EXERCICE 1

1. Le système donné est successivement équivalent aux systèmes :

$$\begin{cases} x = 7y - z - 40 \\ 3(7y - z - 40) - y - z = 20 \\ 7y - z - 40 + y - z = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7y - z - 40 \\ 10y - 2z = 70 \\ 4y - z = 15 \end{cases}$$

Puis aux systèmes :

$$\begin{cases} x = 7y - z - 40 \\ z = 4y - 15 \\ 10y - 2(4y - 15) = 70 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7y - z - 40 \\ z = 4y - 15 \\ 2y = 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 20 \\ z = 65 \\ x = 35 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{S} = \{(35; 20; 65)\}$.

2. **a.** À la fin de la première partie, A et B, qui ont gagné, ont des avoirs doublés qui deviennent respectivement $2x$ et $2y$.
L'avoir de C, qui a perdu, est donc de $z - x - y$.

b. À la fin de la deuxième partie, B et C, qui ont gagné, ont des avoirs doublés qui deviennent respectivement $4y$ et $2(z - x - y)$.
L'avoir de A, qui a perdu, est donc de $2x - 2y - (z - x - y) = 3x - y - z$.

À la fin de la troisième partie, A et C, qui ont gagné, ont des avoirs doublés qui deviennent respectivement $2(3x - y - z)$ et $4(z - x - y)$.
L'avoir de B, qui a perdu, est donc de $4y - (3x - y - z) - 2(z - x - y) = -x + 7y - z$.

c. Les avoirs des trois joueurs sont identiques à la fin de cette troisième partie. On est alors conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 6x - 2y - 2z = 40 \\ -x + 7y - z = 40 \\ 4z - 4x - 4y = 40 \end{cases},$$

système équivalent au système :

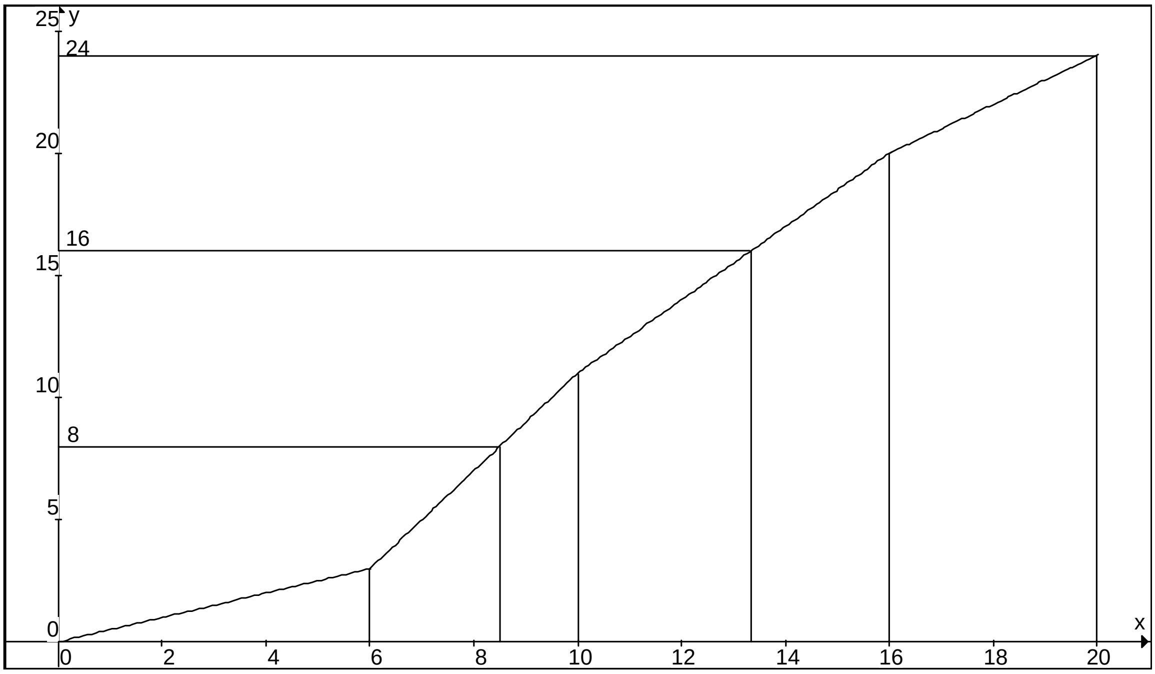
$$\begin{cases} 3x - y - z = 20 \\ -x + 7y - z = 40 \\ x + y - z = -10 \end{cases}$$

qui a été résolu à la première question.
Les avoirs respectifs des joueurs A, B et C au début du jeu sont donc de 35 F, 20 F et 65 F.

EXERCICE 2

1. On note $\mathcal{A}(ABC)$ l'aire du triangle ABC.
Si $M \in [OB]$, soit $0 \leqslant x \leqslant 6$, $f(x) = \mathcal{A}(OMA) = \dfrac{1}{2}x$;
si $M \in [BC]$, soit $6 \leqslant x \leqslant 10$, $f(x) = \mathcal{A}(OAB) + \mathcal{A}(BAM) = 3 + \dfrac{1}{2}(x - 6) \times 4 = 2x - 9$;
si $M \in [CD]$, soit $10 \leqslant x \leqslant 16$, $f(x) = \mathcal{A}(OAB) + \mathcal{A}(BAC) + \mathcal{A}(CAM) = 11 + \dfrac{1}{2}(x - 10) \times 3 = \dfrac{3}{2}x - 4$;
si $M \in [DO]$, soit $16 \leqslant x \leqslant 20$, $f(x) = \mathcal{A}(OBCD) - \mathcal{A}(OAM) = 24 - \dfrac{1}{2}(x - 16) \times 2 = x + 4$.

