ANNALES DE MATHEMATIQUES

TERMINALE S

LYCEE LOUIS ARMAND

Année scolaire 1999/2000

Table des matières

A

Sujets du baccalauréat

A.1 Remplacement 1999

EXERCICE 1 (*4 points*)

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante :
On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche.
Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.
Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'événement : aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées et B l'événement : le jeton est tombé sur la face blanche.
   a) Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \overline{B})$, puis $P(E_0)$.
   b) On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?
2. On appelle E_1 l'événement : une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées et B l'événement : le jeton est tombé sur la face blanche.
   a) Calculer la probabilité de l'événement E_1.
   b) On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois une et une seule boule blanche ?

EXERCICE 2 (*5 points*)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On note Z_M l'affixe du point M.
Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe $4i$.

1. Soit θ un réel de $[0,\ 2\pi[$ et r un réel strictement positif.
   On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant $(\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}$.
   Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?
2. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure :
$$\theta = \frac{5\pi}{6} \text{ et } r = 3.$$
3. On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BE]$, $[EF]$, $[FA]$.
   a) Prouver que $PQRS$ est un parallèlogramme.
   b) On pose : $Z = \dfrac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_P}$.
   Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que $PQRS$ est un carré.
4. a) Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.
   b) Quelle est, en fonction dr r et θ, l'aire du carré $PQRS$?
   c) r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ?
   Quelle est alors l'affixe de E ?

PROBLÈME (*11 points*)

Soit f la fonction définie sur $]0,\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal $\left(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie I

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x.
   Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\ln x\ (2 - \ln x)$.
   Déterminer le sens de variation de f sur $]0,\ +\infty[$.
3. Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f dans $\left(O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.
4. On pose pour $p \geqslant 1$, $I_p = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}dx$.
   a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I_1 = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}dx$.
   b) Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 :
$$I_{p+1} = -\frac{2^{\,p+1}}{e^2} + (p+1)\, I_p$$

c) En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2, I_3, I_4.

d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathcal{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de $\mathcal{C}$, d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$.
Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

Partie II

Soit a un réel strictement positif et A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a. Soit T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point A.

1. Écrire une équation de T_a.
2. Déterminer les réels a pour lesquels T_a passe par l'origine O du repère.
3. Donner une équation de chacune des tangentes à $\mathcal{C}$, passant par O. Tracer ces tangentes sur la figure.

Partie III

On étudie maintenant l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{e^2}x$.

1. On pose pour x strictement positif, $\varphi_1(x) = x - e\ln x$.
   Montrer que φ_1 est strictement croissante sur $]e, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, e[$.
2. On pose pour x strictement positif, $\varphi_2(x) = x + e\ln x$.

   a) Étudier le sens de variation de φ_2 sur $]0, +\infty[$.

   b) Prouver que $\varphi_2(x) = 0$ a une solution unique sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. On appelle α cette solution ; donner un encadrement de α, d'amplitude 10^{-1}.

   c) En déduire que $\varphi_2(x) = 0$ a une seule solution sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ.

A.2 Sujet national 1999

EXERCICE 1 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes. On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m, d'affixe z, associe le point M d'affixe

$$\frac{1}{2}z^2 - z$$

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe Γ décrite par M lorsque m décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

Soit t un réel de $[-\pi, \pi]$ et m le point de $\mathcal{C}$ d'affixe $z = e^{it}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}$$
Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe Γ.
2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part. En déduire que Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t) = \sin t\,(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de x sur $[0, \pi]$.
4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Étudier les variations de y sur $[0, \pi]$.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0, \pi]$.
6. Placer les points de Γ correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à Γ est horizontale). Tracer la partie de Γ obtenue lorsque t décrit $[0, \pi]$ puis tracer Γ complètement.

EXERCICE 2 (*5 points*)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}}\,dt$$

1. (a) Soit φ la fonction définie sur $[0, 2]$ par
$$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$$
Étudier les variations de φ sur $[0, 2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0, 2]$,
$$\frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}$$
(b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0, 2]$, on a :
$$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t)\, e^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$$
(c) Par intégration en déduire que :
$$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$$
(d) On rappelle que
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$
Montrer que, si (u_n) possède une limite L, alors
$$3 \leqslant L \leqslant \frac{7}{2}$$

2. (a) Vérifier que pour tout t dans $[0,2]$, on a

$$\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$$

En déduire l'intégrale

$$I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$$

(b) Montrer que, pour tout t dans $[0,2]$, on a

$$1 \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant e^{\frac{2}{n}}$$

En déduire que

$$I \leqslant u_n \leqslant e^{\frac{2}{n}} I$$

(c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.

PROBLEME (*10 points)*

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$: on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A : Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative C.

On considère la fonction f, définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u(x) = \ln x + x - 3$$

(a) Étudier les variations de u.

(b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2,3]$. Montrer que $2,20 < \alpha < 2,21$.

(c) Étudier le signe de $u(x)$ sur $]0,+\infty[$.

4. (a) Étudier les variations de f.

(b) Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en α. Montrer que

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.

5. (a) Étudier le signe de $f(x)$.
   (b) Tracer $\mathcal{C}$.

Partie B : Étude d'une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Soit F la primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$. On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. (a) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0, +\infty[$.
   (b) Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2. *Calcu1 de* $F(x)$.
   (a) x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale
   $$\int_1^x \ln t \, dt$$
   (on pourra faire une intégration par parties).
   (b) Montrer que, pour tout x strictement positif :
   $$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$$
   (c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. (a) Montrer que $\lim_{x \to 0} (x \ln x) = 0$. En déduire la limite de F en 0.
   (b) Montrer que, pour x strictement supérieur à 1,
   $$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3$$
   En déduire la limite de F en $+\infty$
   (c) Dresser le tableau de variation de F.
   (d) Tracer Γ sur le même graphique que $\mathcal{C}$.
4. *Calcul d'une aire.*
   Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

A.3 Guadeloupe 1999

EXERCICE 1 (4 points)

Lors d'un examen , un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) est utilisé.
On s'intéresse à cinq questions de ce Q.C.M.**supposées indépendantes**.A chaque question sont associées quatre affirmations , numérotées 1,2,3 et 4, dont une seule est exacte. Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte ; sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.
Dans cet exercice , les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

1. Un candidat répond à chaque question au hasard , c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.

   (a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : "Le candidat répond correctement à la première des cinq questions" ;
   B : "Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur cinq".

   (b) On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note -1 à toute réponse incorrecte.
   Calculer la probabilité de l'évènement C : "Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions".

2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions.
   Quelle est la probabilité de l'évènement C décrit au **1.b** ?

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 1 et , pour tout θ appartenant à $[0;2\pi[$, le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1. Á partir du point M ,donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O ,A , M, Q et P seront placés sur une même figure.
2. Déterminer l'ensemble des points P pour θ appartenant à $[0, 2\pi[$.
   Tracer cet ensemble sur la figure précédente .

3. Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$, où z désigne toujours l'affixe du point M . Construire S , en justifiant la construction.

4. Dans le cas où S est différent de O , Tracer la droite (OS).
   Quelle conjecture apparaît , relativement au point M ?
   Démontrer que le nombre
   $$\frac{1 + z + z^2}{z}$$
   est un réel , quel que soit θ appartenant à $[0, 2\pi[$.
   Conclure sur la conjecture précédente.

PROBLEME (11 points)

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et de calculer l'aire d'un domaine plan.

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$$

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.
2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0,72; -0,71]$.
3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $]-1, +\infty[$.

PARTIE B
Soit g la fonction définie sur l'ensemble $]-1; 0[\cup]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

1. *Etude de* g *aux bornes de son ensemble de définition.*
   (a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
   (b) Calculer $\lim_{x\to-1} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
2. *Sens de variation de* g.
   (a) Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.
   (b) Montrer que

   $$g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

   En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$.
3. *Tableau de variation et représentation graphique de* g.
   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   (b) Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).
4. *Calcul d'aire*
   Soit a un réel strictement supérieur à 0. On pose :

   $$I(a) = \int_1^a g(x)\ dx$$

   (a) Donner, suivant les valeurs de a, une interprétation géométrique du réel $I(a)$.
   (b) En remarquant que, pour x appartenant à $]0, +\infty[$:

   $$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

   calculer $I(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.
   (c) Calculer $\lim_{a\to+\infty} I(a)$ et $\lim_{a\to0} I(a)$.

A.4 Polynésie 1999

EXERCICE 1 (5 points)

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.
On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux événements suivants :
A : <<On obtient des boules des deux couleurs >> ;
B : <<On obtient au plus une blanche >>.

1. (a) Calculer la probabilité de l'évènement :
   <<Toutes les boules tirées sont de la même couleur >>.
   (b) Calculer la probabilité de l'évènement :
   <<On obtient exactement une boule blanche >>.
   (c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :
   $$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \qquad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \qquad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$
2. Montrer que : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si :
   $$2^{n-1} = n + 1$$
3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à deux par :
   $$u_n = 2^{n-1} - (n+1)$$
   Calculer u_2, u_3, u_4.
   Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

EXERCICE 2 (4 points)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $$z^3 - 8 = 0$$
2. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :
   $$z_A = -1 + i\sqrt{3} \qquad z_B = 2 \qquad z_C = -1 - i\sqrt{3}$$
   (a) Ecrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique.
   (b) Placer les points A, B et C.
   (c) Déterminer la nature du triangle ABC.
3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}} z$.

