BACCALAURÉAT série S novembre 2003

Exercice 1 **(4 points)**
Commun à tous les candidats

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement -1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.
On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.
Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.
À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ le point M de coordonnées $(x,~y,~z)$.
Sur le graphique joint en annexe page 6, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1~;~-1~;~-1)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On note $\mathcal{C}$ le cube ABCDEFGH.

1) Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\dfrac{1}{64}$.

2) On note E_1 l'évènement : « M appartient à l'axe des abscisses ».
Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\dfrac{1}{4}$.

3) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}(1~;~1~;~1)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

b) Tracer en couleur sur le graphique de la page 5, la section du plan $\mathcal{P}$ et du cube $\mathcal{C}$. (On ne demande pas de justification).

c) On note E_2 l'évènement : « M appartient à $\mathcal{P}$ ».
Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?

4) On désigne par $\mathcal{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $\mathrm{O}M \leqslant 1{,}5$).
On note E_3 l'évènement : « M appartient à la boule $\mathcal{B}$ ».
Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.

T.S.V.P.

Exercice 2 (5 points)
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonornial direct $(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ (unité graphique 4 cm).
Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω.

Partie I

On pose $a_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et on note A_0 son image.

1) Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathcal{C}$.

2) Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\mathrm{i}$, et B′ le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.

a) Calculer b'.

b) Démontrer que le triangle OBB′ est rectangle en B′.

Partie II

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.
À tout point M d'affixe z non nulle; on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1) On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle $\mathrm{O}MM'$ soit rectangle en M'.

a) Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.

b) Montrer que $\left(\overrightarrow{M'\mathrm{O}}, \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) + 2k\pi \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z})$.

c) En déduire que le triangle $\mathrm{O}MM'$ est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathcal{C}$ privé de O et de I.

2) Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O.
On note x son affixe.
On choisit a de manière que A soit un point de $\mathcal{C}$ différent de I et de O.
Montrer que le point M' appartient à la droite $(\mathrm{O}A)$.
En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

T.S.V.P.

Exercice 2 (5 points)
Enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Partie A

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.
2) Soit I le point d'affixe 1.
On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O. Sa position initiale est en I.
On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathcal{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).
On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).
Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathcal{C}$ à partir de J.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.
1) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2) On pose :

$S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),

$S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n s_1 \circ S_m$.

a) Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$.

b) f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?

c) On appelle M le point d'affixe 6 et M$'$ son image par f.

Peut-on avoir $\mathrm{OM}' = 240$?

Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique $(m,\ n)$ tel que $\mathrm{OM}' = 576$.

Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right)$.

T.S.V.P.

Problème (11 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Partie A

1) Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

2) Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leqslant e^{x}$.

3) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f sur $[0,\ +\infty[$.

4) On considère les fonctions g et h définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{e^{x}}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2e^{x}}$.

Sur l'annexe de la page 7 sont tracées, dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ les courbes représentatives de g et h, notées respectivement Γ_1 et Γ_2.

a) Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

b) Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, Γ_1, et Γ_2 ?

Tracer Γ sur l'annexe de la page 7, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

1) Justifier l'existence de (I_n), et donner une interprétation géométrique de (I_n).

2) a) Démontrer, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$.

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente et determiner sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $J_n = \displaystyle\int_0^{n} f(x)\,dx$.

1) En utilisant l'encadrement obtenu dans la question **A) 4) a)**, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\left(1 - e^{-n}\right) \leqslant 1 - e^{-n} \leqslant 1.$$

2) Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

En déduire qu'elle converge.

3) On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :

« Si u_n, v_n et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives a, b et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $a \leqslant b \leqslant c$ ».

Donner un encadrement de L.

4) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$.

a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2 + 1}$.

b) Démontrer que, pour tout réel x, f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v\left(\mathrm{e}^x\right)$.

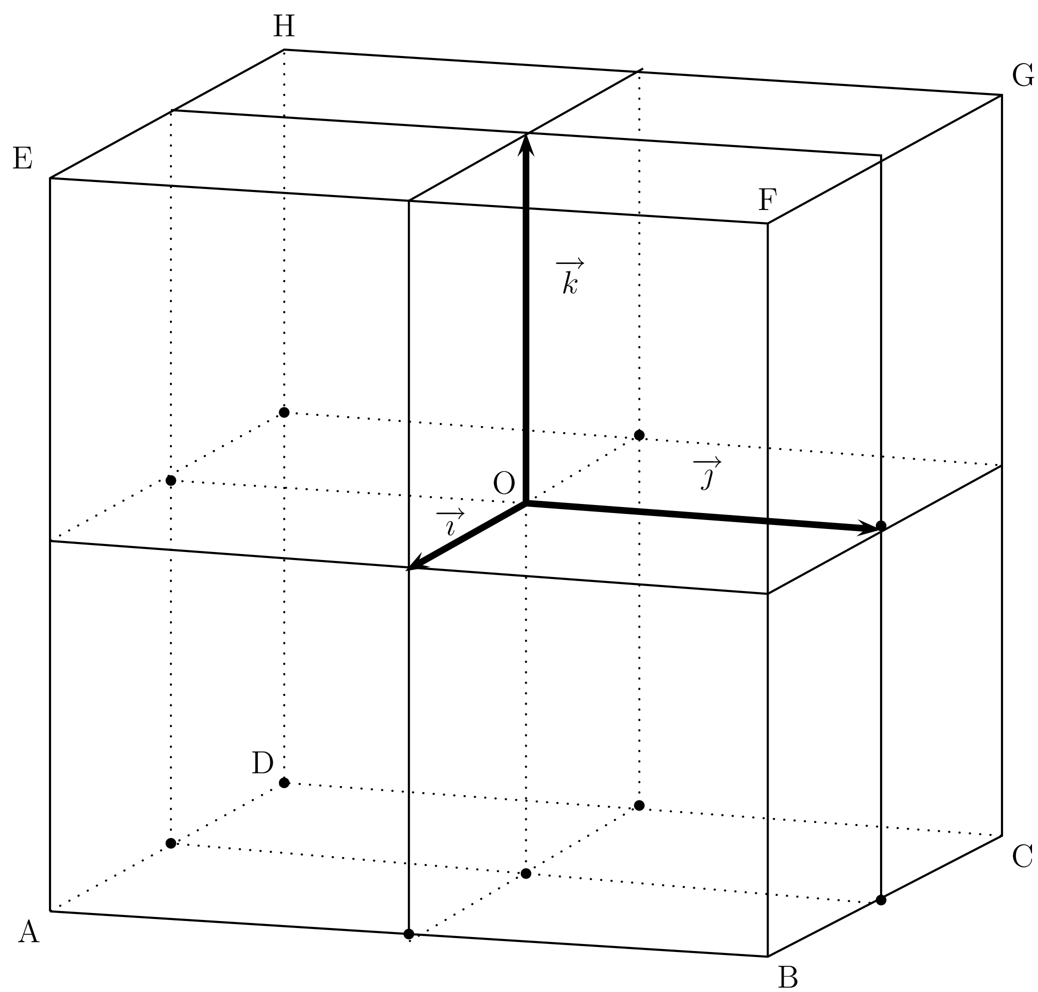
c) En déduire la valeur exacte de L.

[1]

1. Amérique du Sud série S, novembre 2003

Annexe de l'exercice 1

Cette page sera complétée et remise avec la copie



Annexe du problème

Cette page sera complétée et remise avec la copie