Lieu de points (1)

> Soit A, B, C, D un rectangle. Quel est le lieu des points M tels que les rayons des cercles circonscrits à ABM et CDM soient égaux ?

Commençons par définir les quatres sommets du rectangle dans un repère orthonormé bien choisi.

```
> (A:[a,b],B:[-a,b],C:[-a,-b],D:[a,-b],['A=A,'B=B,'C=C,'D=D]);
```

$$[A=[a,b]\,,B=[-a,b]\,,C=[-a,-b]\,,D=[a,-b]]$$

Maintenant un point M générique :

```
> M:[x,y];
```

$$[x,y]$$

Pour déterminer le centre du cercle $\mathscr{C}_1$ circonscrit au triangle ABM, nous allons procéder ainsi :

1/ Définir une fonction f, caractéristique de $\mathscr{C}_1$ au sens où si $M(x,y)\in\mathscr{C}_1$ alors $f(x,y)=0$ est l'équation cartésienne de $\mathscr{C}_1$.

```
> f(p):=buildq([X:part(p,1),Y:part(p,2)],X^2+Y^2+alpha*X+beta*Y+vgamma)$
```

Cette fonction dépend de trois paramètres à partir desquels se calculent le centre et le rayon du cercle.

2/ Déterminer les paramètres pour que la fonction soit caractéristique du cercle passant par A, B, M. Cela revient à résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues.

```
> s1:solve([f(A),f(B),f(M)],[alpha,beta,vgamma]);
```

$$\left[\left[\alpha=0,\beta=-\frac{-y^2-x^2+b^2+a^2}{b-y},vgamma=\frac{b\left(-y^2-x^2\right)+b^2\,y+a^2\,y}{b-y}\right]\right]$$

Nous trouvons $\alpha = 0$, dans le cas qui nous intéresse ce résultat était attendu, le centre du cercle étant nécessairement situé sur l'axe des ordonnées.

Récupérons l'ordonnée du centre.

```
> y1:-1/2*rhs(part(s1,1,2));
```

$$\frac{-y^2-x^2+b^2+a^2}{2\left(b-y\right)}$$

Nous pouvons maintenant calculer le carré du rayon du cercle $\mathscr{C}_1$.

```
> r1c:(x-0)^2+(y-y1)^2;
```

$$\left(y-\frac{-y^2-x^2+b^2+a^2}{2\left(b-y\right)}\right)^2+x^2$$

Pour le cercle $\mathscr{C}_2$ passant par C, D et M, il est inutile de reprendre tous les calculs, il suffit de substituer $-b$ à b.

```
> r2c:subst(-b,b,r1c);
```

$$\left(y-\frac{-y^2-x^2+b^2+a^2}{2\left(-y-b\right)}\right)^2+x^2$$

Les points M recherchés doivent vérifier l'égalité des quantités ci-dessus, autrement exprimée à l'aide de MAXIMA de la façon suivante :

```
> (eq:factor(num(radcan(r1c-r2c))),eq=0);
```

$$-b\,y\left(y^2-x^2-b^2+a^2\right)\left(y^2+x^2-b^2-a^2\right)=0$$

Nous trouvons deux sous-ensembles *attendus* : la droite d'équation $y=0$ et le cercle d'équation $x^2+y^2=a^2+b^2$ circonscrit à $ABCD$. Il y en a un d'*imprévu* qui est une hyperbole équilatère, éventuellement dégénérée en deux droites si le rectangle est carré !
Récupérons l'expression définissant l'hyperbole.

```
> h:part(eq,1,3);
```

$$y^2-x^2-b^2+a^2$$

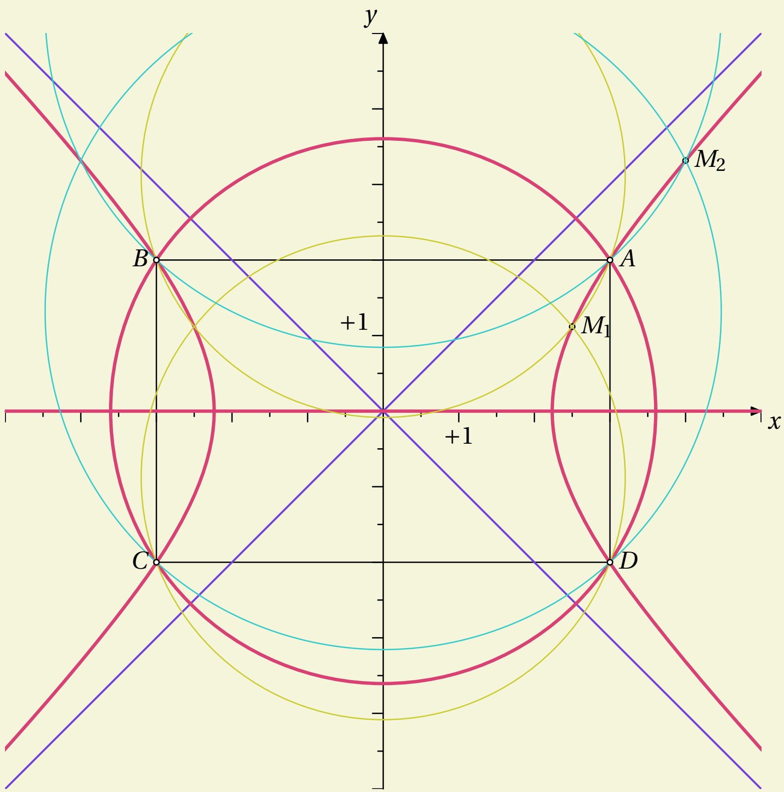
Traitons le cas particulier $a=3$ et $b=2$.

```
> load("reduction.mc")$
> Reduction(ev(h,a=3,b=2));
```

C'est une hyperbole !

$$\frac{X^2}{5}-\frac{Y^2}{5}=1$$

```
> Representation(-5,-5,5,5,1);
```



Il reste maintenant à établir que si M appartient à l'un de ces trois ensembles, la droite, le cercle ou l'hyperbole alors il vérifie la propriété de l'énoncé. On excluera les cas particuliers où M coïncide avec l'un des quatre points A, B, C ou D ; il y a indétermination sur l'un des cercles circonscrits.
Dans le cas des deux premiers ensembles, la propriété est évidente. Pour l'hyperbole, il suffit de considérer que l'on a :

$$x^2 + b^2 = a^2 + y^2$$

Ainsi si $C_1(0, y+b)$ et $C_2(0, y-b)$ alors :

$$C_1M = C_1A = C_1B = C_2M = C_2C = C_2D = \sqrt{x^2+b^2} = \sqrt{a^2+y^2}$$

C_1 et C_2 sont les centres des cercles circonscrits à ABM et CDM, ils ont le même rayon !
On remarquera que dans ce dernier cas $\mathscr{C}_1$ est le *translaté* de $\mathscr{C}_2$ selon le vecteur $(0, 2b)$.