(a) Caractériser géométriquement l'application f.

(b) Déterminer les images des points A et C par f.
En déduire l'image de la droite (AC) par f.

PROBLEME (11 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{2x-2}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On prendra 5 cm comme unité.

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   (b) Vérifier que pour tout réel x non nul :

   $$f(x) = x\left[1 - 2e^{-2} \times \left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$$

   Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer f'. Etudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.

3. Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x$ est asymptote à la courbe (C).
Etudier la position relative de (C) et de (D).

4. On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1.
Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).

5. (a) On note I l'intervalle $[0; 0,5]$.
Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a.

   (b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de a.

6. Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T).

Partie B

Détermination d'une valeur approchée de a

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (u_n) par :
$u_o = 0$ et $u_{n+1} = e^{2u_n-2}$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x-2}$
Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ est équivalente à : $g(x) = x$.
En déduire $g(a)$.

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I on a :

$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{e}$$

3. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à I.

4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - a|$$

5. Démontrer, par récurrence que :

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

6. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
7. Déterminer un entier naturel p tel que : $|u_p - a| < 10^{-5}$.
8. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près : on expliquera l'algorithme utilisé sur la calculatrice.

A.5 Asie 1999

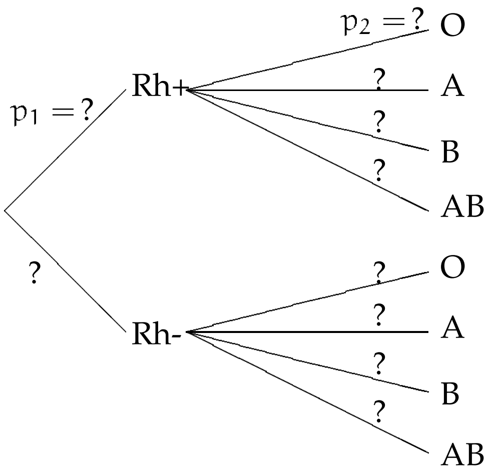
EXERCICE 1 (4 points)

Voici le tableau des principaux groupes sanguins des habitants de la France :

	O	A	B	AB
Rhésus +	35,0 %	38,1 %	6,2 %	2,8 %
Rhésus -	9,0 %	7,2 %	1,2 %	0,5 %

Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu, arrondis à 3 décimales.

1. L'objectif de cette question est de compléter à l'aide de données de ce tableau l'arbre suivant, à recopier sur la copie.



L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).
On note Rh+ l'évènement " la personne a le facteur Rh+ "
On note O l'évènement " la personne appartient au groupe O "

(a) Déterminer la probabilité p_1, c'est à dire $p\,(\text{Rh}+)$. On détaillera le calcul effectué puis on reportera ce résultat dans l'arbre.
Déterminer de même la probabilité p_2 (en détaillant les calculs).

(b) Compléter le reste de l'arbre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante (il est inutile de détailler les nouveaux calculs).

2. (a) Comment peut-on, à partir de l'arbre complété, déterminer la probabilité de O ?
Vérifier ce résultat à l'aide du tableau.

(b) Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

3. (a) On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).
Calculer, en fonction de n, la probabilité p pour qu'il y ait, parmi elles, au moins une personne du groupe O.

(b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a $p \geqslant 0,999$.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Pour tout nombre complexe Z, on pose $P\,(Z) = Z^4 - 1$.

(a) Factoriser $P\,(Z)$.

(b) En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P\,(Z) = 0$, d'inconnue Z.

(c) Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

2. (a) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (l'unité graphique est 5 cm).
Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2 \quad b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

(b) Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.
Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}$$

En déduire le rapport $\dfrac{CA}{CD}$.
Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

PROBLEME (11 points)

PARTIE A

■ *Résolution de l'équation différentielle* $(E) : y' + y = x - 1$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_1^x e^t (t-1)\ dt$$

2. (a) Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On pose $f(x) = z(x)\, e^{-x}$. Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = e^x (x-1)$.
   (b) A l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = e^x (x-1)$.
3. (a) Déduire de la question précédente les solutions de (E).
   (b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

PARTIE B

■ *Etude d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm). On désigne par (C_f) la courbe représentative de f.

1. (a) Etudier le sens de variation de f.
   (b) Préciser $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que la droite (D), d'équation $y = x - 2$, est asymptote à la courbe (C_f).
   (b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D).
3. Tracer (D) et (C_f).

PARTIE C

■ *Calcul d'aires*

Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

1. On considère le domaine limité par la courbe (C_f), son asymptote (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$.
   Exprimer, à l'aide de x_0, l'aire S_1 de ce domaine.
2. On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{1-x}$.
   (a) Etudier rapidement g, puis tracer sa courbe représentative (C_g).
   (b) Donner une interprétation, en terme d'aire, de l'intégrale ayant servie au calcul de S_1 à l'aide de la courbe (C_g).
3. A est le point de coordonnées $(x_0, 0)$.
   B est le point de la courbe (C_g) d'abscisse x_0.
   Soit (T) la tangente à la courbe (C_g) au point d'abscisse x_0.
   C est le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses.
   Déterminer les coordonnées de C.
4. Calculer (en unités d'aire) l'aire S_2 du triangle ABC. Vérifier que $S_1 + 2S_2 = 0$.

A.6 Amérique 1999

EXERCICE 1 (4 points)

I- Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.

On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
3. Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?
4. Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

II- On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons. (n étant un entier inférieur ou égal à 100).

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2. Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à 0,95.

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, l'unité graphique étant 4 cm.
On considère les points A_0, A_1 d'affixes respectives :

$$a_0 = 1 \quad a_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

1. (a) Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
   (b) Soit I le milieu du segment $[A_0A_2]$. Calculer l'affixe du point I.
   (c) Faire une figure.
2. (a) Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.
   (b) Ecrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.
   (c) Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que

$$\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

PROBLEME (11 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

On désigne par Γ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité graphique étant 2 cm.

PARTIE I

1. (a) Soit $X = \frac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité :

$$\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2}X^2e^X$$

En déduire la limite de f quand x tend vers 1.

(b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

(c) En déduire une asymptote à la courbe Γ.

2. (a) Soit v la fonction numérique définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$v(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

calculer $v'(x)$.

(b) Démontrer que

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

3. Etudier les variations de f.
4. Tracer la courbe Γ.

PARTIE II

1. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty, 1[$.
2. Soit α réel tel que $0 < \alpha < 1$, déterminer :

$$g(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$$

3. Quelle est la limite de $g(\alpha)$ quand α tend vers 1.
4. Quelle est l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = -\alpha$ et $x = \alpha$.

PARTIE III

1. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ a deux solutions dont l'une est -1. On notera β l'autre solution.

(b) Donner un encadrement de largeur 10^{-2} de β.

2. Soit a un élément de $]-\infty, 1[$. Déterminer graphiquement, en fonction de a, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$.

A.7 Pondichéry 1999

EXERCICE 1 (5 points)

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
   On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2. (a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.
   (b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point A d'affixe $z_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Déterminer l'affixe du point M_3, image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.
   (b) Déterminer l'affixe du point M_4, image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   (c) Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3, et M_4.
   (d) Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z1}$.
   (e) Soient I le milieu du segment $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

EXERCICE 2 (4 points)

On considère un triangle ABC du plan.

1. (a) Déterminer et construire le point G, barycentre de $[(A;1);(B;-1);(C;1)]$.
   (b) Déterminer et construire le point G′, barycentre de $[(A;1);(B;5);(C;-2)]$.
2. (a) Soit J le milieu de [AB].
   Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG′) et (AB).
   (b) Montrer que le barycentre I de [(B ; 2) ; (C ; -1)] appartient à (GG′).
3. Soit D un point quelconque du plan.
   Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [OA].
   (a) Déterminer trois réels a, d, et c tels que K soit barycentre de
   $$[(A;a);(D;d);(C;c)]$$
   (b) Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de [(A ;a') ; (C ; c')].

PROBLEME (11 points)

Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{x^2}$.

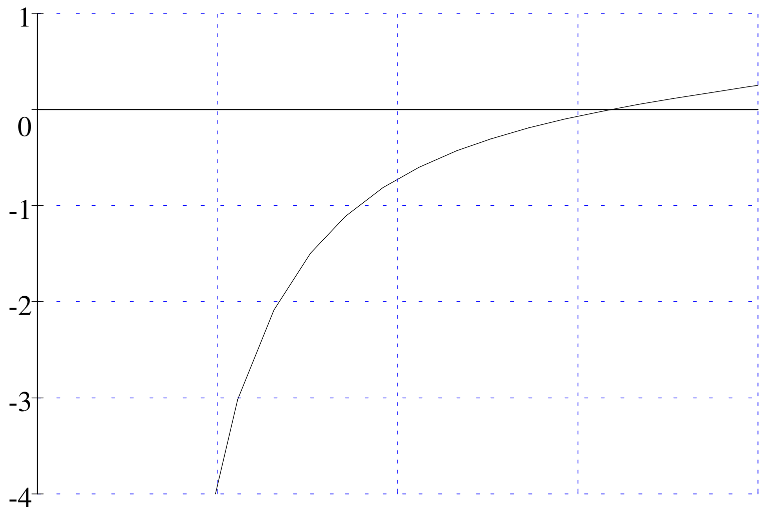
Partie A

• Recherche graphique d'un extremum

L'observation de la courbe représentative de la fonction f sur l'écran graphique d'une calculatrice donne à penser que f admet un minimum sur l'intervalle [0,5 ; 2].

