827.

Augustin FRESNEL entra à l'École Polytechnique, puis à sa sortie à celle des Ponts et Chaussées. Titulaire du diplôme d'ingénieur, il fut envoyé construire des routes en Vendée, puis en 1812 dans la Drôme à Nyons. Le retour de Napoléon de l'île d'Elbe, lui parut « une attaque contre la civilisation[4] » et malgré une santé fragile, il s'en fut rejoindre l'armée royale du midi. « FRESNEL rentra à Nyons, sa résidence habituelle presque mourant.[...]Peu de jours après, un commissaire impérial vint prononcer sa destitution et le placer sous la surveillance de la haute police.[...] Fresnel obtint la permission de passer par Paris ; il y séjourna sans jamais être inquiété.[5] ».

« Ce court séjour à Paris fut pour Fresnel le véritable début de sa carrière scientifique ; il put lire quelques mémoires et se mettre en relations avec quelques-uns des hommes du milieu scientifique de Paris, en particulier avec Arago, qui devint son protecteur, son collaborateur et son ami.

« Arago devina tout de suite le génie de Fresnel, l'aida à se documenter, parfois collabora directement avec lui, le défendit, dans toutes les occasions, enfin s'employa de son mieux pour que son métier d'ingénieur, son gagne-pain, loin d'entraver sa carrière scientifique, pût se combiner avec elle[6]. »

C'est à partir de 1815 que FRESNEL commence ses premières recherches expérimentales sur la lumière : elles porteront sur la diffraction de la lumière, dont le mémoire fut couronné par l'Académie de Sciences en 1819, sur les interférences lumineuses, sur la polarisation de la lumière et la nature des vibrations lumineuses. La dernière partie de sa brève vie fut consacrée à l'amélioration des phares, par la mise au point, en particulier, des lentilles à échelons. Ce sont tous ces travaux qui seront développés dans les paragraphes suivants.

---

réelle d'un éther élastique, construit à l'image des milieux matériels, tout en étant chargé d'expliquer les actions réciproques des corps, se laissant traverser sans résistance tout en ayant des propriétés analogues à celles de l'acier ou peut-être du caoutchouc, voire même de la poix de cordonnier, suivant une comparaison humoristique de Lord Kelvin. Fresnel, d'ailleurs, avait sagement laissé dans l'ombre les propriétés de ce milieu, mais. ses successeurs, moins prudents, essayèrent de préciser ces propriétés et n'y réussirent pas. Et cependant, les notions fondamentales introduites par Fresnel sont restées et ont permis d'aller plus loin. »

[3]L'oncle maternel d'Augustin n'est autre que le père de Prosper MÉRIMÉE.

[4]Tome 1 des œuvres complètes d'Arago, page 116, dans sa notice biographique sur Fresnel

[5]ibid. page 117

[6]Charles FABRY dans *Physique et physiciens*, page 292

Arago[7] raconte la fin poignante de FRESNEL : celui-ci entouré de sa mère et de son frère Léonor, s'était retiré à Ville d'Avray.

« Fresnel habitait déjà la campagne la Société royale de Londres me chargea de lui la médaille de Rumford. Ses forces, alors presque épuisées, lui permirent à peine de jeter un coup d'oeil sur ce signe, si rarement accordé, de l'estime de l'illustre Société. Toutes ses pensées s'étaient tournées vers sa fin prochaine, tout l'y ramenait :
– Je vous remercie, me dit-il d'une voix éteinte, d'avoir accepté cette mission ; je devine combien elle a dû vous coûter, car vous avez ressenti, n'est-ce pas, que la plus belle couronne est peu de chose, quand il faut la déposer sur la tombe d'un ami ?
Hélas ces douloureux pressentiments ne tardèrent pas à s'accomplir. Huit jours encore s'étaient à peine écoulés, et la patrie perdait l'un de ses plus vertueux citoyens, l'Académie l'un de ses membres les plus illustres, le monde savant un homme de génie. »

2 L'optique ondulatoire

Pour NEWTON la lumière est constituée de corpuscules sur lesquels des forces s'exercent lorsqu'ils touchent une surface, ces forces ne s'exerçant qu'à un voisinage très proche des objets. NEWTON et bien d'autres savants comme Pierre-Simon LAPLACE[8] pensent pouvoir interpréter avec cette théorie les phénomènes optiques comme la réflexion et la réfraction.

Dans la continuité de Christiaan HUYGENS et de Thomas YOUNG, Augustin FRESNEL met fortement en question le caractère corpusculaire de la lumière et dès 1815 il va entreprendre une série d'expériences, demeurées célèbres, tendant à prouver que la lumière est une onde périodique. Ses expériences sur la *diffraction*, les *interférences*, la *polarisation* de la lumière, lui permettront de donner à son intuition une base théorique très élaborée sur la nature ondulatoire de la lumière et le caractère transversal des vibrations lumineuses. Pour comprendre l'œuvre de FRESNEL, il y a deux livres de référence : celui de Bernard MAITTE, *La lumière*[10] et un livre plus récent : *Les révolutions de l'optique* de J.& V. ROSMORDUC et F. DUTOUR[12] qui font l'historique de la lumière et donnent un large aperçu de l'apport de FRESNEL. Signalons aussi le magnifique, en particulier par ses illustrations, *Cahier de Sciences&Vie* N$^{\text{O}}$5 : Fresnel, qu'est-ce que la lumière ?[11].

[7] Tome 1 des œuvres complètes d'Arago, page 181.

[8] Pierre-Simon LAPLACE est un mathématicien, physicien et astronome remarquable né en 1719 à Beaumont en Auge dans le Calvados. Vous trouverez sur le site `http://www.math.unicaen.fr/~reyssat/laplace/`, d'Éric Reyssat, une biographie très complète de ce grand savant.

2.1 La diffraction

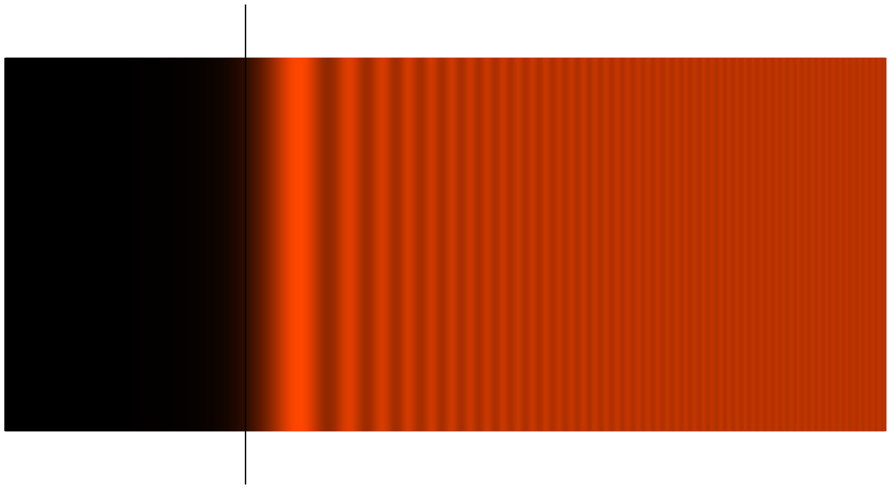

Figure 1: Figure de diffraction par un bord d'écran rectiligne, obtenue en lumière rouge. Le trait noir représente la limite de l'ombre géométrique.

2.1.1 Avant-propos et présentation

Cette étude des phénomènes observés lorsque la lumière rencontre un obstacle, appelés *diffraction*, suit la démarche historique d'Augustin FRESNEL. Elle utilise aussi les apports d'Émile VERDET, d'Henri BOUASSE et Henri BRUHAT qui ont su rendre attrayante et intelligible cette importante étude historique. Toute cette étude repose sur le principe d'HUYGENS-FRESNEL. Elle donne lieu à toute une série d'approximations dont les physiciens ont le secret et qui déroutent les non-initiés, mais elles seront justifiées à *posteriori* par l'excellent accord entre les prévisions déduites des calculs et l'observation des phénomènes. Le principe d'HUYGENS-FRESNEL n'apporte pas une réponse définitive et complète au problème de la diffraction, c'est une « hypothèse capable de fournir le plus grand nombre d'explications à partir du plus petit nombre de causes »[9]. Ces approximations conduisent à

[9]Dans le mémoire sur la diffraction, FRESNEL s'exprime ainsi (page 249 du tome I de ses œuvres complètes) :

« Si la nature s'est proposée de produire le *maximum* d'effets avec le *minimum* de causes, c'est dans l'ensemble de ses lois qu'elle a du résoudre ce grand problème.

