Développements limités (exercice)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

1/ Montrer que la fonction $g : x \mapsto x f(x)$ est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, nous identifierons g avec ce prolongement.

2/ Après avoir déterminé le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^x - 1$, calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $g(x)$.

3/ Montrer alors qu'il existe 4 réels a, b, c, d tels que, au voisinage de 0 sauf en 0, on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x} + b + cx + dx^2 + o(x^2)$$

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est le *développement limité généralisé* de f, à l'ordre 2, au voisinage de 0 ($\mathrm{DLG}_2(0)$).

4/ Déterminer le $\mathrm{DLG}_2(0)$ de $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$.

Définition de f :

```
> f(x):=1/(exp(x)-1);
```

```
f(x):=1/(EXP(x)-1);
```

Définition de g :

```
> g(x):=x*f(x);
```

```
g(x):=x*f(x);
```

Calculons la limite de g en 0 :

```
> limit(g(x),x,0);
```

$$1$$

Cette limite existe donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.
$\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^x - 1$:

```
> A:taylor(exp(x)-1,x,0,4);
```

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

Le quotient de x par $e^x - 1$ induit une simplification par x. La quantité qui reste est de la forme $\dfrac{1}{1+u}$ avec u :

```
> A/x-1;
```

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \cdots$$

On développe $\dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3 :

```
> taylor(1/(1+u),u,0,3);
```

$$1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$$

En subtituant le développement de u à u dans l'expression précédente, on obtient le résultat attendu (que MAXIMA donne directement) :

```
> A:taylor(g(x),x,0,4);
```

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\cdots$$

En divisant par x on obtient donc le développement généralisé de f en 0 :

```
> A/x;
```

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{720}+\cdots$$

Les coefficients a, b, c, d s'obtiennent par lecture ...

Pour finir, la même méthode justifierait le $\mathrm{DLG}_2(0)$ de $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$:

```
> taylor(1/sinh(x),x,0,3);
```

$$\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+\frac{7\,x^3}{360}+\cdots$$

Soyons généreux :

```
> taylor(1/(exp(x)-1),x,0,10);
```

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{720}+\frac{x^5}{30240}-\frac{x^7}{1209600}+\frac{x^9}{47900160}+\cdots$$

```
> taylor(1/sinh(x),x,0,10);
```

$$\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+\frac{7\,x^3}{360}-\frac{31\,x^5}{15120}+\frac{127\,x^7}{604800}-\frac{73\,x^9}{3421440}+\cdots$$