On se propose d'en donner une valeur approchée.

Observer ci-dessous la représentation graphique de la fonction f', dérivée de f, sur l'intervalle [0,5 ; 2].



Quels sont les éléments graphiques concernant f' qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de f sur [0,5 ; 2].

A l'aide de ce graphique donner un encadrement d'amplitude 0,2 de l'abscisse de ce minimum.

Partie B

• Étude de la fonction F

On considère la fonction h définie sur [0 ;+∞[par $h(x) = xe^x - 2x^x + 2$.

1. Déterminer les variations de h (on précisera $h(0)$ mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $h\left(\frac{3}{2}\right)$.
   En déduire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ tel que $h(a) = 0$.
   En déduire le signe de h sur [0 ;+∞[.
3. **Étude de la fonction f**
   (a) Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle]0 ; ∞[.
   (b) Montrer que, pour tout nombre x, strictement positif,
   $$f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}.$$
   En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

(c) Montrer que

$$f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}$$

et en déduire le signe de $f(a)$.

Partie C

• Recherche d'un encadrement du nombre a

1. Démontrer que, sur $[0\,;+\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ équivaut à $2(1 - e^{-x}) = x$
2. Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2(1 - e^{-x})$. On pose $I = \left[\frac{3}{2};2\right]$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Soit la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, x_n appartient à I.

(a) Démontrer que, pout tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$|x_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - a|$$

$$\text{et} \qquad |x_n - a| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

En déduire que la suite (x_n) converge vers a.

(b) Déterminer un entier p tel que x_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel a. Donner une valeur approchée de x_p avec trois décimales.

Partie D

• Quelques propriétés d'une primitive de f

On appelle F la primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.
Ainsi l'on a, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1. Étudier le sens de variation de F sur $]0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que, pour tout x supérieur ou égal à 2,

$$\int_2^x f(2)dt \leqslant \int_2^x f(t)dt$$

Par comparaison de limites, et en utilisant la relation de Chasles, en déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

A.8 Centres étrangers 1999

EXERCICE 1 (5 points)

1. Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2.
   Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.
   On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne.
   (Les choix sont supposés équiprobables)
   (a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
   (b) On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?
2. On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne.
   Les tirages sont supposés équiprobables.
   (a) Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques ?
   (b) Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage , associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.
   Déterminer la loi de probabilité de S.
   (c) Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ euros de Dominique.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.
   Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est à dire pour que $E(X)$ soit égale à 0).

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, A, A', B, B' sont les points d'affixes respectives $1, -1, i, -i$.
A tout point M d'affixe z, distinct des points O, A, A',B, B', on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 , tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles isocèles, avec :

$$(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$$

On fera une figure.

1. (a) Justifier les égalités :
   $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$
   (b) Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :
   $z_1 = \dfrac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \dfrac{1-i}{2}(z+i)$
2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

(a) Montrer que : $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z+1| = |z+i|$.
En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer (Δ) sur la figure.

(b) Montrer que : $OM_1 = M_1M_2$ équivaut à : $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

(c) En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels : $OM_1 = M_1M_2$.
On pourra montrer que : $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$.
Tracer (Γ) sur la figure.

(d) En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

PROBLEME (10 points)

Le but du problème est l'étude d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et d'une primitive de f.

Première partie

• Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$.

1. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et, en détaillant les calculs effectués, montrer que

$$g'(x) = 2x - 2x\ln(x^2+1)$$

2. Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α, dans l'intervalle $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^2-1}]$, tel que $g(\alpha) = 0$; donner l'approximation décimale à 10^{-2} près par défaut de α.
4. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Deuxième partie

• Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ lorsque } x \neq 0$$

Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.
En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

1. (a) Vérifier que, pour x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$$

Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. (a) Montrer que, pour $x \geqslant 1$, $\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln(2x^2)}{x}$.

(b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Troisième partie

• **Étude d'une primitive de f**

On note F la primitive de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui s'annule pour $x = 1$.
On rappelle que $F(x) = \int_1^x f(t)dt$: (on ne cherchera pas à calculer F(x).

1. (a) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \geqslant \frac{2\ln(x)}{x}$.
   (b) Calculer $\int_1^x \frac{2\ln(t)}{t}dt$ pour $x \geqslant 1$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de F.
3. Montrer que $f(1) < F(2) < f(\alpha)$ et en déduire un encadrement de F(2). (On prendra $f(\alpha) \approx 0,8$).
4. On note I le point de coordonnées (1 ; 0), A le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées (1 ; ln 2) et B le point de coordonnées (ln 2 ; ln 2).
   (a) Vérifier que B appartient à la tangente à $(\mathcal{C})$ en O.
   (b) Placer les points I, A et B sur une figure et tracer les segments [OA], [OB], [BA] et [AI].
   (c) On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle [0 ; 1], la courbe $(\mathcal{C})$ est située au-dessus de [OA] et au dessous de [OB] et de [BA].
   Déterminer un encadrement de F(0), d'amplitude inférieure à 2.10^{-1}.
5. Tracer la représentation graphique (Γ) de F en exploitant au maximum les résultats précédents ; on précisera notamment la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur. (Unité graphique : 2 cm).

A.9 Polynésie 1998

EXERCICE 1 (5 points)

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et deux boules noires. On tire au hasard une boule de l'urne A :

• si elle est noire, on la place dans l'urne B,

• sinon, on l'écarte du jeu.

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B. On considère les événements suivants :

R_1 : << La boule tirée de A est rouge >>

N_1 : << La boule tirée de A est noire >>

R_2 : << La boule tirée de B est rouge >>

N_2 : << La boule tirée de B est noire >>

1. (a) Calculer les probabilités des événements R_1 et N_1.
   (b) Calculer les probabilités des événements << R_2 sachant R_1 >> et << R_2 sachant N_1 >>. En déduire que la probabilité de R_2 est de $\frac{27}{50}$.
   (c) Calculer la probabilité de N_2.
2. On répète n fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de A, suivie du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes.

Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm). On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3+2i$.
On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$$

1. Calculer les affixes des points O′ et B′, images respectives des points O et B par f. Placer les points A, O′, B et B′ dans le plan.
2. (a) Calculer, pour tout complexe z différent de 1, le produit

$$(z'-1)(z-1)$$

   (b) En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$AM \times AM' = 2 \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

3. Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M′ appartient à un cercle (C′). En préciser le centre et le rayon. Construire (C) et (C′).
4. (a) Déterminer l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.
   (b) Démontrer que, si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A, passant par B, alors M′ appartient à une demi-droite que l'on précisera.
5. On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (d). Placer son image P′ sur la figure.

PROBLEME (10 points)

Partie A : Étude d'une fonction f et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. (a) f' et f'' désignant respectivement les dérivées première et seconde de f, calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Etudier le sens de variation de la dérivée f'.
   (c) Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.
   (d) Calculer la limite de f en $+\infty$.

(e) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. (a) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ et préciser la position relative de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C})$.

   (b) La courbe $(\mathcal{C})$ admet en un point A une tangente parallèle à la droite $(\mathcal{D})$. Déterminer les coordonnées de A.

3. Démontrer que l'équation de $f(x) = 2$ admet sur $[0,+\infty[$ une unique solution notée α , puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

4. (a) Construire la droite $(\mathcal{D})$, le point A défini au **2.(b)**, la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente en A à la courbe $(\mathcal{C})$.

   (b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Partie C : Recherche d'une approximation décimale de α

1. Démontrer que, sur $[0,+\infty[$, l'équation : $f(x) = 2$ équivaut à l'équation :

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = x$$

2. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle $[0 , 1]$ par :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

   (a) Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0 , 1]$ et réaliser le tableau de variations de la fonction h.

   (b) En déduire que, pour tout réel x de $[0 , 1]$, $h(x)$ appartient à $[0 , 1]$.

   (c) Calculer $h''(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0 , 1]$; étudier le sens de variations de h'.

   (d) En déduire que, pour tout réel x de $[0 , 1]$,

$$0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{4}$$

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

pour tout entier naturel n.

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0 , 1]$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

   puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

   (d) Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et, à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de u_p à 10^{-6} près. Que peut-on en déduire pour α ?

A.10 Pondichéry 1998

EXERCICE 1 (4 points)

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires.
On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.

a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?

b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?

c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?

d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.
On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On considère les événements suivants :
R : << Les boules tirées sont rouges >> ;
D : <<Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur >> ;
B : <<La boule tirée dans l'urne U_2 est rouge >>.

a. Calculer la probabilité de l'évènement R.

b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?

c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$ de l'évènement B sachant que l'évènement D est réalisé.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère le polynôme $P(z) = z^4+17z^2-28z+260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Placer dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2+4i$, $n = -2-4i$, $p = 2+3i$ et $q = 2-3i$.

