Centres Étrangers 2000

EXERCICE 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = -4 - i$.
Soit f la transformation du plan (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

- **a.** Exprimer z' en fonction de z.
- **b.** Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 8$.

Les coordonnées (x', y') de M' sont alors :

$$x' = 3x + 2 \quad \text{et} \quad y' = 3y - 1.$$

- **a.** On appelle G et H les ensembles des valeurs prises par respectivement x' et y'.
Écrire la liste complète des éléments de G et H.
- **b.** Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3
- **c.** Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité.

  On se propose de déterminer tous les couples (x', y') de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.
- **d.** Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?
- **e.** En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est un multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples (x', y') qui conviennent.

  En déduire les couples (x, y) correspondants aux couples (x', y') trouvés.

Corrigé

1.
- **a.** $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe z', $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $z-(1+i)$ et $\overrightarrow{BM}$ a pour affixe $z-(-4-i)$. La relation vectorielle donnée se traduit par $z' = 2(z - 1 - i) + z + 4 + i$. Soit : $z' = 3z + 2 - i$.
- **b.** Soit ω l'affixe du point fixe Ω cherché.
L'équation $\omega = 3\omega + 2 - i$ a pour solution unique $\omega = -1 + \dfrac{1}{2}i$: f admet donc un unique point invariant dont l'affixe est $-1 + \dfrac{1}{2}i$.
La relation $z' = 3z + 2 - i$ s'écrit $z' - \left(-1 + \dfrac{1}{2}i\right) = 3\left(z - \left(-1 + \dfrac{1}{2}i\right)\right)$: elle est du type $z' - \omega = k(z - \omega)$ et caractérise f comme l'homothétie de centre Ω et de rapport 3.

2.
- **a.** $G = \{5\ ;\ 8\ ;\ 11\ ;\ 14\ ;\ 17\ ;\ 20\ ;\ 23\ ;\ 26\}$ et $H = \{2\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 11\ ;\ 14\ ;\ 17\ ;\ 20\ ;\ 23\}$.
- **b.** $x' - y' = 3x + 2 - (3y - 1) = 3(x - y + 1)$: $x' - y'$ est multiple de 3.
- **c.** Un entier est pair ou impair.
Lorque deux entiers sont pairs tous les deux ou impairs tous les deux, leur somme et leur différence sont paires. Lorsque l'un des deux est pair et l'autre impair, leur somme et leur différence sont impaires.
Dans tous les cas, la somme et la différence de deux entiers ont donc même parité.
- **d.** m non nul est le produit des deux entiers non nuls $x' - y'$ et $x' + y'$ de même parité et m est pair : les deux entiers $x' - y'$ et $x' + y'$ sont donc pairs.
De plus, $x' - y'$ est multiple de 3 premier avec 2. Il en résulte que $x' - y'$ est multiple de 6.
$x' - y'$ ne peut être multiple de 30 car la plus grande valeur de cette différence est 24.

e. $x' + y'$ est pair et par hypothèse 5 divise $(x' - y')(x' + y')$. Or 5 ne peut aussi diviser $x' - y'$ qui déjà divisible par 2 et 3 serait alors divisible par 30. Donc 5 divise $x' + y'$. Par suite, $x' + y'$, divisible par 2 et 5 premiers entre eux, est divisible par 10.
On cherche les couples (x', y') tels que $x' - y'$ soit divisible par 6 et $x' + y'$ par 10.
Les couples (x', y') qui conviennent sont : $(x' = 8, y' = 2)$, $(x' = 17, y' = 23)$, $(x' = 23, y' = 17)$.
Les couples (x, y) correspondants sont alors : $(x = 2, y = 1)$, $(x = 5, y = 8)$, $(x = 7, y = 6)$.