Il est sans doute bien difficile de découvrir les bases de cette admirable économie, c'est-à-dire les causes les plus simples des phénomènes envisagés sous un point de vue aussi étendu. Mais, si ce principe général ne conduit pas immédiatement à la connaissance de la vérité il peut néanmoins diriger les efforts de l'esprit humain, en l'éloignant des systèmes qui rapportent les les phénomènes à un trop grand nombre de causes différentes, et en lui faisant adopter de préférence ceux qui appuyés sur le plus petit nombre d'hypothèses, sont les plus fécondes en conséquences. »

l'introduction et à l'étude des fonctions de FRESNEL, dont nous pourrions aujourd'hui nous passer pour simuler avec un ordinateur ces phénomènes en appliquant le principe d'HUYGENS-FRESNEL. Un exemple des franges observées lors de la diffraction par un bord d'écran rectiligne est donné par la figure 1. FRESNEL avait calculé les tables des fonctions éponymes afin de vérifier ses hypothèses, pour rester dans l'état d'esprit des savants de cette époque les simulations numériques de cet article utilisent aussi les mêmes tables(voir annexe C). Cette étude dédiée à Augustin FRESNEL n'utilise que les outils mathématiques disponibles au XIX^{e}S. Pour une vision moderne de l'optique ondulatoire faisant usage des complexes et de la transformée de FOURIER notamment, on peut consulter le cours d'Éric ARISTIDI, professeur à l'université de Nice[10].

Le début du texte historique du mémoire de FRESNEL sur la diffraction[11].

« Lorsque l'on fait entrer la lumière dans une chambre obscure par un très-petit trou, on remarque que les ombres des corps ainsi éclairés, au lieu d'être terminées nettement, sont bordées à l'extérieur de franges de diverses nuances et de différentes largeurs. Si le corps opaque est suffisamment étroit, quoique beaucoup moins que le point lumineux, et que l'on reçoive l'ombre à une distance assez considérable, on verra dans son intérieur des bandes obscures et brillantes qui la partagent en intervalles égaux, et qui sont colorées comme les premières. Avant d'exposer les lois suivant lesquelles les franges tant extérieures qu'intérieures varient de largeur, je vais rendre compte des observations qui me les ont fait découvrir.

Pour obtenir le point éclairant, je me servais d'abord d'un très-petit trou pratiqué dans une feuille d'étain, et sur lequel je rassemblais beaucoup de lumière à l'aide d'une grande lentille ; mais le mouvement du soleil déplaçait promptement le foyer, et chaque observation ne pouvait durer qu'un instant. Enfin j'ai employé le moyen que M. Arago m'avait indiqué, et qui m'a parfaitement réussi. J'ai adapté à l'ouverture du volet de ma chambre obscure une lentille très-convexe, sur laquelle un miroir renvoyait les rayons solaires ; l'image formée au foyer était alors extrêmement resserrée, à cause de la grande convexité de la lentille, et

[10] `http://www.unice.fr\DeptPhys\optique\optique.html`

[11] Dans les œuvres complètes (tome 2), cette introduction est présentée de manière un peu différente :
« On appelle *diffraction* de la lumière les modifications qu'elle éprouve en passant auprès des extrémités des corps.

Lorsque l'on fait entrer les rayons solaires dans une chambre obscure par une ouverture d'un très petit diamètre, on remarque que les ombres des corps, au lieu d'être terminées nettement et d'une manière tranchée, comme cela devrait arriver si la lumière marchait toujours en ligne droite, sont fondues sur leurs contours et bordées de trois franges colorées bien distinctes, dont les largeurs sont inégales et vont en diminuant de la première à la troisième ; quand le corps interposé est assez étroit, on voit même des franges dans son ombre, qui paraît alors divisée par des bandes obscures et des bandes plus petites, placées à des distances égales les unes des autres. Nous appellerons cette seconde espèce de franges *franges intérieures*, et les autres, *franges extérieures*. »

produisait des franges colorées comme le point lumineux qu'on obtient à l'aide d'un très-petit trou. La lentille que j'ai employée a 12 millimètres de foyer ; elle donnait des franges assez nettes tant que le corps opaque n'en était pas éloigné de plus de 50 centimètres ; mais lorsque je les rapprochais davantage, ces franges devenaient très-vagues et ne pouvaient plus être mesurées assez exactement. N'ayant pas à ma disposition, pendant mes premiers essais, de lentille plus forte, j'eus recours à un globule de miel que je déposai sur un petit trou pratiqué dans une feuille de cuivre. Éclairé par ce globule, le fil de fer dont je mesurais les franges en produisait encore de fort nettes, même lorsqu'il n'était plus qu'à un centimètre du point lumineux. Il est inutile d'ajouter que les lentilles de verre d' un très-court foyer, dont je me suis servi depuis, font le même effet. Pour reconnaître si les corps, dans le phénomène de la diffraction, agissent sur la lumière à des distances aussi considérables que le suppose Newton, j'ai cherché à observer les franges extérieures le plus près possible de leur origine ; mais comme, en recevant l'ombre sur un carton, il est difficile d'approcher assez l'oeil pour les bien distinguer sans intercepter la lumière incidente, j'imaginai de la recevoir sur un verre dépoli, et de regarder par derrière avec une loupe. Or, je fus très étonné de voir au-delà des bords du verre des franges absolument semblables à celles qui étaient peintes sur sa surface. [. . .] »

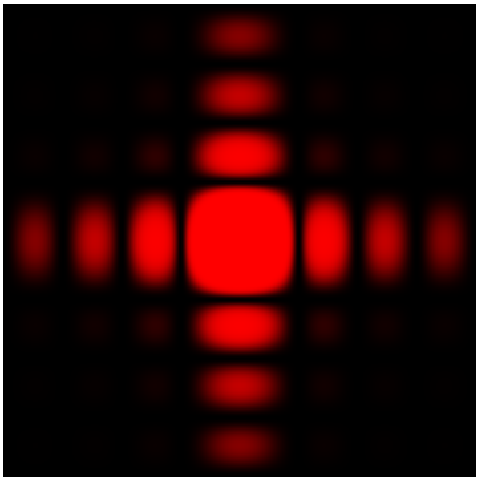

Figure 2: Figure de diffraction par un trou carré.

Une remarquable interprétation du phénomène est faite dans le cours de Berkeley [2], dont un extrait est donné en page 47, annexe 1. Henri Bouasse dans son livre : *Diffraction*(pages 276-277)[4], disait la même chose. . . en d'autres termes [12].

[12] « Cette théorie est évidemment simpliste. Les points de la surface Σ ne sont pas *réelles* ; sinon elles émettraient aussi bien en arrière. Dire qu le résultat des interférences annulerait les mouvements rétrogrades , est faux ; car rien n'empêche de réaliser sur la

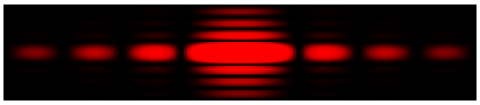

Figure 3: Figure de diffraction par un trou rectangulaire, de hauteur 5 fois plus grande que la largeur.

Pour interpréter le phénomène de la diffraction, Fresnel utilise le principe d'Huyghens : voici ce fameux principe tel que Fresnel l'énonce[13] :

« Les vibrations d'une onde lumineuse dans chacun de ses points, peuvent être regardées comme la résultante des mouvements élémentaires qu'y enverraient au même instant, en agissant isolément, toutes les parties de cette onde considérée dans l'une quelconque de ses positions antérieures. »

2.1.2 Diffraction par un bord d'écran rectiligne

Une source ponctuelle éclaire un bord d'écran rectiligne illimité d'un côté. On cherche à déterminer les franges de diffraction observées sur un écran placé au-delà de l'écran obstacle. Dans l'une des expériences de Fresnel $a = 100$, $b = 799$ (en mm) et $\lambda = 0,638.10^{-6}$m.