4. **a.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m} = i$. Placer son image K.

b. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

5. **a.** Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.

b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.

c. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

PROBLEME (11 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; unité graphique : 4 cm.

Partie A

⋆ **Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0\,;\,+\infty[$.
   On note α cette solution.

   b. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

⋆ **Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$**

1. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.
3. **a.** Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

   b. En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. **a.** Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)\,u(x)}{xe^x + 1} \quad \text{avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$

   b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

   c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (T).
6. Tracer $\mathcal{C}$ et (T).

Partie C

⋆ **Calcul d'aire et étude d'une suite**

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;+\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question **B.2.**
2. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   Calculer, en cm^2, l'aire A du domaine $\mathcal{D}$.
   Donner une valeur décimale au mm^2 près de l'aire A.
3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

   a. Calculer v_0, v_1 et v_2.
   On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0, v_1 et v_2.

   b. Interpréter graphiquement v_n.

   c. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n)$$

   En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n = 1$.

   d. Déterminer la limite de la suite (v_n).

A.11 Amérique du Nord 1998

EXERCICE 1 (5 points)

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1. Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.
   (a) On suppose ici $n = 10$. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3.
   Calculer la probabilité, notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.
2. Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.
   (a) On suppose ici $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux billets choisis.
   Déterminer la loi de probabilité de Y.

(b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3.
Calculer la probabilité, notée q_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

3. (a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}.$$

(b) En remarquant que pour tout entier n, $n-2$ est inférieur à $n-1$, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on ait

$$p_n - q_n < 10^{-3}$$

(c) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 4 cm), on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Pour chaque point M du plan, d'affixe z, M_1 d'affixe z_1 désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M′ d'affixe z' l'image de M_1 par la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.
Enfin, on note T la transformation qui à chaque point M associe le point M′.

1. (a) Démontrer : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.

   (b) Déterminer l'image du point B.

   (c) Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels.

   (a) Pour z non nul, calculer la partie réelle du quotient $\frac{z'}{z}$ en fonction de x et de y.

   (b) Démontrer que l'ensemble (E), des points M du plan tels que le triangle OMM′ soit rectangle en O, est un cercle (C), dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points.
   Tracer (E).

3. Dans cette question on pose $z = 1 + i$.

   (a) Vérifier que M appartient à (E). Placer M et M′ sur la figure.

   (b) Calculer le module de z'.

   (c) Calculer l'aire, en cm^2, du triangle OMM′.

PROBLEME (10 points)

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n\ln(x)}{x^2}$$

PARTIE A
I : Etude des fonctions f_n

1. Calculer $f'_n(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur et $n - 2 - 2n\ln(x)$.
2. Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$. Etudier le signe de $f'_n(x)$
3. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$
4. Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II : Représentation graphique de quelques fonctions f_n
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 5 cm). On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1. Tracer (C_2) et (C_3) .
2. (a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?
   (b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3) .

PARTIE B
Calculs d'aires

1. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale :

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
3. On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C_n) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 1$ et $x = e$.
   (a) Calculer A_2.
   (b) Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

PARTIE C
Etude sur l'intervalle $]1; +\infty[$ **de l'équation** $f_n(x) = 1$.
Dans toute la suite, on prendra $n \geqslant 3$.

1. (a) Vérifier que, pour tout n,

$$e^{\frac{n-2}{2n}} > 1 \text{ et } f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$$

   (b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1; e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty\right[$ exactement une solution notée α_n.
3. On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n).
   (a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geqslant 1$.
   (b) En déduire que, pour $n \geqslant 8$, on a $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).

A.12 Sujet expérimental 1998

Première partie avec calculatrice
Problème (11 points)

Avertissement : l'usage d'une calculatrice n'est pas nécessaire pour traiter la partie C.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = x \ln x - 2 \ln x - (\ln x)^2$$

on note f' sa fonction dérivée et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x$.
Dans un repère orthogonal donné, on appelle Γ la représentation graphique de f, Γ' la représentation graphique de f', et Δ celle de g.

Voir figure 1 ces trois courbes sur l'écran d'une calculatrice pour x compris entre 0 et 5.

A - Etude de f

1. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.
2. Montrer que
$$f'(x) = (1 - \frac{2}{x})(1 + \ln x)$$
3. En déduire le sens de variation de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
   Donner un encadrement de longueur 10^{-2} pour les deux solutions non entières.

B - Intersection des représentations graphiques de f **et de** g

1. Reproduire sur la copie et compléter le tableau des valeurs suivant en donnant les résultats à 10^{-2} près.

Point de Γ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	$0,05$	$0,25$	e^{-1}	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$										

2. On veut déterminer si la courbe représentative de f coupe la droite Δ pour $0 < x < 7$. Que peut-on, à l'aide de sa calculatrice, conjecturer ?
   Préciser les éléments qui permettent de faire cette conjecture. (noter le type de calculatrice utilisée).

3. On s'intéresse aux solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ appartenant à l'intervalle $[7; +\infty[$.

   (a) Montrer que f' est une fonction croissante sur $[7; +\infty[$.

   (b) En déduire que $f'(x) > 2,1$ pour tout x appartenant à $[7; +\infty[$.

   (c) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique sur $[7; +\infty[$. (on pourra utiliser le sens de variation de la fonction h définie sur $[7; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - 2x$).

   Dans la suite, on notera α cette solution.

4. Mise en évidence de α sur un graphique.
   Choisir un nombre entier a tel que $a < \alpha < a + 5$.
   Sur papier millimétré, on trace un carré de 10 cm de côté.
   Le sommet inférieur gauche représentera le point de coordonnées $(a; 2a)$ et le sommet diagonalement opposé le point de coordonnées $(a + 5; 2(a + 5))$.
   Tracer dans ce carré Γ et Δ.
   Mettre le nombre α en évidence sur le graphique et en donner une valeur approchée.

C - Calcul de probabilité.

Dans cette partie, on se réfère au tableau des valeurs construit dans la partie B.1)
Les trois questions sont indépendantes.
Pour chacune des trois questions, les choix effectués sont équiprobables.

1. On place les 4 points A, C, H et J dans un repère, et on les relie à l'aide de 3 segments formant une ligne brisée continue (par exemple la ligne brisée $AHJC$).

   (a) Combien de lignes brisées différentes peut-on former ainsi ?
   ($AHJC$ et $CJHA$ représentent la même ligne brisée)

   (b) On choisit l'une de ces lignes brisées.
   Quelle est la probabilité d'obtenir la représentation graphique d'une fonction ?

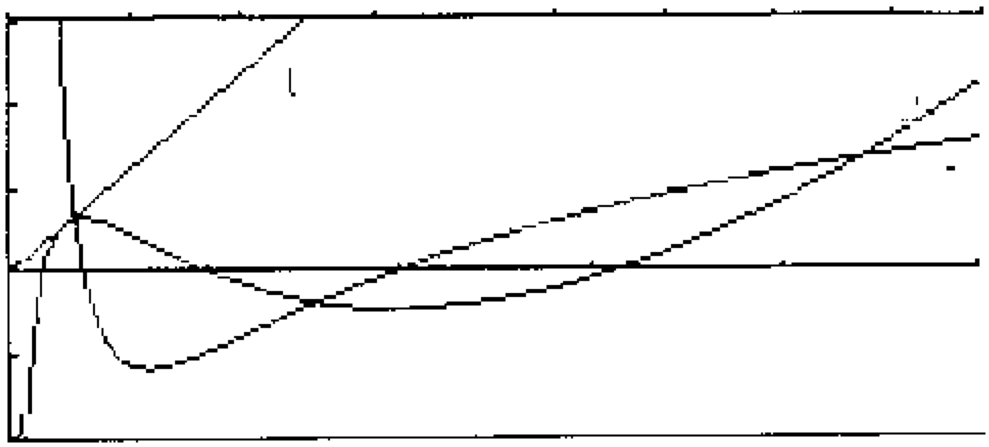
2. On choisit cinq points parmi les dix du tableau ; on les relie suivant l'ordre de leurs abscisses croissantes, à l'aide de segments formant une ligne brisée.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une ligne qui ne coupe pas l'axe des abscisses ?
   (le point D peut être choisi).

3. On choisit cinq points consécutifs parmi les dix (par exemple $BCDEF$).

   (a) Combien y-a-t-il de possibilités ?

   (b) On échange l'abscisse et l'ordonnée de chacun de ces cinq points.
   Les nouveaux points ainsi obtenus sont joints à l'aide de segments dans l'ordre de leurs ordonnées croissantes.
   Quelle est la probabilité d'obtenir la représentation graphique d'une fonction ?

Figure 1 (courbes Γ, Γ' et Δ) :



Seconde partie sans calculatrice

Exercice 1 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

et représentée dans le repère de la figure 1.

1. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit la suite (U_n) définie pour $n > 0$ par :

$$U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x)dx$$

   (a) Calculer U_1 et U_2. Exprimer U_n en fonction de n.

   (b) Que représente graphiquement le nombre U_n ?

3. Montrer que (U_n) est une suite décroissante positive.
   Calculer la limite de cette suite.
4. On pose $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$

   (a) Calculer S_1, S_2, S_3 et exprimer S_n en fonction de n.

