EXERCICE 1

On considère l'équation : $36x - 25y = 5$ pour x et y entiers relatifs.

1. Montrer que pour, pour toute solution (x, y), x est multiple de 5.

2. Déterminer une solution particulière de l'équation, puis la résoudre.

3. Soit d le plus grand commun diviseur de x et y lorsque (x, y) est solution de l'équation.

  a. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

  b. Quelles sont les solutions pour lesquelles x et y sont premiers entre eux ?

EXERCICE 2

a et b étant deux entiers naturels non nuls, soit d leur pgcd et m leur ppcm.
Trouver tous les couples (a, b) vérifiant le système :

$$\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a \geqslant b \end{cases}$$

EXERCICE 3

1. Montrer que si deux nombres entiers x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour les entiers $2x + y$ et $5x + 2y$.

2. Déterminer les entiers naturels non nuls a et b vérifiant :

$$\begin{cases} (2a + b)(5a + 2b) = 1620 \\ ab = 3m \end{cases}$$

où m désigne le ppcm de a et b.

EXERCICE 4

Démontrer que sauf une exception, tout nombre premier p est décomposable d'une seule façon en une différence de deux carrés d'entiers. Exemple : trouver a et b tels que $983 = a^2 - b^2$.

EXERCICE 5

$a,\ b,\ c,\ d$ sont quatre entiers naturels non nuls qui vérifient $ab - cd = 1$.

1. Montrer que cette relation est équivalente à $a(b + d) - d(c + a) = 1$.

2. En déduire que $\dfrac{a}{a+c}$, $\dfrac{d}{b+d}$, $\dfrac{a+c}{b+d}$ sont trois fractions irréductibles.

EXERCICE 6

On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.

1. Démontrer par récurrence que, n désignant un entier strictement positif, on peut écrire :

$$u^n = a_n + b_n\sqrt{3} \text{ et } v^n = a_n - b_n\sqrt{3},$$

où a_n et b_n sont des entiers naturels.
Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Établir les égalités : $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = 1$.

En déduire que les fractions $\dfrac{a_n}{b_n}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ sont irréductibles.

EXERCICE 1

1. $36x = 5(5y+1)$, 5 divise $36x$ et 5 est premier avec 36 donc 5 divise x.
2. Une solution particulière de l'équation est $x = 5$; $y = 7$.
   L'équation est équivalente à : $36(x-5) = 25(y-7)$. Or 25 divise $36(x-5)$, est premier avec 36 donc, d'après le théorème de Gauss, divise $x-5$; de même 36 divise $y-7$. Il existe donc $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = 25k+5$ et $y = 36k'+7$. En reportant dans l'équation $36(x-5) = 25(y-7)$, on en déduit $k = k'$. D'où la solution générale : $x = 25k+5$; $y = 36k+7$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. **a.** d divisant x et y divise donc 5. Donc $d \in \{1\ ;\ 5\}$.

   b. $x = 5(5k+1)$, produit de deux entiers premiers entre eux ; $y = 36k+7 = 7(5k+1)+k$, et comme $5k+1$ et k sont premiers entre eux, il en est de même de y et $5k+1$. Par suite x et y ne peuvent être premiers entre eux que dans le seul cas où y n'est pas multiple de 5.
   Or $y = 5(7k+1)+k+2$ donc $y \equiv k+2 \pmod 5$ et $k+2 \not\equiv 0 \pmod 5$ ssi $k \not\equiv 3 \pmod 5$.
   D'où les solutions lorsque x et y sont premiers entre eux : $x = 25k+5$; $y = 36k+7$, $k \in \mathbb{Z}$ et $k \not\equiv 3 \pmod 5$.

EXERCICE 2

On déduit du système donné $d^2 + d = d(d+1) = 156 = 12 \times 13$. Donc $d = 12$ et $m = 144$.
En posant $\dfrac{a}{12} = a'$ et $\dfrac{b}{12} = b'$, on cherche a' et b' premiers entre eux tels que $a' \geqslant b'$ et $a' \times b' = 12$.
Après calculs on trouve $a' = 12$ et $b' = 1$, ou $a' = 4$ et $b' = 3$. D'où $(a; b) \in \{(144, 12)\ ;\ (48, 36)\}$.

