Exercice - étude de fonction

Jean-Michel Sarlat
26 avril 2003

Ce document a été généré par la ***fabrique de Syracuse*** *à partir d'un fichier texte contenant des spécifications de contenu et des commandes d'interfaçage avec* ***Maxima****. Le traitement de ce fichier a donné lieu, dans le même temps que ce document, à la création d'une page* html.
URL : http ://melusine.eu.org/syracuse/maxima/

1 Énoncé

f est la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad f(0) = \ell$$

où ℓ est un réel. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1/ Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0. En déduire ℓ pour que f soit continue en 0. Dans la suite, on donne à ℓ cette valeur.

2/ Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

3/ Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

4/ Préciser la droite asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote. Tracer $\mathcal{C}$.

2 Corrigé

maxima >>

```
(C2) f(x):=(x*cosh(x)-sinh(x))/(cosh(x)-1);
```

(D2)
$$f(x) = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$$

1/ Un rapide *calcul de tête* nous indique que le numérateur et le dénominateur de l'expression $f(x)$ sont d'ordre 3 et 2 en x au voisinage de 0. Pour obtenir un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$ il faut donc anticiper la simplification par x^2 et développer le numérateur et le dénominateur à l'ordre 5. Enfin, si on devait le faire à la main...

```
(C3) taylor(f(x),x,0,3);
```

(D3) $$\frac{2\,x}{3}+\frac{x^3}{90}+\cdots$$

La limite de $f(x)$ est donc 0, il suffit de poser $\ell = 0$ pour que f soit continue en 0.

```
(C4) c:limit(f(x)/x,x,0);
```

(D4) $$\frac{2}{3}$$

2/ f est dérivable en 0 (ce que l'on pouvait déduire du développement précédent) et $f'(0) = \frac{2}{3}$.

```
(C5) taylor(f(x)-c*x,x,0,3);
```

(D5) $$+\frac{x^3}{90}+\cdots$$

La différence $f(x) - \frac{2}{3}x$ est équivalente à $\frac{1}{90}x^3$ au voisinage de 0, la courbe représentative de f traverse donc sa tangente à l'origine, elle passe de dessous au dessus (point d'*inflexion*).

```
(C6) diff(f(x),x);
```

(D6) $$\frac{x\ \mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x-1}-\frac{(x\ \mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x)\ \mathrm{sh}\,x}{(\mathrm{ch}\,x-1)^2}$$

3/ Le signe de la dérivée n'est pas simple à déterminer sous cette forme, on factorise !

```
(C7) factor(%);
```

(D7) $$\frac{\mathrm{sh}\,x\ (\mathrm{sh}\,x-x)}{(\mathrm{ch}\,x-1)^2}$$

Là, les choses sont plus nettes. La quantité dont le signe n'est pas *immédiat* est $\mathrm{sh}(x) - x$, on a toutefois vite fait de se convaincre qu'elle est positive sur $\mathbf{R}_+$, en s'appuyant sur le signe de sa dérivée qui est manifestement positive. La fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$.

```
(C8) a:limit(f(x)/x,x,inf);
```

(D8) $$1$$

```
(C9) b:limit(f(x)-a*x,x,inf);
```

(D9) $$-1$$

4/ Les deux calculs précédents prouvent l'existence d'une droite asymptote à $\mathcal{C}$, son équation est $y = x - 1$.

```
(C10) g(x):=f(x)-a*x-b;
```

(D10) $$g(x) = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} - x + 1$$

```
(C11) exponentialize:true$
```

L'étude de la position de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ peut être faite en recherchant un équivalent de $g(x) = f(x) - x + 1$. Demander, comme cela, un développement de $g(x)$ ne convient pas à **maxima**, c'est pourquoi on passe à l'écriture à l'aide d'exponentielles des fonctions sh et ch.

```
(C12) factor(g(x));
```

(D12) $$\frac{2\,(x\,e^x - e^x + 1)}{(e^x - 1)^2}$$

La factorisation de $g(x)$ *prépare* le développement à suivre.

```
(C13) taylor(%,x,inf,1);
```

(D13) $$+\,(2\,x - 2 + \cdots)\,e^{-x} + \cdots$$

Un équivalent de $g(x)$ au voisinage de $+\infty$ est $2xe^{-x}$ qui est positif. La courbe $\mathcal{C}$ est donc au dessus de son asymptote vers $+\infty$.