   (b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct.
(Unité graphique 4cm).
On désigne par θ un nombre réel tel que $-\pi < \theta < \pi$.
On appelle A, M et N les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$.
On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1, et par (C') le cercle de centre A et de rayon 1.

1. Tracer (C) et (C'), et placer A, M et N dans le cas ou $\theta = \frac{\pi}{6}$.
2. Montrer que N appartient à (C') et donner la nature du triangle $OANM$. Déterminer un argument de $1 + e^{i\theta}$.
3. $u = 1 + e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.

(a) Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

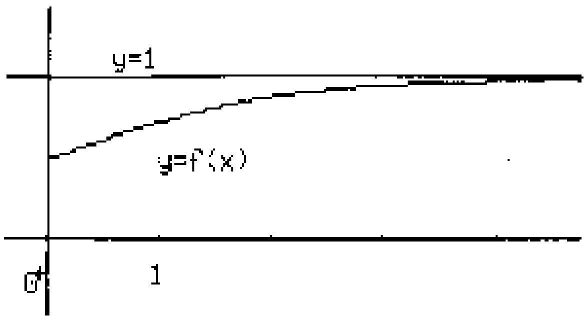
$$z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + 2 + 2\cos\theta = 0$$

En déduire la seconde solution de cette équation.

(b) Quelle sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$?

4. On considère l'équation (E) : $z^2 - az + a = 0$ où a est un nombre réel tel que $0 < a \leqslant 4$. On nomme R le point d'affixe a, et T le milieu de $[OR]$.
La perpendiculaire à l'axe réel passant par T coupe (C') en deux points U et U'.
Montrer que les affixes de U et de U' sont les solutions de (E).

Figure 1 (courbe représentative de f) :



B

Exercices

B.1 Intégration

B.1.1 Asie 1998

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1, e[$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$$

   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

   (c) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n \geqslant 0$
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(n+1)I_n \leqslant e$
   (c) En déduire la limite de I_n.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

B.1.2 Amérique du Sud 1995

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien, et

$$\text{pour } n = 0 \quad I_0 = \int_1^e x^2 \, dx.$$

1. Calculer I_o.
2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3. \qquad (1)$$

   En déduire I_2.
4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive.

   (b) Déduire de l'égalité (1) que, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n \leqslant \frac{e^3}{n+1}$$

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

B.1.3 Sportifs de haut niveau 1994

On considère la suite I définie par :

$$I_0 = \int_0^1 e^x \, dx$$

et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \, e^x \, dx$$

1. (a) Calculer

$$\int_0^1 (1-x)^n \, dx$$

   (b) A l'aide de l'encadrement :

$$1 \leqslant e^x \leqslant e$$

   valable sur l'intervalle $[0, 1]$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{(n+1)\,!} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{(n+1)\,!}$$

   (c) Montrer que la suite I est convergente et déterminer sa limite.
2. (a) Calculer I_0, puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

   (b) Etablir, en intégrant par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!} \qquad (1)$$

3. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$J_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

   (a) En utilisant les relations (1), exprimer J_n à l'aide de I_0 et I_n.
   (b) En déduire la limite J de la suite (J_n) .
   (c) Justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{(n+1)\,!} \leqslant J - J_n \leqslant \frac{e}{(n+1)\,!}$$

B.2 Probabilités

B.2.1 National 1998

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, P(A) désigne la probabilité de A ; $p(B/A)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :
   $p_i = P(X = i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

   (a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :
   C_1 : « en cinq minutes, un seul client se présente » ;
   C_2 : « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;
   E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence » ;

   (a) Calculer $P(C_1 \cap E)$.
   (b) Montrer que $P(E/C_2) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
   (c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.

B.2.2 Guadeloupe 1998

Un jeu de dominos est fabriqué avec les sept couleurs : *violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge*. Un domino se compose de deux cases portant chacune l'une des sept couleurs. Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino : c'est un double.

1. Montrer que le jeu comporte 28 dominos différents. Les 28 dominos, indiscernables au toucher, sont mis dans un sac.

2. On tire simultanément trois dominos du sac.
   Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux doubles parmi ces trois dominos ?
3. Dans cette question, on tire un seul domino. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) J_2 : « Le jaune figure deux fois »
   (b) J_1 : « Le jaune figure une seule fois »
   (c) J : « Le jaune figure au moins une fois »
4. On effectue n tirages successifs d'un domino, en notant à chaque tirage la (ou les) couleur(s) obtenue(s) avant de remettre dans le sac le domino tiré et de procéder au tirage suivant ; les tirages sont indépendants.
   Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n, que J soit réalisé au moins une fois.
   Calculer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

B.2.3 Centres étrangers 1998

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue n tirages successifs (n entier supérieur ou égal à 1) d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est blanche, on ne la remet pas.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.
Partie A
Dans cette partie $n = 3$. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Si k est un entier compris entre 1 et 3, on note E_k l'évènement
$<<$seule la k ième boule tirée est blanche$>>$.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement E_1 est $p(E_1) = \dfrac{5}{36}$.
2. Calculer les probabilités des événements E_2 et E_3.
   En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des 3 tirages.
3. Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule blanche ait été tirée en dernier ?

Partie B
On effectue maintenant n tirages.

1. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de tirer au moins une boule blanche en n tirages.
2. Quelles valeurs faut-il donner à n pour que : $p_n > 0,99$?

B.2.4 Groupe II bis 1997

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.

   (a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

   (b) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au cours de ces quatre tirages.

2. On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise. Répondre aux mêmes questions qu'à la question 1.

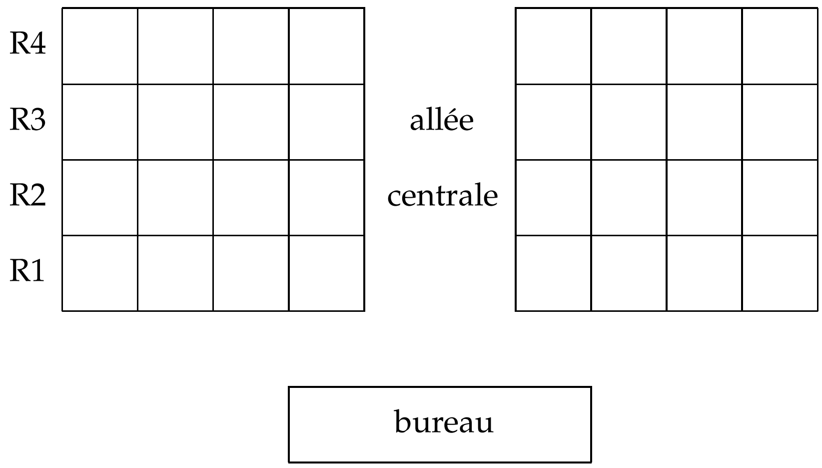
3. n étant un nombre entier strictement positif, on effectue n tirages successifs avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.

   (a) Calculer P_1, P_2, P_3 et P_n.

   (b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n.

B.2.5 Pondichéry 1997

Voici le plan de la salle 308 du lycée Dupont :



Le premier jour de l'année scolaire, les élèves de la classe de TS1 sont invités par leur professeur principal à s'installer au hasard des places disponibles dans cette salle. La classe de TS1 comporte 28 élèves.

1. (a) Quel est le nombre de répartitions possibles des places inoccupées ?

   (b) Calculer à 10^{-1} près, les probabilités des évènements suivants :
   A : " les huit places du rang R4 sont toutes occupées "
   B : "Il y a autant d'élèves à gauche qu'à droite de l'allée centrale "

2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme fractionnaire. Soit X la variable aléatoire " nombre de places inoccupées au rang R4 ".

   (a) Donner la loi de probabilité de X.

   (b) Calculer son espérance mathématique.

B.2.6 Amérique du Nord 1997

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7. On note, pour n entier naturel ou nul :
G_n l'évènement " Juliette gagne la n-ième partie "
P_n l'évènement " Juliette perd la n-ième partie "

1. (a) Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p(G_2/G_1)$ et $p(G_2/P_1)$. En déduire la probabilité $p(G_2)$.
   (b) Calculer $p(P_2)$.
2. On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.
   (a) Déterminer pour n entier naturel non nul les probabilités $p(P_{n+1}/G_n)$ et $p(G_{n+1}/P_n)$.
   (b) Montrer que pour tout n entier naturel non nul :
$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{array}\right.$$
3. Pour n entier naturel non nul, on pose
$$v_n = x_n + y_n \text{ et } w_n = 4x_n - 3y_n$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.
   (b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.
4. (a) Déduire du 3. l'expression de x_n en fonction de n.
   (b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

B.2.7 Remplacement 1996

Un livreur de pizzas doit servir un client qui se trouve à 6 km et qui exige d'être servi à 20 h 00 précisément. Pour se déplacer, il utilise un scooter qui roule constamment à 36 km/h. (on néglige les phases d'accélération et de décélération). Sur son trajet, il va rencontrer 2 deux tricolores non synchronisés et indépendants.

S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.

S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu :
- la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$.
- la probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{4}$.