C'est par le schéma de la figure 4, que Fresnel débute cette étude, il énonce le principe d'Huygens-Fresnel, qu'il va appliquer.

Émile Verdet, qui fut l'un des maîtres d'œuvre de l'édition des œuvres complètes de Fresnel [8], utilise quant à lui, le schéma (Figure 5)[14].

Si on remplace le point source par une fente fine parallèle au bord de l'écran (ou aux bords de l'écran s'il s'agit d'une fente ou d'un fil), la figure de diffraction n'est pas modifiée et apparaît plus lumineuse. Par conséquent, au lieu de raisonner sur l'onde sphérique nous pouvons nous placer dans un

---

même surface Σ *et avec les mêmes phases*, des mouvements se propageant en sens inverses.

Nous avons donc à faire à des sources fictives ; le principe de Fresnel est non un principe dynamique, mais l'expression d'une équivalence cinématique, un pur et simple *outil de calcul*[...]

Au surplus, que les sources soient réelles ou fictives, on ne peut les déterminer une fois pour toutes. On ne peut même pas pratiquement les déterminer. En effet le mouvement sur la surface Σ dépend de la présence des écrans ; la connaissance des sources à distribuer sur cette surface implique donc qu'on puisse calculer ce qui se passe sur la surface ; autrement dit, le calcul du mouvement en un point P au moyen d'un principe quelconque *analogue à celui de Fresnel, mais moins simpliste*, exige qu'on puisse calculer autrement en un point quelconque, ce qui est un cercle vicieux non théorique, mais pratique. »

[13] Tome II des Œuvres complètes, page 59[8]

[14] page 322, tome V : *leçon d'optique*, de ses œuvres complètes.

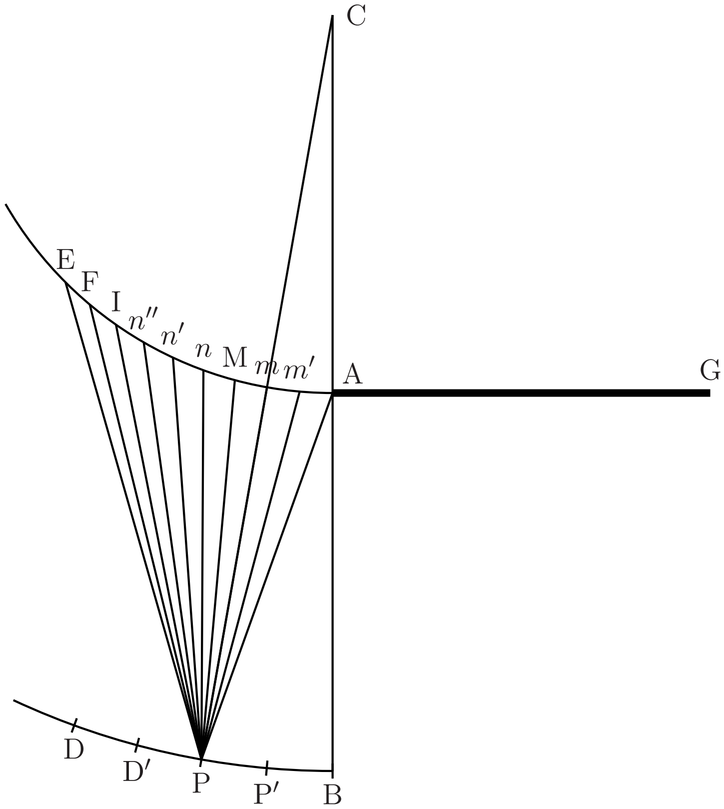

Figure 4: Soit C le point lumineux, AG l'écran, AME l'onde arrivée en A et interceptée en partie par le corps opaque. Je la suppose divisée en une infinité de petits arcs Am', $m'm$, mM, Mn, nn', etc. Pour avoir son intensité au point P, dans l'une de ses positions suivantes BPD, il faut chercher la résultante de toutes les ondes élémentaires que chacune de ces portions de l'onde primitive y enverrait en agissant isolément.(Schéma et commentaires extraits de la page 61, tome 2 des œuvres complètes de Fresnel [8])

plan perpendiculaire à l'écran et considérer l'onde circulaire $\widehat{\mathrm{X'O_0X}}$ de rayon a, tangente en $\mathrm{O_0}$ au bord de l'écran.

Cherchons à déterminer l'éclairement en un point P du plan d'observation. On trace SP qui coupe l'arc $\widehat{\mathrm{X'O_0X}}$ en O. On pose $\widehat{\mathrm{O_0O}} = s_0$, $\widehat{\mathrm{OM}} = s$ et $\widehat{\mathrm{O_0M}} = s'$. Nous allons chercher la contribution d'un arc élémentaire ds centré en M sur l'éclairement au point P.

La vibration lumineuse émise par la source est de la forme :

$$A \cos \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t$$

En M elle s'exprimera par :

$$\frac{A}{a} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{a}{\lambda} \right)$$

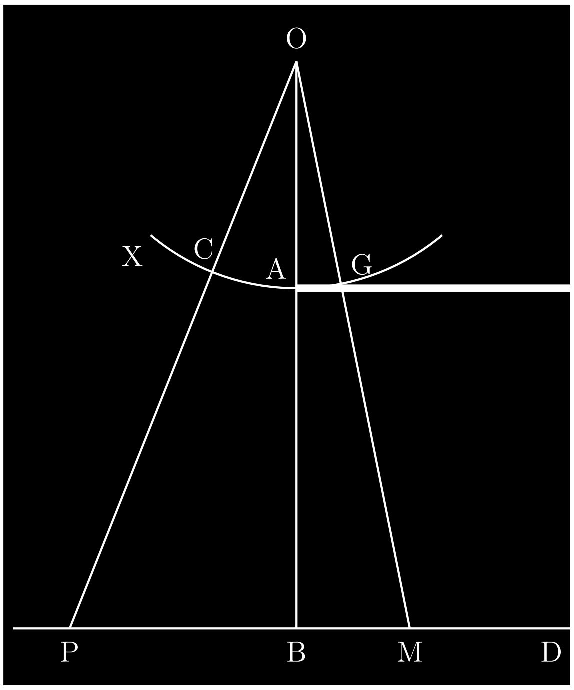

Figure 5: Schéma, page 322 d'Émile VERDET, ouvrant l'étude de la diffraction par un bord d'écran rectiligne dans le tome V de ses œuvres : *Leçons d'optique*.

Et au point P, la contribution de l'arc élémentaire ds vaudra :

$$\frac{A}{ar}\mathrm{d}s\cos 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}}-\frac{a+r}{\lambda}\right)$$

On considère comme négligeables les variations d'amplitude pour les différents points du plan d'observation. Cette amplitude sera représentée par K. On pose $r = r_0 + \delta$.

$$K\cos 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}}-\frac{a+r_0+\delta}{\lambda}\right)\mathrm{d}s$$

Le point P étant fixé et puisque nous cherchons la contribution des différents points de l'onde circulaire $\widehat{\mathrm{O_0X}}$ sur l'éclairement du point P, $a + r_0$ reste constant, en effectuant un changement de l'origine des temps l'état vibratoire s'écrit plus simplement :

$$K\mathrm{d}s\cos 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}}-\frac{\delta}{\lambda}\right)$$

δ représente la différence de marche en P entre les ondes émises par O et M.

