Suite et fonction

Étant donnés trois nombres réels λ, a, b, on considère la suite (u_n) définie par les conditions suivantes :

$$u_0 = \lambda \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ 4u_{n+1} = 3u_n^2 - 2(a+b)u_n + ab + 2(a+b)$$

La suite (u_n) est dite *associée* à λ, a, b.
Les deux parties suivantes sont indépendantes.

A – Dans cette partie, on suppose que $a < b < 2$.

1/ Montrer que, lorsqu'elle existe, la limite de la suite (u_n) associée à λ, a, b est une solution de l'équation

$$3x^2 - 2(2+a+b)x + ab + 2(a+b) = 0$$

2/ On considère la fonction polynôme f définie pour tout x réel par

$$f(x) = 3x^2 - 2(2+a+b)x + ab + 2(a+b)$$

Déterminer la primitive g de f qui s'annule pour $x = 2$ et montrer que g a exactement trois zéros que l'on précisera.

3/ En déduire que, lorsqu'elle existe, la limite ℓ de la suite associée à λ, a, b vérifie l'une des deux inégalités

$$a < \ell < b \text{ ou } b < \ell < 2$$

(On pourra utiliser le théorème de Rolle).

B – Dans cette partie, on suppose que $a = b = 2$.

1/ Montrer que si la suite (u_n) associée à λ, 2, 2 converge, sa limite est égale à 2.

2/ Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, la suite (u_n) associée à λ, 2, 2 est croissante.

3/ Montrer que la suite (u_n) associée à λ, 2, 2 est convergente lorsque $\lambda \in]\frac{2}{3}, 2[$.

4/ Montrer que la suite (u_n) associée à λ, 2, 2 est divergente lorsque $\lambda \notin [\frac{2}{3}, 2]$.

5/ Préciser les cas $\lambda = \frac{2}{3}$ ou $\lambda = 2$.

On commence par introduire la fonction h qui sert à définir la suite (u_n).

```
> block(h(x):=1/4*(3*x^2-2*(a+b)*x+a*b+2*(a+b)),h(x));
```

$$\frac{3\,x^2 - 2\,(b+a)\,x + 2\,(b+a) + a\,b}{4}$$

Partie A

1/ Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors, sachant que l'on a $u_{n+1} = h(u_n)$, que h est une fonction continue en tout point de $\mathbf{R}$ donc en ℓ, nécessairement : $\ell = h(\ell)$.

```
> ev(4*(h(x)-x)=0,expand);
```

$$3\,x^2 - 2\,b\,x - 2\,a\,x - 4\,x + a\,b + 2\,b + 2\,a = 0$$

2/ $f(x)$ est le membre de gauche de l'équation précédente.

```
> block(f(x):=4*h(x)-4*x,f(x));
```

$$3\,x^2-2\,(b+a)\,x-4\,x+2\,(b+a)+a\,b$$

On détermine g :

```
> block(g(x):=integrate(f(t),t,2,x),g(x));
```

$$x^3+(-b-a-2)\,x^2+((a+2)\,b+2\,a)\,x-2\,a\,b$$

On factorise l'expression obtenue.

```
> factor(g(x));
```

$$(x-2)\,(x-a)\,(x-b)$$

$g(x)$ admet trois zéros qui sont a, b et 2.

3/ Le théorème de Rolle s'applique à g sur les deux segments $[a,b]$ et $[b,2]$, sa dérivée f s'annule donc une fois à l'*intérieur* de ces deux segments et comme elle ne s'annule au plus que deux fois (polynôme de degré 2), on a là ses deux zéros distincts, ℓ est l'un d'eux.

Partie B On particularise la fonction f dans ce cas où $a = 2$ et $b = 2$.

```
> block(a:2,b:2,f(x));
```

$$3\,x^2 - 12\,x + 12$$

```
> factor(f(x));
```

$$3\,(x-2)^2$$

1/ Comme on le voit dans la factorisation précédente, l'équation $f(x) = 0$ ou $h(x) = x$ n'admet qu'une seule solution : 2, ce qui permet de justifier que lorsque la suite (u_n) converge, elle converge vers 2.

2/ Le signe de $h(x) - x$ étant toujours positif, on peut en déduire que (u_n) est croissante quelle que soit la valeur de λ.

3/ Une étude des variations de h sur $\mathbf{R}$ montre que l'intervalle $]\frac{2}{3}, 2[$ est *stable* par h. Si $u_0 = \lambda$ est dans cet intervalle alors (récurrence) tous les termes de (u_n) y seront, la suite est donc bornée. Comme elle est croissante elle converge et sa limite est 2.

4/ Toujours d'après l'étude des variations de h, on peut établir que si $u_0 = \lambda$ n'appartient pas à $[\frac{2}{3}, 2]$ alors tous les termes de la suite (u_n), à partir du rang 1, sont strictement supérieurs à 2. La suite (u_n) ne peut alors converger vers 2, seule limite possible, puisqu'elle est croissante. Dans ce cas elle diverge.

5/ Si $\lambda = \dfrac{2}{3}$ ou $\lambda = 2$, alors la suite est *stationnaire* à partir du rang 1 et vaut 2.

Voici, pour finir, une représentation de la fonction h permettant de mieux visualiser les scénarios de la partie B.