Soit T la variable aléatoire " temps en minutes mis par le livreur pour arriver à destination ".

1. (a) Calculer, en justifiant le calcul, la probabilité $p(T = 11)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de T.
2. Calculer l'espérance mathématique de T.

3. Représenter la fonction de répartition de T.
4. Le livreur part à 19 h 49.

   (a) Quelle est la probabilité pour le livreur d'arriver en retard ?

   (b) Quelle est la probabilité pour le livreur d'arrive en avance ?

B.2.8 Groupe II bis 1996

On dispose de deux urnes :
• une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires ;
• une urne U_2 dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.
Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobable.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement E : <<parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches >>est égale à $0,46$.
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   (b) Le joueur doit verser $2,50$ F avant d'effectuer le tirage ; il reçoit à l'issue du tirage 1 F par boule blanche obtenue. Le jeu est-il équitable ?

3. Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré deux boules blanches.
4. On ne considère que l'urne U_1, de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules. On nomme succès le tirage de deux boules blanches. On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne). Déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès sur les dix tirages.

B.2.9 La Réunion 1996

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public :
Dans une urne se trouvent placées 7 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher.
Le joueur prend une boule au hasard ; si cette boule est noire, le jeu s'arrête ; si cette boule est rouge, le joueur prend une deuxième boule (sans remettre la première boule tirée dans l'urne) et le jeu s'arrête.
Une boule noire tirée apporte au joueur 1 F et chaque boule rouge 2 F.
Pour faire un jeu, le joueur paie 2 F. On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur (c'est à dire la différence entre la somme rapportée par les boules tirées et le prix du jeu).

1. (a) Quelles sont les valeurs que X peut prendre ?

   (b) Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

2. Un joueur fait trois jeux. Ceux-ci se déroulent dans des conditions identiques (après chaque jeu, les boules tirées sont remises dans l'urne).
   Déterminer la probabilité des événements suivants :
   A : le joueur perd 3 F.
   B : le joueur perd 1 F.
   C : le gain du joueur est nul.
   En déduire la probabilité de l'évènement D : <<le joueur a un gain strictement positif >>.

B.2.10 Nouvelle Calédonie 1996

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. Une urne U contient 4 jetons blancs et 3 noirs. On tire successivement les 7 jetons sans remise.
   X est la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jeton blanc apparaît au k-ième tirage.
   Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
2. Une autre urne U′ contient 17 jetons blancs et 18 noirs.
   On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître.
   Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U, sinon on tire un jeton de l'urne U′.
   (a) Démontrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à 0,5.
   (b) On a tiré un jeton blanc, calculer la probabilité pour qu'il provienne de U.

B.2.11 Exercice complémentaire

On considère le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

Pour déterminer les coefficients $a,\ b,\ c$ on lance trois fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et les numéros sortis donnent les valeurs de $a,\ b,\ ,c$.
Calculer les probabilités des événements suivants :

1. E_1 : le système a une infinité de solutions
2. E_2 : le système n'a aucune solution
3. E_3 : le système a une seule solution
4. E_4 : le système a une seule solution qui est $(3;0)$

Les résultats seront donnés sous la forme de fractions de dénominateur 108.

B.3 Nombres complexes

B.3.1 Remplacement 1998

1. On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.

(a) Calculer $P(4)$.

(b) Résoudre dans C l'équation : $P(z) = 0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
   Soient A, B, C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \qquad b = 1 + i\sqrt{3} \qquad c = 1 - i\sqrt{3}$$

   (a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

   (b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$

   On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

   (a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

   (b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$

   (a) Montrer que le quadrilatère $COFH$ est un carré.

   (b) Calculer l'affixe du point H.

   (c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

B.3.2 National 1998

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) :

$$\frac{z-2}{z-1} = z$$

   On donnera le module et un argument de chaque solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (2) :

$$\frac{z-2}{z-1} = i$$

   On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2.
   On suppose que M est distinct des points A et B.

   (a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.

   (b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4. (a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$$

où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

(b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (3) :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$$

On cherchera les solutions sous forme algébrique.

B.3.3 Guadeloupe 1998

Partie A

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$$

1. (a) Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.

(b) Montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ P(z) = \left(z^2+1\right) Q(z)$$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. Placer dans ce repère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = -i$, $z_C = -\sqrt{3} + 2i$ et $z_D = -\sqrt{3} - 2i$.
Montrer que ces quatre points appartiennent au cercle de diamètre $[CD]$.
2. Montrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme C en D. Calculer une valeur entière approchée à un degré près d'une mesure de l'angle de cette rotation.
3. Calculer, sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$$

Interpréter géométriquement le module et l'argument de ce rapport.

B.3.4 Groupe I bis 1997

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, ayant comme unité graphique 4 cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, -1 et i.
On considère la fonction f de $\mathcal{P} - \{A\}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de $\mathcal{P} - \{A\}$, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z+1}{z-2i}$$

1. (a) Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
   (b) Déterminer l'affixe du point C' image de C. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?
   (c) Montrer que le point C admet un antécédent unique par f que l'on notera C''. Quelle est la nature du triangle BCC'' ?
2. Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de z'.
3. Déterminer, en utilisant la question précédente, quels sont les ensembles suivants :
   (a) L'ensemble E_a des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif.
   (b) L'ensemble E_b des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.
   (c) L'ensemble E_c des points M dont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

B.3.5 Groupe II bis 1997

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique 3 cm).
On désigne par A le point d'affixe i.
A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z^2}{i-z}$$

1. Déterminer les points M confondus avec leur image M'.
2. Étant donné un complexe z distinct de i, on pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y' réels.
   Montrer que :

$$x' = \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$$

   En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble $\mathcal{E}$.

3. Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM′. En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que M et M′ soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner l'ensemble $\mathcal{F}$.
4. Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. M′ est le point d'affixe z' correspondant, et G l'isobarycentre des points A, M et M′.
Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.
Montrer que G est situé sur un cercle un centre O dont on précisera le rayon.
Après avoir comparé les angles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OG})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$, effectuer la construction de G. En déduire celle de M′.

B.3.6 Polynésie 1997

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis z_n en fonction de z_0 et n.
Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).
3. Déterminer la distance OM_n en fonction de n.
4. (a) Montrer que l'on a $M_nM_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout n entier naturel.
   (b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$
   (C'est à dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$). Déterminer L_n en fonction de n puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ en fonction de n.
Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?

B.3.7 Centres étrangers 1997

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A d'affixe $2i$, B d'affixe 2 et I milieu de [AB] (on prendra 2 cm d'unité graphique). On considère la fonction f qui, à tout point M distinct de A, d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{2z}{z - 2i}$$

1. (a) Montrer que f admet comme points invariants le point O et un deuxième point dont on précisera l'affixe.
   (b) Déterminer les images par f des points B et I.

2. Soit M un point quelconque distinct de A et O.
   Etablir que :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ OM' = 2\,\dfrac{MO}{MA} \end{cases}$$

3. Soit (Δ) la médiatrice de [OA].
   Montrer que les transformés par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera.
4. Soit (Γ) le cercle de diamètre [OA], privé du point A. Montrer que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (D) que l'on précisera.
5. Tracer (Δ), (Γ),(C), (D) sur la même figure.

B.3.8 Japon 1997

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1. Soit le polynôme P tel que pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$$

   Déterminer les réels u et v tels que

$$P(z) = (z-2)\left(z^2 + uz + v\right)$$

   et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. On note α la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de α. Soient A, B et C les points d'affixes respectives α, β et 2, I le milieu de $[AB]$ et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'affixe du point $r(B)$ et en déduire la nature du quadrilatère $OACB$.
3. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ privé du point C dans $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z ($z \neq 2$) associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z - (1+i)}{z-2}$$

   (a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
   Déterminer le point E tel que $f(E) = C$.
   (b) Quelles distances représentent les réels $|z - (1+i)|$ et $|z-2|$?
   En déduire que si M appartient à la médiatrice de $[AC]$, M' appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

B.3.9 La Réunion 1996

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :
   (a) $z^2 - 2z + 5 = 0$.
   (b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + 2i,\ z_B = 1 + \sqrt{3} + i,\ z_C = 1 + \sqrt{3} - i,\ \text{et } z_D = 1 - 2i.$$

   (a) Placer les points A, B, C, D et préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.

   b. Vérifier que

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$$

   Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?

   c. Prouver que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

3. On considère l'équation :

$$z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

où θ désigne un nombre réel quelconque.

   a. Résoudre l'équation (1) dans $\mathbb{C}$.

   b. Montrer que les images des solutions appartiennent au cercle Γ.

B.3.10 Nouvelle Calédonie 1996

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et 4.
L'application f associe à tout point M d'affixe z de $\mathcal{P}$, distinct de A, le point M′ d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{z - 4}{z - 1}$$

1. Soit C le point d'affixe $i\sqrt{2}$.
   Déterminer l'affixe de C′ = f(C).
2. Démontrer que f admet deux points invariants I et J. (On notera I celui d'ordonnée positive.)
   Placer les points I, J, C et C′.
3. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X, Y réels.
   (a) Déterminer X et Y en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
   (c) Déterminer et construire l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.
4. Donner une interprétation géométrique de $\mid Z \mid, \mid z - 4 \mid, \mid z - 1 \mid$.
   En déduire l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $\mid Z \mid = 1$.
   Construire D.