Reste à évaluer δ. Je suivrais la méthode développée par Henri BOUASSE dans son livre *Diffraction*, en suivant le schéma de la figure 7. La méthode

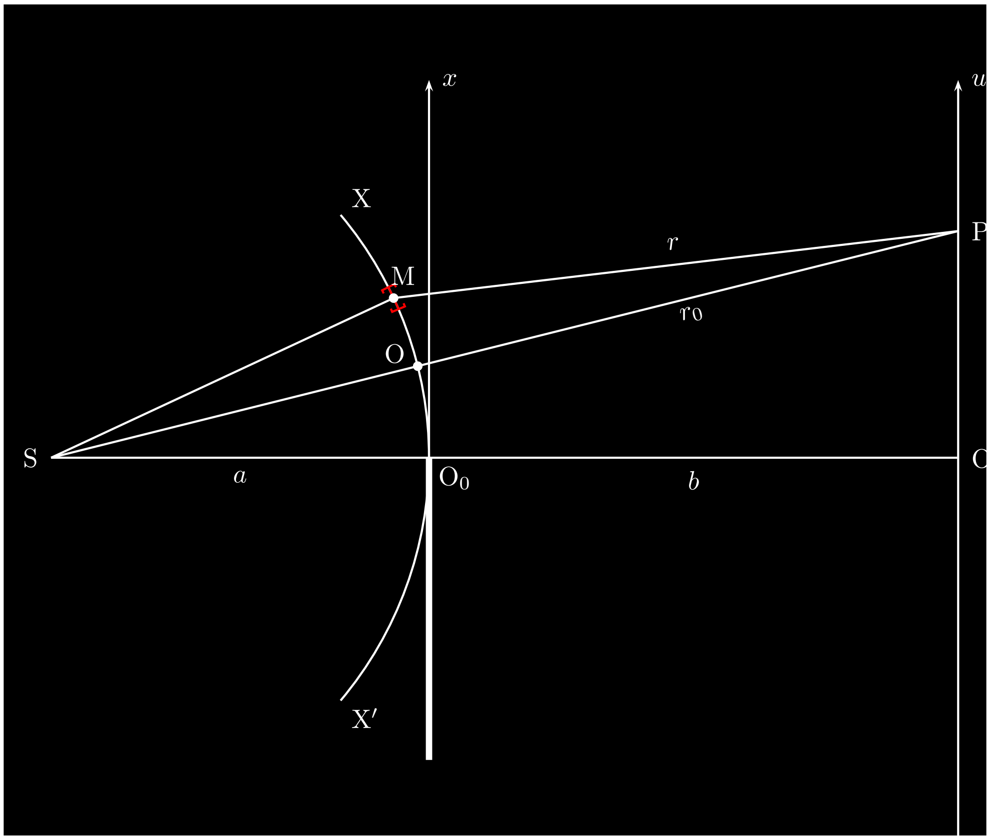

Figure 6: Présentation géométrique de l'étude de la diffraction par un bord d'écran

exposée par Émile VERDET est donnée en annexe B. Pour une meilleure compréhension, je fais subir une rotation à la figure précédente afin d'amener la droite (SP) horizontale. On complète la figure par la tangente en O et diverses constructions nécessaires aux explications, en particulier par un arc de cercle centré en P de rayon r_0.

Pour une meilleure lisibilité, les angles sont exagérément grands sur la figure. Les approximations suivantes sont adoptées (voir Figure 7) :

$$\mathrm{OM} \approx \mathrm{OD} \approx \widehat{\mathrm{OM}} \approx \widehat{\mathrm{OF}} \approx s \text{ et } \mathrm{MD} \approx \mathrm{OH}$$

Dans le triangle rectangle O″MO, en utilisant une relation classique :

$$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OH} \times \mathrm{OO''} \Longrightarrow s^2 \approx \mathrm{MD} \times 2a \Longleftrightarrow \mathrm{MD} \approx \frac{s^2}{2a}$$

Opérons de la même manière pour calculer DF, on trouve :

$$s^2 \approx \mathrm{DF} \times 2r_0 \Longleftrightarrow \mathrm{DF} \approx \frac{s^2}{2r_0}$$

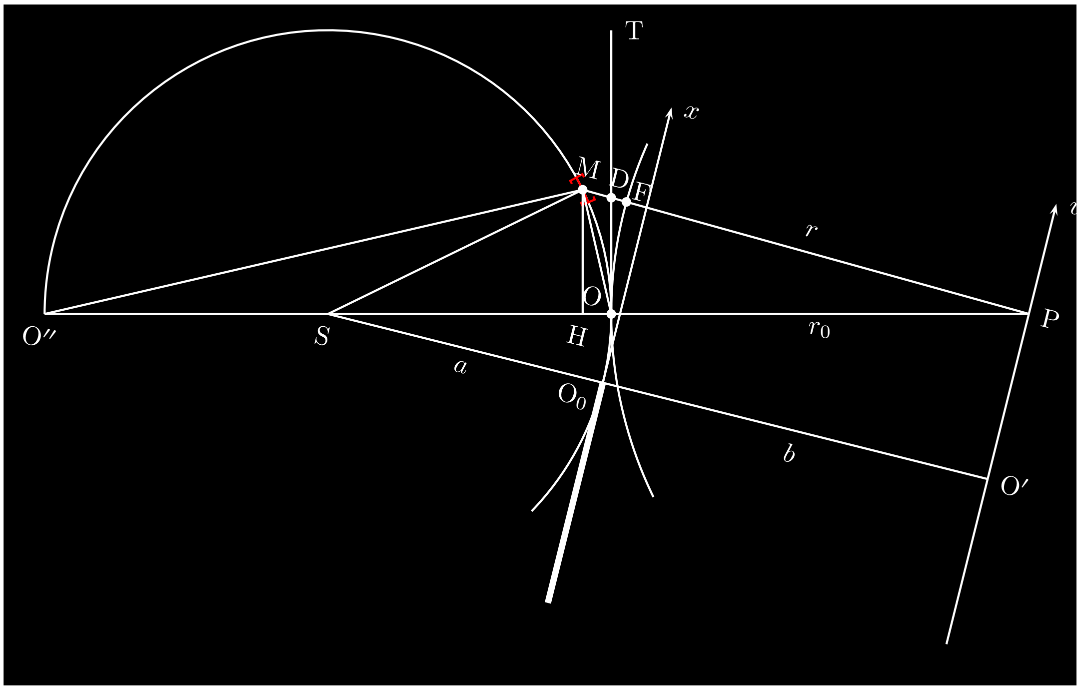

Figure 7: Calcul de la différence de marche $\delta = r - r_0 = \mathrm{MD} + \mathrm{DF}$

On en déduit le retard δ :

$$\delta = r - r_0 = \mathrm{MF} = \mathrm{MD} + \mathrm{DF} = s^2\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2r_0}\right) = \frac{(a+r_0)}{2ar_0}s^2$$

La contribution de l'arc élémentaire ds centré en M à l'état vibratoire du point P s'écrit :

$$\mathrm{d}E = K\mathrm{d}s\cos 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{(a+r_0)}{2ar_0\lambda}s^2\right)$$

$$\mathrm{d}E = K\mathrm{d}s\cos\left(2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{\pi(a+r_0)}{ar_0\lambda}s^2\right)$$

On définit la variable auxiliaire ν :

$$\nu^2 = \frac{2(a+r_0)}{ar_0\lambda}s^2$$

$$\mathrm{d}E = K\mathrm{d}s\cos\left(2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{\pi\nu^2}{2}\right)$$

L'état de la vibration lumineuse au point P sera obtenue en faisant la somme de tous les dE qui sont les contributions des différentes arcs élémentaires , suivant le principe d'Huygens-Fresnel, de la partie découverte de l'écran qui va de $\mathrm{O}_0 \longrightarrow \infty$.