2. D'où le graphique :



3. L'aire du rectangle est de 24 unités d'aire : l'aire de chacun des domaines cités est donc de 8 unités d'aire.
Soit x_1 l'abscisse de M_1. On cherche $x_1 \in [6; 10]$ tel que $f(x_1) = 8$.
Soit x_2 l'abscisse de M_2. On cherche $x_2 \in [10; 16]$ tel que $\mathcal{A}(M_2AOD) = \mathcal{A}(OBCD) - f(x) = 8$, c'est à dire $f(x_2) = 16$.
Graphiqement on cherche les abscisses des points du graphique d'ordonnées 8 et 16 : on lit $x_1 \approx 8,5$ et $x_2 \approx 13,4$.
Par le calcul :

- on résout $f(x) = 8$ lorsque $x \in [6; 10]$, soit $2x - 9 = 8$. On trouve $x = 8,5$, valeur qui appartient bien à l'intervalle $[6; 10]$.
- on résout $f(x) = 16$ lorsque $x \in [10; 16]$, soit $\dfrac{3}{2}x - 4 = 16$. On trouve $x = \dfrac{40}{3}$, valeur qui appartient bien à l'intervalle $[10; 16]$.

EXERCICE 3

1. a. Par théorème,

- $|x-2| \geqslant 1$ équivaut à $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 3$;
- $|x-2| \leqslant 4$ équivaut à $-2 \leqslant x \leqslant 6$.

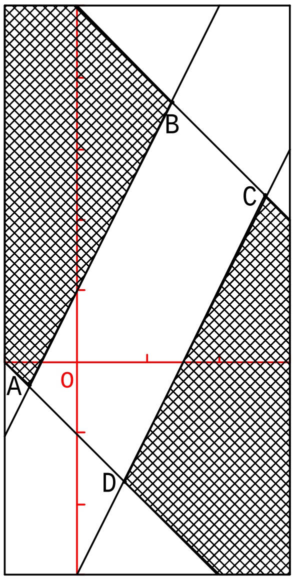
Les deux conditions précédentes seront donc simultanément vérifiées ssi $x \in [-2; 1] \cup [3; 6]$.

b. La double inégalité donnée est équivalente à $|2x+3| \geqslant 2$ et $|2x+3| \leqslant 3$.
Par théorème,

- $|2x+3| \geqslant 2$ équivaut à $(2x \leqslant -5$ ou $2x \geqslant -1)$ équivaut à $\left(x \leqslant -\dfrac{5}{2}\right.$ ou $\left.x \geqslant -\dfrac{1}{2}\right)$;
- $|2x+3| \leqslant 3$ équivaut à $-6 \leqslant 2x \leqslant 0$ équivaut à $-3 \leqslant x \leqslant 0$.

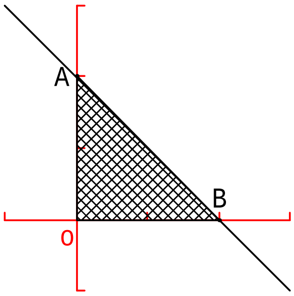
Les deux conditions précédentes seront donc simultanément vérifiées ssi $x \in \left[-3; -\dfrac{5}{2}\right] \cup \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right]$.

2. $|x+y-2| \leqslant 3$ équivaut à $-1 \leqslant x+y \leqslant 5$ équivaut à $(y \geqslant -x-1$ et $y \leqslant -x+5)$.
$|2x-y-1| \geqslant 2$ équivaut à $(2x-y \geqslant -1$ ou $2x-y \leqslant 3)$ équivaut à $(y \leqslant 2x+1$ ou $y \geqslant 2x-3)$.
En désignant par (AD) et (BC) les droites d'équations $y = -x-1$ et $y = -x+5$, par (AB) et (DC) les droites d'équations $y = 2x+1$ et $y = 2x-3$, les points M cherchés sont ceux extérieurs au parallèlogramme $ABCD$ dans la bande limitée par (AD) et (BC). D'où le graphique.



EXERCICE 4

1. Pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $|x| + |y| \leqslant 2$ équivaut à $x + y \leqslant 2$ équivaut à $y \leqslant -x + 2$.
   Les solutions sont les coordonnées des points intérieurs au triangle OAB limité par les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $y = -x + 2$.



2. Autres cas :
   - si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, $|x| + |y| \leqslant 2$ équivaut à $x - y \leqslant 2$ équivaut à $y \geqslant x - 2$ dont les solutions sont les coordonnées des points intérieurs au triangle limité par les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $y = x - 2$;
   - si $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, $|x| + |y| \leqslant 2$ équivaut à $-x - y \leqslant 2$ équivaut à $y \geqslant -x - 2$ dont les solutions sont les coordonnées des points intérieurs au triangle limité par les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $y = -x - 2$;
   - si $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $|x| + |y| \leqslant 2$ équivaut à $-x + y \leqslant 2$ équivaut à $y \leqslant x + 2$ dont les solutions sont les coordonnées des points intérieurs au triangle limité par les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $y = x + 2$.

3. En résumé, les solutions de l'inéquation $|x| + |y| \leqslant 2$ sont les coordonnées des points intérieurs au carré $ABCD$ délimité par les quatre droites d'équations $y = -x + 2$, $y = x - 2$, $y = -x - 2$ et $y = x = 2$. D'où le graphique :