B.3.11 Sportifs de haut niveau 1996

1. (a) i. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z + 9 = 0$$

On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées, z_1 étant la solution de partie imaginaire positive.

ii. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2, et donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2.

(b) Placer dans le plan P rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, les images M_1 et M_2 de z_1 et z_2.
Expliquer pourquoi M_1 et M_2 sont situés sur le cercle Γ de centre O de rayon 3, que l'on tracera.

2. On considère la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

On considère les points A et B d'affixes

$$z_A = 3e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_B = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

et A' et B' leurs images par f.

(a) Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

(b) Déterminer sous forme exponentielle les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A' et B'.
Placer les points A, B, A' et B' sur la figure.
Expliquer pourquoi ces points sont sur le cercle Γ.

3. Calculer $\arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)$ et montrer que B et A' sont symétriques par rapport au point O. En déduire que le triangle ABA' est rectangle.

B.3.12 Sujet complémentaire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct d'origine O. Ω et A sont les points d'affixes respectives 1 et 2. On appelle F l'application qui à tout point M d'affixe z distinct de Ω associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z^2}{2(z-1)}$$

1. Déterminer les points invariants par F.
2. Soit E_1 la droite (OA) privée de Ω.

(a) Déterminer le tableau de variation de la fonction g définie pour tout réel $x \neq 1$ par :

$$g(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$$

(b) En déduire l'image de E_1 par F.

3. Soit E_3 le cercle de centre Ω et de rayon 1. Pour tout point $M(z)$ de ce cercle, on pose :

$$z = 1 + e^{i\theta}$$

(a) Démontrer que : $z' = 1 + \cos\theta$

(b) En déduire l'image de E_3 par F.

4. On pose $z = x + iy$ avec $z \neq 1$.

(a) Calculer la partie imaginaire de z' en fonction de x et de y.

(b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que l'image de M par F se trouve sur (OA).

B.4 Courbes paramétrées

B.4.1 Sujet complémentaire

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le cercle C de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées $(-1; 0)$. A tout point m de C, on associe le point M, projeté orthogonal de A sur la tangente en m à C. On appelle t une mesure de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{Om}\right)$.

1. Démontrer que le point M a pour coordonnées :

$$\left(\left(\cos t - \sin^2 t\right), \sin t \cos t + \sin t\right)$$

Lorsque m décrit C, l'ensemble des points M est une courbe C' définie comme la courbe paramétrée ensemble des points $M(t)$ lorsque t varie dans $\mathbb{R}$.

2. Etudier les positions relatives des points $M(t)$, $M(t + 2\pi)$, $M(-t)$. En déduire qu'il suffit, pour tracer la courbe C', de limiter les variations de t à l'intervalle $[0; \pi]$.

3. Tracer C' en précisant les tangentes aux points de paramètres 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. On admettra qu'au point de paramètre π, la courbe C' admet une tangente horizontale.

B.5 Barycentre

B.5.1 Nouvelle Calédonie 1996 (modifié)

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BD]$. Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, et M le milieu de $[LK]$. Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1. Justifier l'existence du barycentre G du système :

$$\{(A,1),(B,2),(C,1),(D,2)\}$$

En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ).

2. Montrer que G est en M, que M, I, J sont alignés, et donner la position de M sur (IJ).
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points X du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{XA}+2\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}\right\|=4\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|$$

4. Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

B.5.2 Centres étrangers 1994

On donne trois points A, B, C distincts non alignés du plan et on note a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC.

$$a=BC \quad b=CA \quad c=AB$$

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MA^2+MB^2+MC^2=a^2+b^2+c^2$$

1. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment $[BC]$.
   (a) Calculer AB^2+AC^2 en fonction de AI^2 et de BC^2. En déduire :

   $$AG^2=\frac{1}{9}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$$

   Ecrire de même les expressions de BG^2 et de CG^2.

   (b) Montrer que :

   $$AG^2+BG^2+CG^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

2. Déterminer l'ensemble (E).
3. On choisit $a=5$, $b=4$, $c=3$. Placer trois points A, B, C et dessiner (E) dans ce cas particulier.

B.5.3 Exercice complémentaire

ABC est un triangle isocèle, A' est le milieu de $[BC]$ et H l'orthocentre du triangle. On pose : $BC=2a \quad AB=AC=3a$.

1. Soit θ une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Calculer $\cos\theta$.
2. Soit D le projeté orthogonal de B sur $[AC]$. Démontrer que D est barycentre de $(A,2)$ et $(C,7)$.
3. Déterminer trois entiers a, b, c afin que H soit barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c).

B.5.4 Exercice complémentaire

Soit ABC un triangle. Le point I est le symétrique de B par rapport à C. Le point J est le symétrique de C par rapport à A. Le point K est le symétrique de A par rapport à B. On obtient un nouveau triangle IJK.

1. Démontrer que A est le barycentre de $(I, 2)$, $(J, 4)$, $(K, 1)$.
   Exprimer de même sans calculs B et C comme barycentres de I, J, K.
2. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs des droites (BC), (AC), (AB) avec les droites (KJ), (IK), (JI).
   (a) Démontrer que R est le barycentre de $(I, 1)$ et $(J, 2)$.
   (b) Enoncer les résultats analogues pour les points P et Q.
3. On donne le triangle IJK. Retrouver le triangle ABC.

B.5.5 Exercice complémentaire

ABC est un triangle dont les 3 angles sont aigus. On appelle A', B', C' les pieds des hauteurs, H l'orthocentre du triangle. On pose : $BC = a \quad CA = b \quad AB = c$.

1. Démontrer que A' est le barycentre de $(B, b\cos\hat{C})$ et $(C, c\cos\hat{B})$.
2. En déduire que A' est le barycentre de $(B, \tan\hat{B})$ et $(C, \tan\hat{C})$.
3. Démontrer que le barycentre de $(A, \tan\hat{A})$ $(B, \tan\hat{B})$ $(C, \tan\hat{C})$ est le point H.
4. On suppose que le triangle n'est pas isocèle. Les droites (BC) et $(B'C')$ se coupent en A''. On définit de même B'' et C''.
   Démontrer que le barycentre de $(B, \tan\hat{B})$ et $(C, -\tan\hat{C})$ est A''.
   Démontrer que les points A'', B'' et C'' sont alignés.

B.6 Géometrie dans l'espace

B.6.1 Remplacement 1998

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Il n'est pas demandé de faire de figure.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.
On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \qquad I\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

2. Soit Q le plan d'équation :

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

et Q′ le plan de repère $(O\,;\vec{\imath}, \vec{k})$.

a. Pourquoi Q et Q′ sont-ils sécants ?

b. Donner un point E et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q′.

3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$J\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \qquad K\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère S et de la droite (JK).

B.6.2 Sportifs de haut niveau 1995

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(3;2;-1)$ et $H(1;-1;3)$.

1. Calculer la longueur AH.
2. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par H et orthogonal à la droite (AH).
3. On donne les points : $B(-6;1;1)$, $C(4;-3;3)$ et $D(-1;-5;-1)$.
   (a) Démontrer que les points B, C et D appartiennent au plan $\mathcal{P}$.
   (b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
   (c) Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
   (d) Démontrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à $\frac{145}{3}$.
4. (a) Calculer l'aire du triangle ABC.
   (b) Calculer la distance du point D au plan ABC.

C

Problèmes

C.1 Remplacement 1998

Partie A

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -xe^{2x+1}.$$

   (a) Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?

   (b) Etudier le sens de variation de f.

   (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (d) Dresser le tableau de variation de f.

   (e) On appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm).
   Quelle est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point O ?
   Ecrire une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse (-1).

   (f) On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x.$$

   Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) ?

2. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + exe^x.$$

   (a) Etudier le sens de variation de h.
   En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

   (b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Γ).

   (c) Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathcal{C})$ et (Γ).

3. m désigne un réel quelconque et M désigne le point de la courbe (Γ) d'abscisse m.

   (a) Ecrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.

(b) La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.
Calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J du segment [AB].

(c) Prouver que J appartient à $(\mathcal{C})$.

(d) Tracer D et J pour $m = 0$.

Partie B

1. Soit x un réel quelconque.
A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x te^{2t}dt.$$

2. Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées (u, v) vérifient :

$$\begin{cases} x \leqslant u \leqslant 0 \\ 0 \leqslant v \leqslant f(x) \end{cases}$$

3. Calculer $\mathcal{A}(-1)$.
4. $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?

C.2 Asie 1998

Partie A

Soit la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, qui, à tout x, associe :

$$g(x) = e^x(x-1) + x^2.$$

1. **a.** Montrer que la dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est :

$$g'(x) = x(e^x + 2).$$

b. Déterminer les limites de g en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$.

c. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$.
Montrer que α est dans l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}\,; 1\right]$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $[0\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}.$$

1. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0\,; +\infty[$, et que, par suite, l'équation $f(x) = x$ admet α pour solution unique sur I.