Posons $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $\mathrm{d}\nu = \alpha \mathrm{d}s$ avec :

$$\alpha = \sqrt{\frac{2(a+r_0)}{ar_0\lambda}}$$

Appelons K' la nouvelle constante :

$$\mathrm{E} = K' \int \cos\left(\omega t - \frac{\pi\nu^2}{2}s^2\right)\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{E} = K' \cos\omega t \int \cos\frac{\pi\nu^2}{2}s^2\mathrm{d}s + K'\sin\omega t\int\sin\frac{\pi\nu^2}{2}s^2\mathrm{d}s$$

On pose :

$$P = \int\cos\frac{\pi\nu^2}{2}s^2\mathrm{d}s \qquad Q = \int\sin\frac{\pi\nu^2}{2}s^2\mathrm{d}s$$

$$E = K'(P\cos\omega t + Q\sin\omega t)$$

Nous n'écrivons plus le facteur constant K', la vibration lumineuse est une grandeur proportionnelle à l'expression entre parenthèses. L'intensité lumineuse au point P est égale au carré de l'amplitude :

$$E = E_0\cos(\omega t+\varphi) \Longrightarrow E_0^2 = P^2+Q^2 \text{ et } \tan\varphi = \frac{Q}{P}$$

Elle est donnée par :

$$I = P^2+Q^2$$

$C(\nu)$ et $S(\nu)$ sont les intégrales de Fresnel :

$$C(\nu) = \int_0^\nu \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

$$S(\nu) = \int_0^\nu \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

En examinant le tracé des deux courbes les représentant, nous constatons que pour des valeurs de ν grandes les deux intégrales prennent la même valeur $\frac{1}{2}$. Pour calculer la valeur de ces intégrales lorsque ν est grand, on prendra :

$$C(\nu) = \int_0^\nu \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}$$

$$S(\nu) = \int_0^\nu \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}$$

Il faut maintenant déterminer les bornes d'intégration : elles sont entre $-\widehat{\mathrm{O_0O}}$ et $\widehat{\mathrm{OX}}$. X est le point de tangence mené par P.

L'approximation suivante consiste à assimiler l'arc $\widehat{\mathrm{X'O_0X}}$ avec l'axe $x'Ox$. Compte-tenu de la remarque précédente, il revient au même de prendre comme bornes d'intégration $-x$ et $+\infty$, soit pour la variable ν entre $-\nu$ et $+\infty$.

En remarquant que $C(\nu)$ et $S(\nu)$ sont des fonctions impaires, on en déduit :

$$P = \int_{-\nu}^{\infty} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu = \int_{-\nu}^{0} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu + \int_{0}^{\infty} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu = \int_{0}^{\nu} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu + \frac{1}{2}$$

$$Q = \int_{-\nu}^{\infty} \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu = \int_{-\nu}^{0} \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu + \int_{0}^{\infty} \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu = \int_{0}^{\nu} \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu + \frac{1}{2}$$

L'intensité, ou plutôt une grandeur qui lui est proportionnelle se calcule par :

$$I = P^2 + Q^2 = \left(\frac{1}{2} + C(\nu)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + S(\nu)\right)^2$$

On se donne le point P par u et on en déduit ν.

La figure 8 représente les franges de diffraction en lumière blanche. Sur la figure 9 on dessiné la courbe représentant les variations de l'intensité.

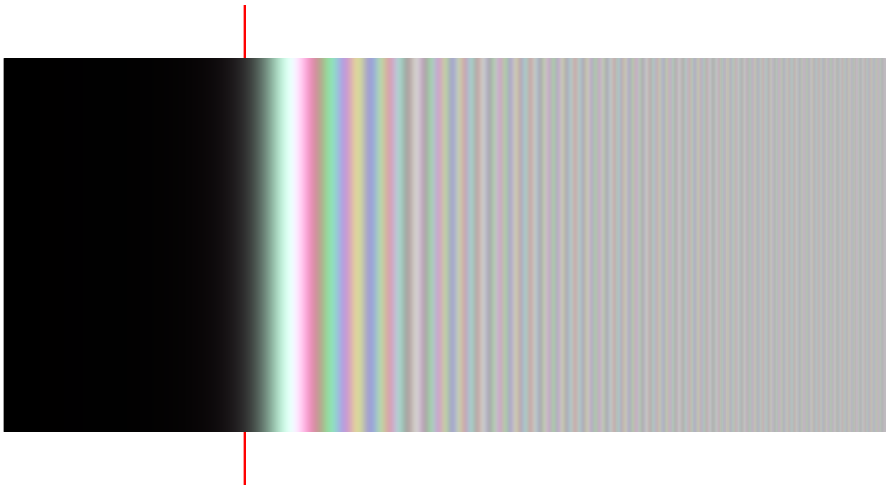

Figure 8: Figure de diffraction obtenue en lumière blanche, en grandeur réelle avec les paramètres $a = 1$ m et $b = 10$ m. Le trait noir représente la limite de l'ombre géométrique.

Sur la figure 10, on peut visualiser l'influence de la couleur sur l'interfrange.

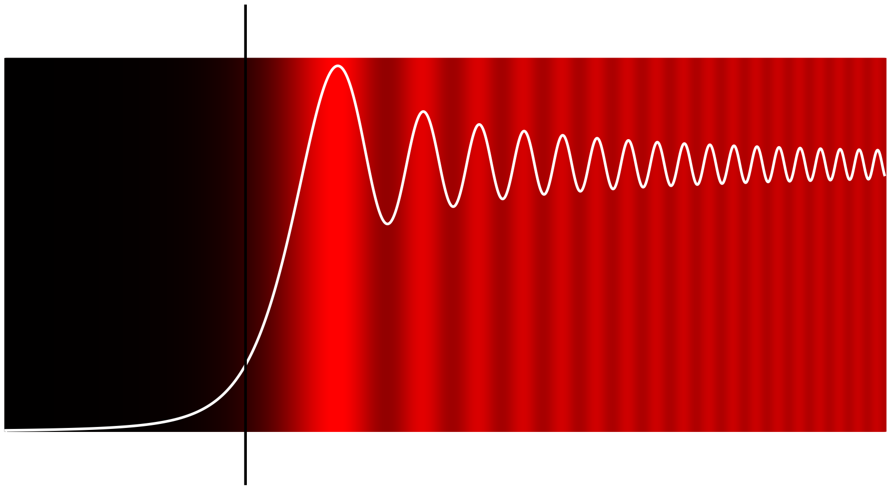

Figure 9: Le trait noir représente la limite de l'ombre géométrique. On constate qu'à la limite de l'ombre géométrique l'éclairement est le quart de ce qu'il serait sans écran. Les franges n'existent qu'hors de l'ombre géométrique où elles vont en se resserrant. Les différences entre maxima et minima allant en s'amenuisant les franges finissent par s'estomper.

