Exercice 2

Jean-Michel Sarlat
17 mars 2003

*Ce document a été généré par la **fabrique de Syracuse** à partir d'un fichier texte contenant des spécifications de contenu et des commandes d'interfaçage avec **Maxima**. Le traitement de ce fichier a donné lieu, dans le même temps que ce document, à la création d'une page* html.
URL : http ://melusine.eu.org/syracuse/maxima/

La correction partielle (seule la partie *calculatoire* est développée) de l'exercice ci-dessous comprend quelques interactions avec **Maxima** et la représentation de fonctions.

1 L'énoncé

1/ Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.
Étudier la continuité et la dérivabilité de g ; en déduire les variations de g.

2/ Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.
Étudier la fonction f ; étudier la position de la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$, par rapport à ses asymptotes, puis construire $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ (unité : 2 cm).

3/ Déduire de l'étude précédente l'existence d'un intervalle I de $\mathbf{R}$, à préciser, tel que f permette de définir une bijection de $\mathbf{R}$ sur I. Vérifier que la bijection réciproque est telle que, pour tout x de I :

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x$$

Tracer la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, représentant f^{-1} dans $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

2 Calculs

```
(C2) radexpand:all;
```

(D2) $$ALL$$

1/ Définition de g, dérivée et limites :

```
(C4) g(x):=-1/2+x/2/sqrt(x^2+1);
```

(D4) $$g\left(x\right)=\frac{x}{2\,\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}$$

```
(C6) radcan(diff(g(x),x));
```

(D6) $$\frac{\sqrt{x^2+1}}{2\,x^4+4\,x^2+2}$$

La dérivée de g est manifestement positive sur $\mathbf{R}$.

```
(C8) limit(g(x),x,minf);
```

(D8) $$-1$$

```
(C10) limit(g(x),x,inf);
```

(D10) $$0$$

g est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$, elle varie de -1 à 0.
2/ Étude de f.

```
(C12) f(x):=-x/2+1+1/2*sqrt(x^2+1);
```

(D12) $$f\,(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}-\frac{x}{2}+1$$

```
(C14) diff(f(x),x);
```

(D14) $$\frac{x}{2\,\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}$$

On constate l'égalité : $f'(x)=g(x)$, f' est donc négative sur $\mathbf{R}$, la fonction f est décroissante sur $\mathbf{R}$.

```
(C16) limit(f(x),x,minf);
```

(D16) $$\infty$$

```
(C18) limit(f(x),x,inf);
```

(D18) $$1$$

f varie décroit donc de $-\infty$ à 1. Nous recherchons maintenant une éventuelle asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

```
(C20) limit(f(x)/x,x,minf);
```

(D20) $$-1$$

```
(C22) limit(f(x)-d20*x,x,minf);
```

(D22) $$1$$

La droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote vers $-\infty$. Pour déterminer la position relative de cette droite par rapport à la courbe, nous calculons la quantité $f(x) + x - 1$:

```
(C24) radcan(f(x)-d20*x-d22);
```

(D24) $$\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{2}$$

Il est assez facile de *voir* que cette quantité est positive. Pour confirmer, nous allons utiliser un développement.
Tout d'abord on se déplace sur un voisinage à droite de 0 :

```
(C26) subst(-1/y,x,d24);
```

(D26) $$\frac{\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}-\frac{1}{y}}{2}$$

On développe ensuite...

```
(C28) taylor(d26,y,0,2);
```

(D28) $$+\frac{y}{4}+\cdots$$

Et on retourne au voisinage de $-\infty$.

```
(C30) subst(-1/x,y,d28);
```

(D30) $$-\frac{1}{4\,x}$$

C'est bien positif au voisinage de $-\infty$!
C_f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$. Compte tenu des variations de f, cette asymptote est située en dessous de la courbe (aucun calcul à faire).
3/ *Réciproque* de f.
On définit h la fonction prétendante donnée par l'énoncé.

```
(C32) h(x):=1/(4*(x-1))+1-x;
```

(D32) $$h(x) = -x + \frac{1}{4\,(x-1)} + 1$$

On compose avec f à droite :

```
(C34) h(f(x));
```

(D34) $$\frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2} - \frac{x}{2}\right)} - \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{x}{2}$$

Et on simplifie :

```
(C36) radcan(d34);
```

(D36) $$x$$

C'est le résultat attendu.
On compose maintenant avec f à gauche (pour vérifier) :

```
(C38) f(h(x));
```

(D38) $$\frac{x - \frac{1}{4\,(x-1)} - 1}{2} + \frac{\sqrt{\left(-x + \frac{1}{4\,(x-1)} + 1\right)^2 + 1}}{2} + 1$$

```
(C40) radcan(d38);
```

(D40) $$x$$

h est bien la réciproque de $f : \mathbf{R} \to]1, +\infty[$.

3 Représentation graphique