Académie de Poitiers

Exercices d'entraînement pour la préparation aux Olympiades de mathématiques du 9 mai 2001

N.B. : Les signes * et ** donnent une indication sur le niveau de la difficulté. Cette estimation ne peut être que personnelle et subjective.

Exercice 1

L'équation $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, a un ensemble de solutions qui est a) infini ? b) vide ? c) réduit à un élément ?

Exercice 2

Observer, continuer, généraliser :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \times & 2 & \times & 3 & \times & 4 & + & 1 & = & 5^2 \\ 2 & \times & 3 & \times & 4 & \times & 5 & + & 1 & = & 11^2 \\ 3 & \times & 4 & \times & 5 & \times & 6 & + & 1 & = & 19^2 \end{array}$$

Existe-t-il une ligne sur laquelle on trouve 2001^2 ?

Exercice 3

Combien existe-t-il de couples (x, y) d'entiers relatifs tels que :

$$|x| + |y| \leqslant 1000 \text{ ?}$$

Exercice 4*

Soit un quadrilatère convexe $ABCD$. La parallèle à (BD) passant par le milieu I de la diagonale $[AC]$ et la parallèle à (AC) passant par le milieu J de la diagonale $[BD]$ se coupent en O.

Démontrer que les 4 segments joignant le point O aux milieux M, N, P, Q des 4 côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ partagent le quadrilatère $ABCD$ en 4 quadrilatères de même aire.

Exercice 5*

Un certain nombre de jetons sont répartis dans $2n+1$ sachets. Supposons que, en retirant l'un quelconque de ces sachets, il soit possible de répartir le reste en deux groupes de n sachets, de telle sorte que chaque groupe contienne le même nombre total de jetons. Démontrer que chaque sachet contient le même nombre de jetons.

Exercice 6

Soit x un entier naturel, on pose $p(x)$ le produit de ses chiffres. Démontrer que 12 est l'unique entier naturel x compris entre 0 et 100 tel que :

$$x^2 - 10x - 22 = p(x)$$

Exercice 7*

On affecte à chaque point du plan une couleur : rouge ou bleu.
Montrer qu'il existe au moins un triangle équilatéral dont les trois sommets sont de la même couleur.

Montrer qu'il existe un rectangle dont les sommets sont de la même couleur.

Exercice 8*

On considère un triangle ABC dont la hauteur issue de C mesure h. Quelle est la valeur maximale atteinte par le produit des hauteurs lorsque C décrit une droite parallèle à la droite (AB) ?

Exercice 9**

(Concours général 1986)

1. u et v étant deux réels, montrer
   $|u| + |v| \leqslant |u+v| + |u-v|$
2. u_1, u_2, u_3, u_4 étant 4 réels, montrer que :

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4| \leqslant |u_1+u_2|+|u_3+u_4|+|u_1+u_3|+|u_2+u_4|+|u_1+u_4|+|u_2+u_3|$$

(En fait, dans l'énoncé original on se plaçait dans C)