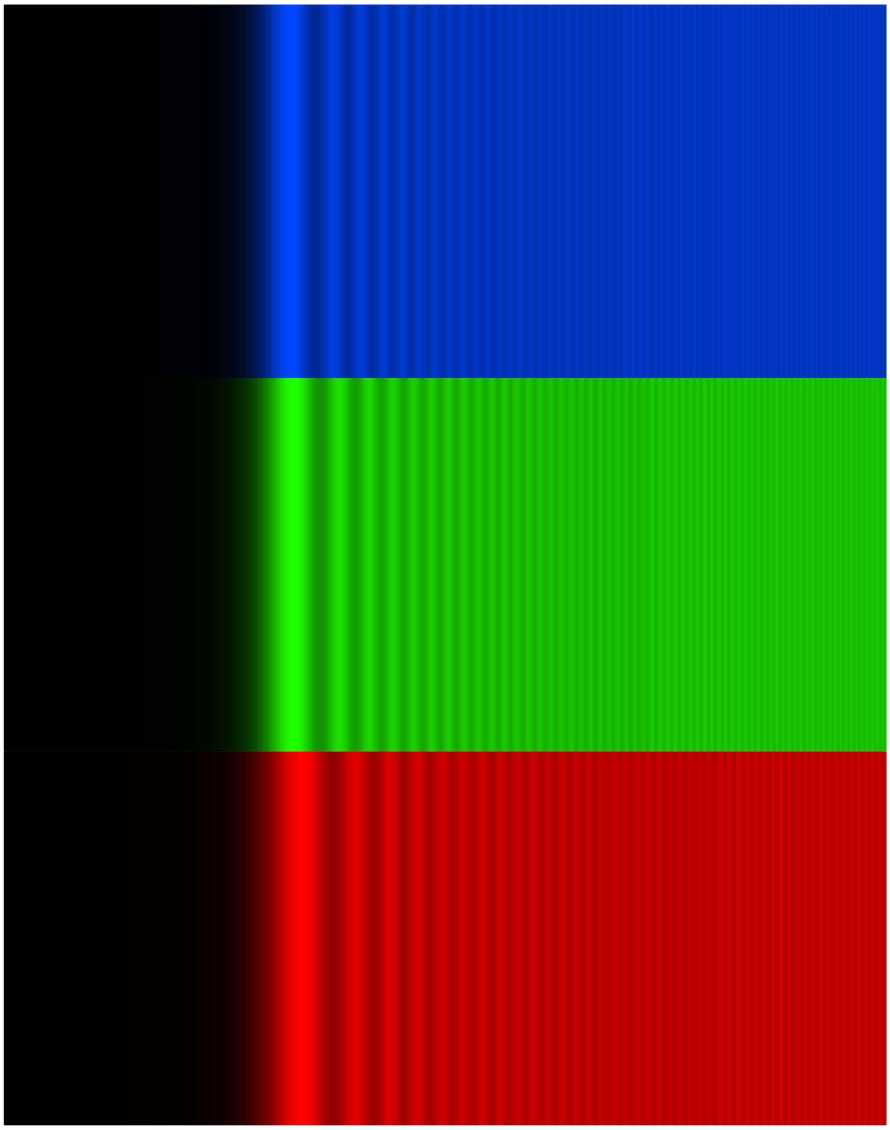

Figure 10: Les franges sont d'autant plus larges que la longueur d'onde est grande.

2.1.3 Diffraction par un fil

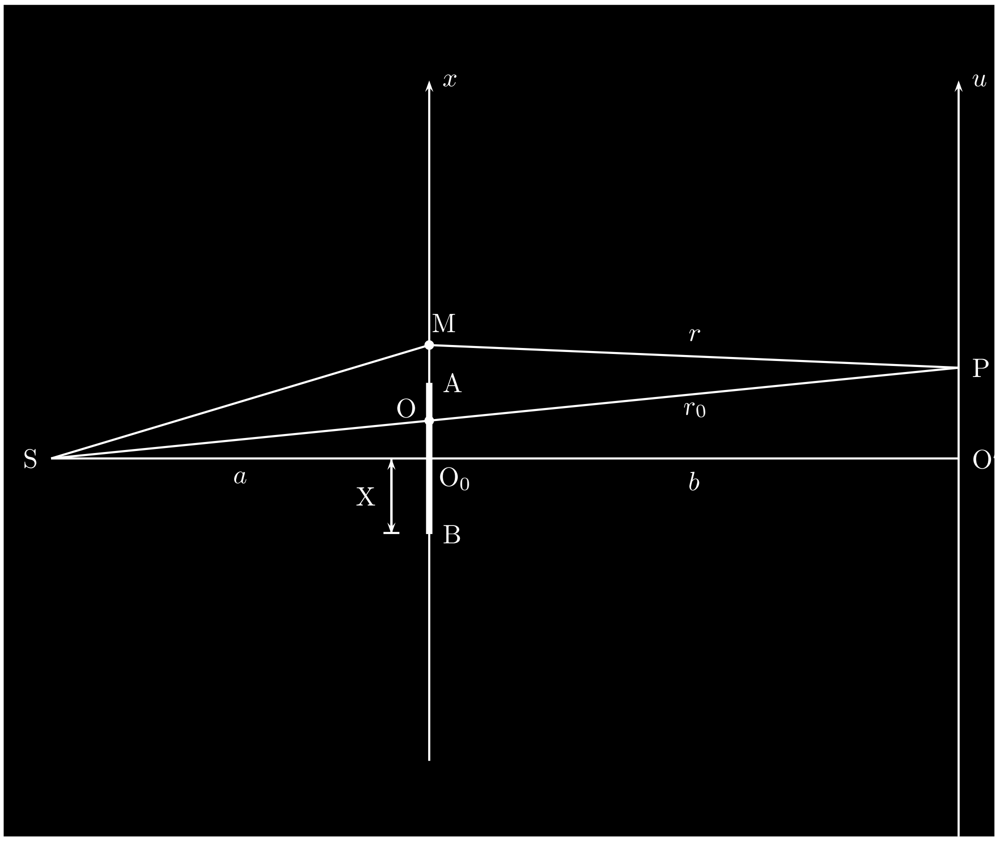

Figure 11: Présentation géométrique de l'étude de la diffraction par un écran à bords rectilignes et parallèles très étroit (fil).

Le point d'observation est défini par : $\overline{\mathrm{O'P}} = u$, le point O par : $\overline{\mathrm{O_0O}} = x$, avec :

$$\overline{\mathrm{O_0O}} = x = u\frac{a}{a+b}$$

Comme précédemment la variable auxiliaire ν est :

$$\nu^2 = \frac{2(a+r_0)}{ar_0\lambda}x^2 = \frac{2a}{r_0(a+r_0)}u^2$$

avec l'approximation qui consiste à dire que r_0 s'écarte peu de b :

$$\nu^2 = \frac{2(a+b)}{ab\lambda}x^2 = \frac{2a}{b(a+b)}u^2$$

Les intégrales P et Q ont comme bornes d'intégration, si X désigne la demi-épaisseur du fil :

- pour la partie supérieure de l'onde, entre $\mathrm{X}-x$ et ∞ ;
- pour la partie inférieure de l'onde, entre $\mathrm{X}+x$ et ∞ ;

φ étant la valeur de ν qui correspond au bord A de l'écran, soit :

$$\varphi=\nu(\mathrm{X})=\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}\mathrm{X}$$

pour la variable ν les bornes d'intégration sont :

- pour la partie supérieure de l'onde, entre $\varphi-\nu$ et ∞ ;
- pour la partie inférieure de l'onde, entre $\varphi+\nu$ et ∞ ;

Les mêmes remarques que lors du calcul de l'éclairement d'un bord d'écran s'appliquent :

$$P=\int_{\varphi-\nu}^{\infty}\cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu+\int_{\varphi+\nu}^{\infty}\cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

$$P=\int_{\varphi-\nu}^{0}\cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu+\int_{0}^{\infty}\cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu+\int_{\varphi+\nu}^{0}\cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu+\int_{0}^{\infty}\cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

Sachant que les fonctions de FRESNEL sont impaires, que $\int_0^\infty\cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu=\frac{1}{2}$,

$$P=1-\int_{0}^{\varphi-\nu}\cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu-\int_{0}^{\varphi+\nu}\cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

De même :

$$Q=1-\int_{0}^{\varphi-\nu}\sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu-\int_{0}^{\varphi+\nu}\sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

La position du point P où on veut calculer l'éclairement est donnée par u, on en déduit x et ν.

$$I=P^2+Q^2$$

Les figures 12, 13, 14, 15 ont été obtenues par simulation numérique[15], les traits verticaux représentent les limites de l'ombre géométrique du fil et le contraste a été accentué pour les franges situées dans l'ombre géométrique. Á l'intérieur de l'ombre les franges sont équidistantes.