EXERCICE 3

1. Tout diviseur d de $2x+y$ et $5x+2y$ divise $5x+2y-2(2x+y) = x$ et divise donc aussi $2x+y-2x = y$. Si x et y sont premiers entre eux, il en est donc de même de $2x+y$ et $5x+2y$.
2. Soit d le ppcm de a et b. Par hypothèse $d = 3$.
   En posant $\dfrac{a}{3} = a'$ et $\dfrac{b}{3} = b'$, on est ramené à chercher a', b', premiers entre eux, tels que
   $$(2a'+b')(5a'+2b') = 180.$$
   Or les entiers $2a'+b'$ et $5a'+2b'$ sont premiers entre eux et $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.
   Donc $(2a'+b'\ ,\ 5a'+2b') \in \{(1, 180)\ ;\ (4, 45)\ ;\ (5, 36)\ ;\ (9, 20)\ ;\ (20, 9)\ ;\ 36, 5)\ ;\ (45, 4)\ ; (180, 1)\}$.
   Le système d'inconnues a', b'
   $$\begin{cases} 2a'+b' = \alpha \\ 5a'+2b' = \beta \end{cases}$$
   a pour solution $a' = \beta - 2\alpha$; $b' = 5\alpha - 2\beta$. Soit en remplaçant le couple $(\alpha; \beta)$ successivement par chacun des couples de $\{(1, 180)\ ;\ (4, 45)\ ;\ (5, 36)\ ;\ (9, 20)\ ;\ (20, 9)\ ;\ 36, 5)\ ;\ (45, 4)\ ; (180, 1)\}$, on en déduit les seules solutions formées d'entiers naturels : $(6, 15)$; $(15, 6)$.

EXERCICE 4

Cherchons s'il existe des entiers naturels non nuls $|a|$ et $|b|$ tels que $p = |a|^2 - |b|^2$, avec p premier.
$|a|^2 - |b|^2 = (|a|-|b|)(|a|+|b|)$ et $|a|-|b| < |a|+|b|$ donc nécessairement $|a|-|b| = 1$ et $|a|+|b| = p$. Par suite $|a| = \dfrac{p+1}{2}$ et $|b| = \dfrac{p-1}{2}$. La seule exception est donc pour $p = 2$ (seul nombre premier pair).
Dans l'exemple $|a|-|b| = 1$ et $|a|+|b| = 983$, donc $|a| = 492$ et $|b| = 491$ d'où les quatre solutions $(-492, -491)$; $(-492, 491)$; $(492, -491)$; $(492, 491)$.

EXERCICE 5

1. Immédiat en développant et en réduisant l'égalité $a(b+d) - d(c+a) = 1$.
2. Il résulte de la première question qu'il existe des entiers vérifiant $a(b+d) - d(c+a) = 1$ c'est à dire qu'il existe des entiers u et v tels que $au + (c+a)v = 1$: d'après la propriété de Bezout a et $c+a$ sont donc premiers entre eux et $\dfrac{a}{a+c}$ est une fraction irréductible.
   On opère de manière analogue dans les deux autres cas.

EXERCICE 5

1. La propriété est vérifiée pour $n = 1$.
   Soit n un entier supérieur à 1.
   $$\text{Si } u^n = a_n + b_n\sqrt{3} \text{ alors } u^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2a_n + 3b_n + (a_n + 2b_n)\sqrt{3} \quad ,$$
   $$\text{si } v^n = a_n - b_n\sqrt{3} \text{ alors } v^{n+1} = (a_n - b_n\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2a_n + 3b_n - (a_n + 2b_n)\sqrt{3}.$$
   On obtient donc bien des expressions du même type.
   Par suite pour tout $n \geqslant 1$, $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{3}$.
   Il résulte de ce qui précède que $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$.
2. $a_n^2 - 3b_n^2 = u^n \times v^n = (uv)^n = 1$ et $a_n b_{n+1} - a_{n+1}b_n = a_n(a_n + 2b_n) - (2a_n + 3b_n)b_n = a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.
   En raisonnant comme dans l'exercice 5, on en déduit que les fractions données sont irréductibles.