Exercice 1

Jean-Michel Sarlat

17 mars 2003

Ce document a été généré par la ***fabrique de Syracuse*** *à partir d'un fichier texte contenant des spécifications de contenu et des commandes d'interfaçage avec* ***Maxima****. Le traitement de ce fichier a donné lieu, dans le même temps que ce document, à la création d'une page* html.
URL : http ://melusine.eu.org/syracuse/maxima/

Première expérience de correction d'un exercice dans la *fabrique* à l'aide de **Maxima**...

1 L'énoncé

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

1/ Montrer que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, nous identifierons g avec ce prolongement.

2/ Après avoir déterminé le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^x - 1$, calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $g(x)$.

3/ Montrer alors qu'il existe 4 réels a, b, c, d tels que, au voisinage de 0 sauf en 0, on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x} + b + cx + dx^2 + o(x^2)$$

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est le *développement limité généralisé* de f, à l'ordre 2, au voisinage de 0 ($\mathrm{DLG}_2(0)$).

4/ Déterminer le $\mathrm{DLG}_2(0)$ de $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$.

2 La correction

Définition de f :

```
(C2) f(x):=1/(exp(x)-1);
```

(D2)
$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

Définition de g :

```
(C4) g(x):=x*f(x);
```

(D4) $$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Calculons la limite de g en 0 :

```
(C6) limit(g(x),x,0);
```

(D6) $$1$$

Cette limite existe donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.
$\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^x - 1$:

```
(C8) taylor(exp(x)-1,x,0,4);
```

(D8) $$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

En substituant le développement précédent à $e^x - 1$ dans l'expression de $g(x)$, on *voit* une simplification possible par x. La quantité qui reste est de la forme $\frac{1}{1+u}$ avec u :

```
(C10) d8/x-1;
```

(D10) $$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \cdots$$

On développe $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3 :

```
(C12) taylor(1/(1+u),u,0,3);
```

(D12) $$1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$$

En subtituant le développement de u à u dans l'expression précédente, on obtient le résultat attendu (que **Maxima** donne directement) :

```
(C14) taylor(g(x),x,0,3);
```

(D14) $$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \cdots$$

En divisant par x on obtient donc le développement généralisé de f en 0 :

```
(C16) d14/x;
```

(D16) $$\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{12} + \cdots$$

Les coefficients a, b, c, d s'obtiennent par lecture ...
Pour finir, la même méthode justifierait le $\mathrm{DLG}_2(0)$ de $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$:

```
(C18) taylor(1/sinh(x),x,0,2);
```

(D18)
$$\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+\cdots$$

Soyons généreux :

```
(C20) taylor(1/(exp(x)-1),x,0,10);
```

(D20)
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{720}+\frac{x^5}{30240}-\frac{x^7}{1209600}+\frac{x^9}{47900160}+\cdots$$

```
(C22) taylor(1/sinh(x),x,0,10);
```

(D22)
$$\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+\frac{7\,x^3}{360}-\frac{31\,x^5}{15120}+\frac{127\,x^7}{604800}-\frac{73\,x^9}{3421440}+\cdots$$