[15] Les programmes ont été écrits en postscript, les paramètres de l'expérience sont accessibles pour modification soit directement dans les lignes des fichiers, soit par l'intermédiaire de commandes LaTeX. Les programmes avec quelques explications sont téléchargeables ici : `http://melusine.eu.org/syracuse/mluque/figuresdiffraction/figuresdiffraction.html`

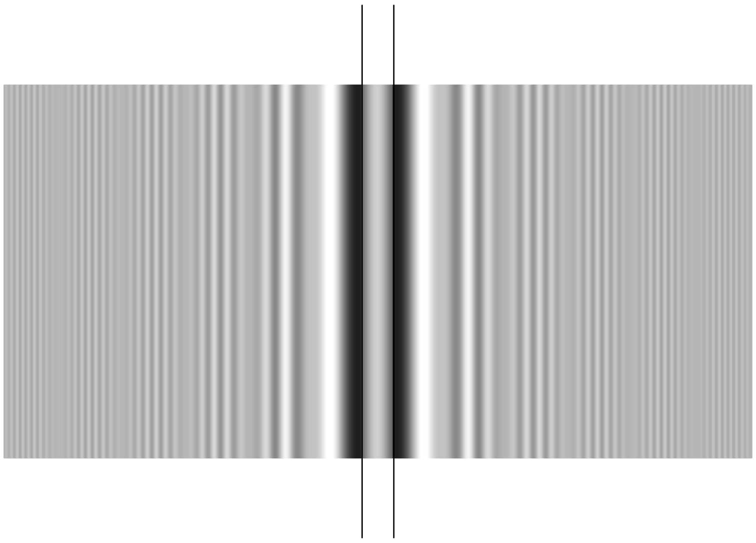

Figure 12: $\varphi = 0,5$

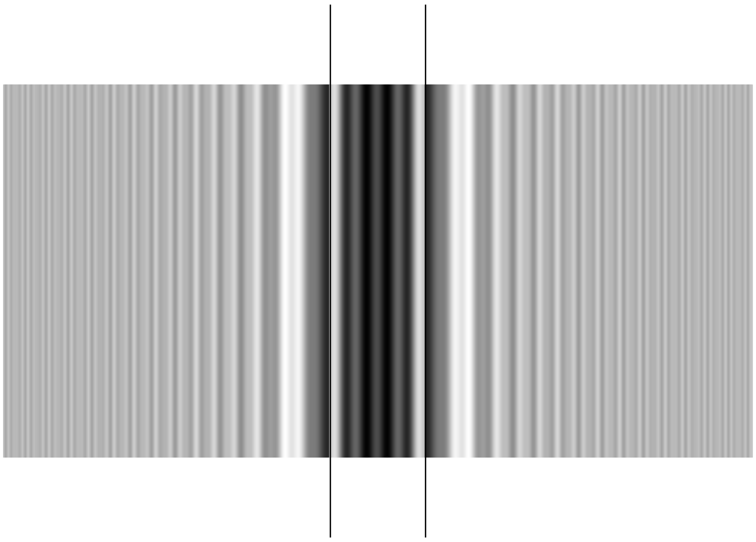

Figure 13: $\varphi = 1,5$

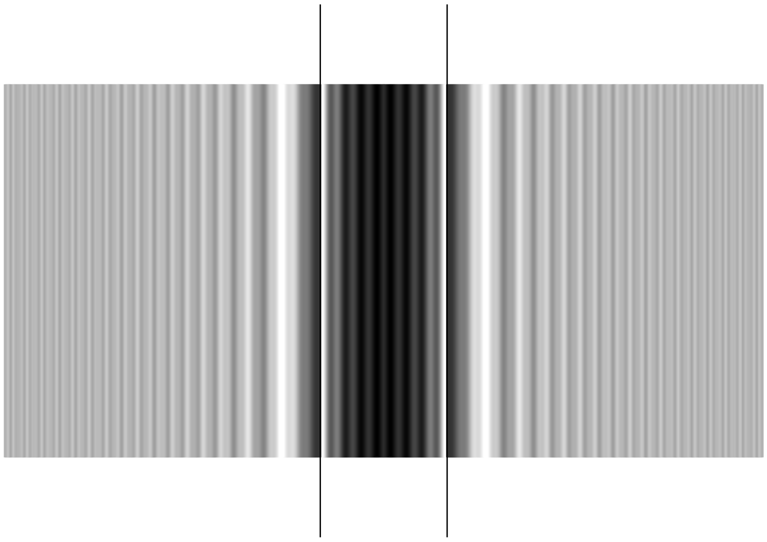

Figure 14: $\varphi = 2$

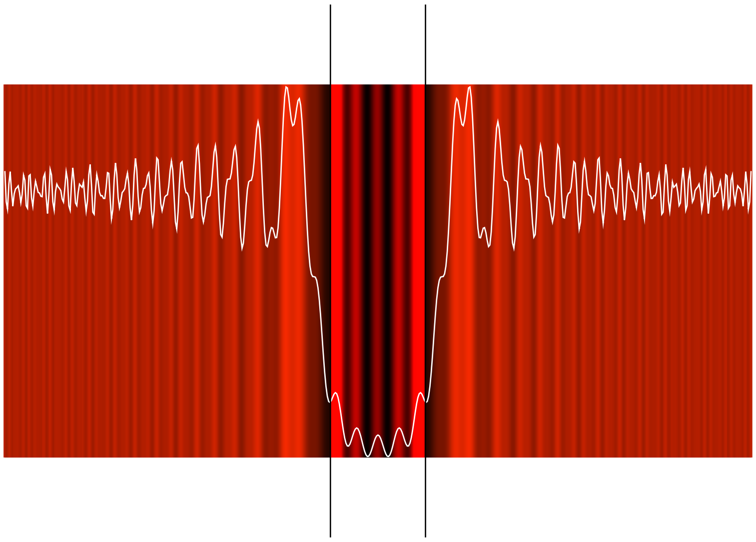

Figure 15: $\varphi = 1,5$ en lumière rouge ($\lambda = 638$ nm), avec les variations de l'intensité. Le contraste a été accentué dans l'ombre géométrique afin de bien y discerner les franges équidistantes.

2.1.4 Diffraction par une fente fine à bords parallèles

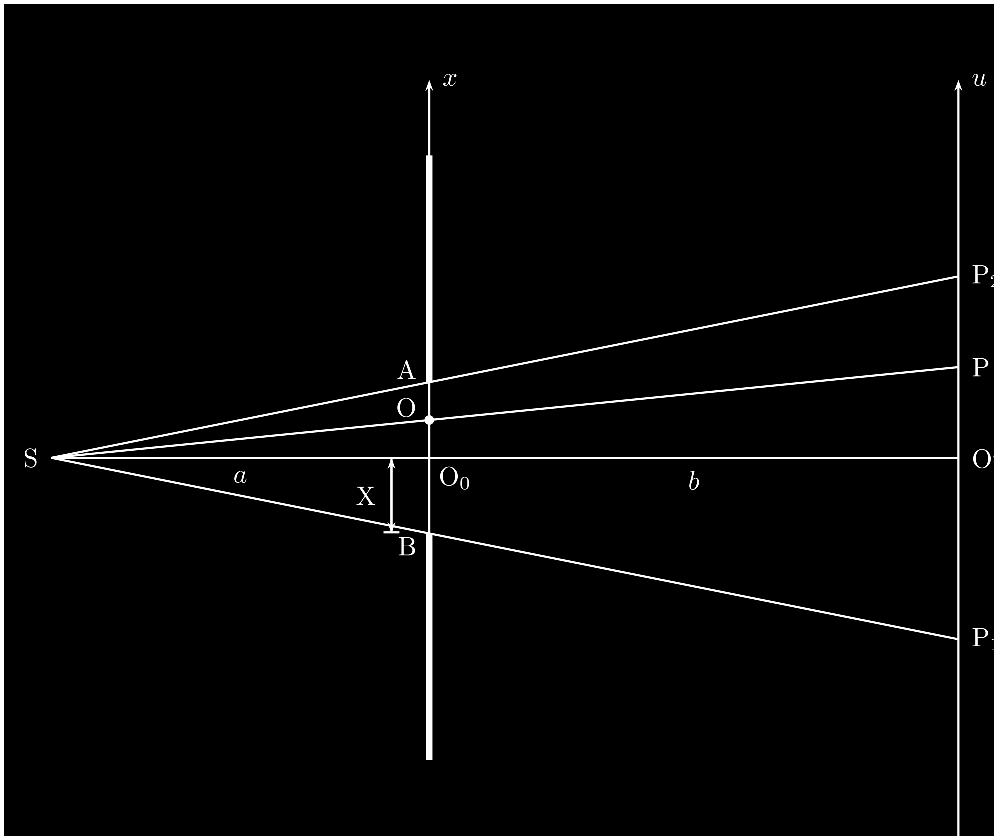

Figure 16: Présentation géométrique de l'étude de la diffraction par une fente étroite.

Déterminons les borne d'intégration pour x :

$$x_1 = \overline{OB} = \overline{OO_0} + \overline{O_0B} = -x - \mathrm{X}, \qquad x_2 = \overline{OA} = \overline{OO_0} + \overline{O_0A} = -x + \mathrm{X}$$

Soit pour ν :

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}x_1 = -\nu - \varphi, \qquad \nu_2 = \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}x_2 = -\nu + \varphi$$

En posant comme précédemment que $\varphi = \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}\mathrm{X}$. La méthode est identique à celle utilisée pour la diffraction par un fil, seules les bornes d'intégration changent.

On se donne la position du point P par la variable u, on en déduit x puis ν. L'intensité se calcule par $I = P^2 + Q^2$, avec les intégrales :

$$P = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu, \quad Q = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

$$P = \int_{\nu_1}^{0} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu + \int_{0}^{\nu_2} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

$$P = -\int_{0}^{\nu_1} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu + \int_{0}^{\nu_2} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

soit :

$$P = \int_{0}^{\varphi-\nu} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu + \int_{0}^{\varphi+\nu} \cos\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

de même :

$$Q = \int_{0}^{\varphi-\nu} \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu + \int_{0}^{\varphi+\nu} \sin\frac{\pi\nu^2}{2}\mathrm{d}\nu$$

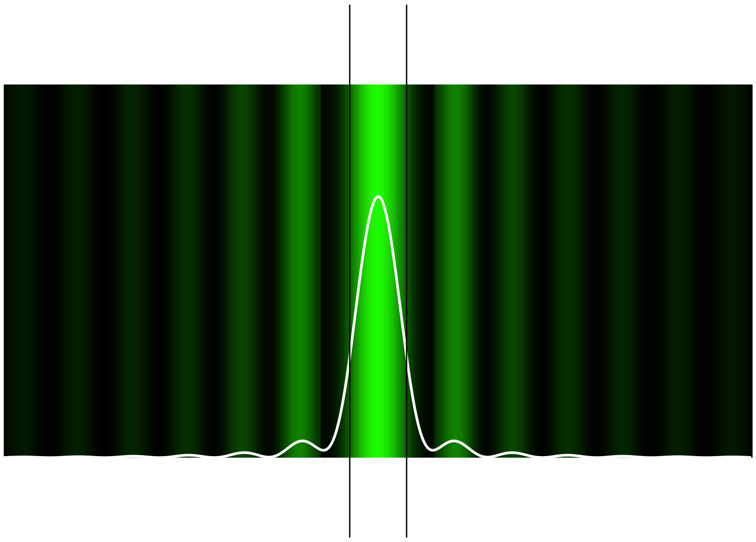

Figure 17: $\varphi = 0,72$, $a = 50$, $b = 700$ et $X = 0,025$ en cm. Les deux traits verticaux représentent les limites de l'ombre géométrique.

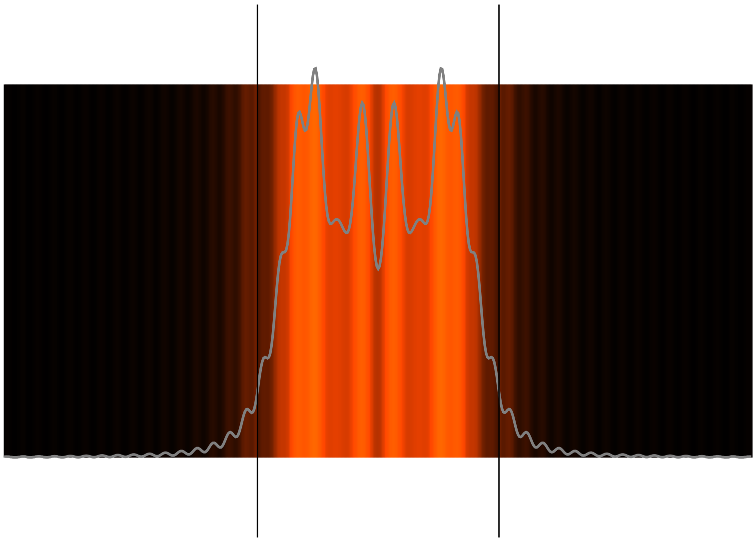

Figure 18: $\varphi = 2,75$.

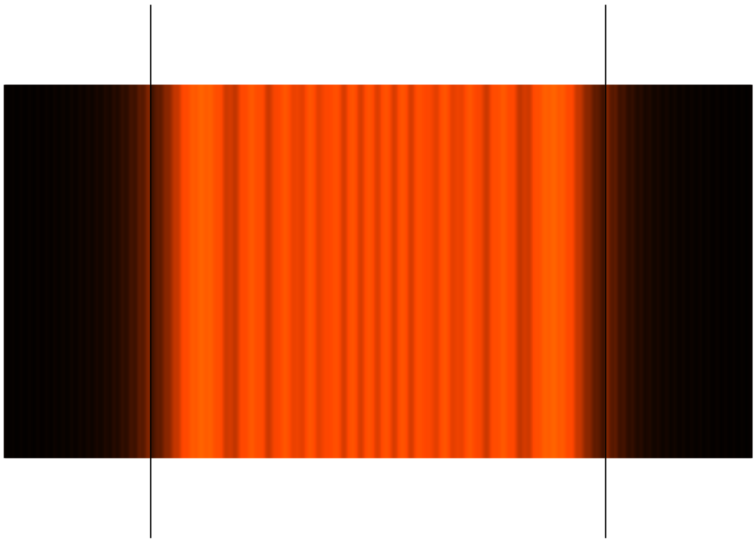

Figure 19: $\varphi = 5$. Avec une fente très large, on obtient dans l'ombre géométrique pour chaque bord, sensiblement le même phénomène que pour la diffraction par un bord d'écran, (§ 2.1.2).

2.1.5 Diffraction par une petite ouverture ou un écran circulaires

Dans son mémoire sur la diffraction, FRESNEL ne s'était préoccupé que de la diffraction produite par des écrans rectilignes à bords indéfinis et ce n'est qu'à la suite d'une remarque de POISSON qu'il fut conduit à étudier ces phénomènes[16]. Voici en quels termes Émile VERDET [17] relate ces circonstances :

> «... POISSON, qui faisait partie de la commission chargée de juger ce mémoire, remarqua que les intégrales dont l'auteur faisait dépendre le calcul des intensités de la lumière diffractée pouvaient s'évaluer exactement pour le centre de l'ombre d'un petit écran circulaire opaque et pour le centre de la projection conique d'une petite ouverture circulaire. Dans le premier cas elles donnaient la même intensité que si l'écran circulaire n'existait pas ; dans le second, elles donnaient une intensité variable avec la distance et sensiblement nulle pour un certain nombre de distances déterminées par une loi très simple. FRESNEL fut invité à soumettre à l'épreuve ces conséquences imprévues et paradoxales de sa théorie, et l'expérience les confirma entièrement. »

FRESNEL n'a pas fait une étude théorique complète du phénomène de diffraction par une ouverture ou un écran circulaire ou d'autre type d'ouvertures et d'écrans. Voici quelques exemples de figures de diffraction obtenues à l'aide d'un trou circulaire, de deux trous circulaires et d'un trou triangulaire [18].

[16] Calcul de l'intensité de la lumière au centre de l'ombre d'un écran et d'un ouverture circulaire éclairés par un point radieux (*Œuvres complètes de Fresnel*, tome I, page 365).

[17] *Œuvres complètes, Leçons d'optique*, page 393, tome V.

[18] Un package PSTricks `pst-diffraction` permet une simulation de la diffraction par ces ouvertures : `http://melusine.eu.org/syracuse/mluque/figuresdiffraction/figuresdiffraction.html`. Pour une étude théorique, on consultera l' ouvrage d'Henri BOUASSE sur le diffraction [4], ou pour une approche plus moderne le cours d'optique d'Éric ARISTIDI sur : `http://www.unice.fr\DeptPhys\optique\optique.html` [1].