2. **a.** Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
   d. Construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur $[0\,;+\infty[$ dans un repère orthonormal (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f(x)$ appartient à I.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = f(u_{n-1}) \quad \text{pour tout } n > 1 \end{cases}$$

   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \in$ I.
   b. Montrer que, pour tout $x \in$ I,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

   c. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\text{pour tout } n > 1, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|\,.$$

   d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   e. En déduire que (u_n) converge vers α
   f. A priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ?
3. En utilisant la décroissance de f, montrer que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-7}.

C.3 Groupe I bis 1997

Partie I

Soit la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Etudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a :

$$-1,28 < \alpha < -1,27$$

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$$

   En déduire le sens de variation de f.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T.
4. Chercher les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D. b
5. Faire le tableau de variation de f.
6. Tracer sur un même dessin (C) , T et D. La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à $[-2; 4]$.

Partie III

On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par :

$$g(x) = \ln(1 + e^x)$$

On note (L) la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, I le point défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, A le point d'abscisse 0 de (L) et B son point d'abscisse 1.

1. Etudier brièvement les variations de g.
2. Donner une équation de la tangente en A à (L) .
3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$. Calculer les aires des trapèzes $OIPA$ et $OIBA$.

4. On admet que la courbe (L) est située entre les segments $[AP]$ et $[AB]$. Montrer alors que :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 g(x)\ dx \leqslant \ln \sqrt{2(1+e)}$$

5. Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \ln(1+e) - \int_0^1 g(x)\ dx$$

6. En déduire un encadrement de

$$\int_0^1 f(x)\ dx$$

C.4 Groupe II bis 1997

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'unité graphique est 2 cm.

Partie I : Etude d'une fonction g.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x - x + 1$$

et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Etudier les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Etudier les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.
3. On note $\mathcal{C}'$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1,e]$, on a :

$$x\ln x - x + 1 \leqslant \ln x$$

   On ne demande pas de représenter $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

4. (a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$J = \int_1^e (x-1)\ln x\, dx$$

   (b) Soit Δ le domaine plan défini par :

$$\Delta = \{M(x,y)\,;\, 1 \leqslant x \leqslant e \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant \ln x\}$$

   Déterminer, en cm^2, l'aire de Δ. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

Partie II : Etude d'une fonction f.

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1. Pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement.
2. Déterminer le tableau de variation de f. On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie III : Etude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que
$$3,5 < \alpha < 3,6$$
2. Soit h la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :
$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
   (a) Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$.
   (b) Etudier le sens de variation de h.
   (c) On pose $I = [3,4]$. Montrer que pour tout x élément de I on a $h(x) \in I$ et
$$|h'(x)| \leqslant \frac{5}{6}$$
3. On définit la suite (u_n) par :
$$u_0 = 3 \text{ et pour tout } n \geqslant 0 \ u_{n+1} = h(u_n)$$
   Justifier successivement les trois propriétés suivantes :
   (a) Pour tout entier naturel n,
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{5}{6}|u_n - \alpha|$$
   (b) Pour tout entier naturel n,
$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$$
   (c) La suite (u_n) converge vers α.
4. Donner un entier naturel p, tel que des majorations précédentes on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Indiquer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

C.5 Antilles 1997

Partie I
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.
2. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$.
4. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'unité graphique est 5 cm. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.

Partie II
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g. Déduire de la partie I le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.
2. Vérifier que $g = h \circ k$ avec h et k les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ et } k(x) = \frac{1}{x}$$

   En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0.
3. Donner le tableau des variations de g sur $]0, +\infty[$.

Partie III
1. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. On note $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant \lambda \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

   En utilisant les résultats de la partie II,
   (a) Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ.
   (b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.
   (c) Justifier l'affirmation :
   " L'équation $A(\lambda) = 5$ admet une solution unique notée λ_0"
   Puis donner un encadrement de λ_0 d'amplitude 10^{-2}.
2. Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

   Montrer, en remarquant que $\ln(u_n) = g(n)$, que :
   (a) La suite (u_n) est une suite croissante.
   (b) La suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

C.6 Polynésie 1997

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right) e^{-x}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right) e^{-x}$$

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variation de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que

$$0,35 \leqslant \alpha \leqslant 0,36$$

5. En déduire le signe de g.

Partie II : Etude de f

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.
3. En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et donner son tableau de variation.
4. (a) Démontrer que :

$$f(\alpha) = \alpha\left(1 + 2e^{-\alpha}\right)$$

   (b) A l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}.
5. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à Δ.
6. Donner une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
7. Tracer Δ, T puis $(\mathcal{C})$.
8. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x}$$

   soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \left(x^2 + 2\right) e^{-x}$.

   (b) Calculer en fonction de α l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, Δ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$.

   (c) Justifier que :

$$\mathcal{A} = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$$

Partie III : Etude d'une suite

1. Démontrer que pour tout x de $[1;2]$:

$$1 \leqslant f(x) \leqslant 2$$

2. Démontrer que pour tout x de $[1;2]$:

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$$

3. En utilisant le sens de variation de la fonction h définie sur $[1;2]$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$

démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β dans $[1;2]$.

4. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2$$

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \beta|$$

   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

   (e) Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on ait :

$$|u_n - \beta| \leqslant 10^{-2}$$

C.7 Japon 1997

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie I

Etude pour $n = 1$

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour C_1 ?
2. Etudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau des variations de f_1.
3. Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$ à la courbe C_1.
   Etude pour $n = 2$
4. Déterminer $\lim_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour C_2 ?
5. Calculer $f_2'(x)$ et donner le tableau de variations de f_2.

Partie II

1. Etudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; En déduire la position relative de C_1 et C_2.
2. Tracer C_1 et C_2.

Partie III

n étant un entier naturel non nul, on pose :

$$I_n = \int_1^e f_n(x)\ dx$$

1. On pose :

   $$F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

   Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

   $$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

3. Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Partie IV

1. En utilisant la question 2. de la partie III, montrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul :

   $$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

2. En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1; e]$, montrer que pour tout n entier naturel non nul :

   $$0 \leqslant I_n \leqslant 1$$

3. En déduire :

   $$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

C.8 Nouvelle Calédonie 1996

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

ainsi que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. En déduire le tableau de variation de f. Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Tracer $\mathcal{C}$. On choisira une unité graphique de 4 cm.

Partie II

1. Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.
2. Vérifier que f est telle que : $f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}$.
3. En déduire que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2J - f(1)$$

   (J est définie à la question **II - 1.**).

Partie III

L'équation $f(x) = f(2)$ admet une seconde solution, notée α, et appartenant à l'intervalle $I = [-1, 0]$.

1. Soit $g(x) = \left(-\dfrac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$. Montrer que $f(\alpha) = f(2)$ équivaut à $g(\alpha) = \alpha$.
2. Montrer que g(I) est inclus dans I et que $\mid g'(x) \mid \leqslant \dfrac{1}{e}$ pout tout x appartenant à I.
3. En déduire que $\mid g(x) - \alpha \mid \leqslant \dfrac{1}{e} \mid x - \alpha \mid$ pout tout x appartenant à I.
4. On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} U_0 = -0,5 \\ U_{n+1} = g(U_n) \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$$

   On admet que U_n appartient à I pour tout entier $n \geqslant 0$.
   Montrer que

$$\mid U_n - \alpha \mid \leqslant \frac{1}{e^n} \mid U_0 - \alpha \mid \leqslant \frac{1}{2e^n}$$

   pour tout entier $n \geqslant 0$.
5. Déterminer le plus petit entier n tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

C.9 National Année 1995

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{3\}$ par :

$$f(x) = (x+1)\ln|x-3|$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 1 cm).

Partie A : Etude de la fonction f.

1. (a) Vérifier que si x appartient à D, alors :

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$$

   (b) Pour x appartenant à D, calculer $f''(x)$, où f'' désigne la dérivée seconde de f. En déduire les variations de f'.

   (c) Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en 3 à gauche.

   (d) Montrer que f' s'annule sur $]-\infty;3[$ pour une seule valeur α. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty;3[$.

   (e) Etudie le signe de $f'(x)$ sur $]3;+\infty[$.

   (f) Dresser le tableau de variation de f.

2. Etudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes éventuelles à (C)
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.
4. Tracer la courbe (C).

Partie B : Calcul d'une aire

A désigne l'aire en cm^2 de la région comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=-1$ et $x=2$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x différent de 3 :

$$\frac{x^2+2x}{3-x} = ax + b + \frac{c}{3-x}$$

2. En déduire la valeur exacte de :

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{t^2+2t}{3-t}\,dt$$

3. Grâce à une intégration par parties, et en utilisant la question précédente, calculer la valeur exacte de l'aire A.

C.10 La Réunion 1995

Dans tout ce problème, ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A – Etude d'une fonction auxiliaire
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$$

1. Etudier les variations de g. Préciser $g(1)$.
2. En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0,\ 1[$ et $]1,\ +\infty[$.

Partie B – Etude d'une fonction
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0, f(x) = f(\frac{1}{x})$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur) dans l'expression de $f(x)$.
   Déterminer la limite de f en 0.
3. Montrer que pour tout réel $x > 0, f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$.
   En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty]$.
4. On nomme C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé ; unité graphique 5 cm. Tracer C_f.

Partie C – Résolution approchée d'équations

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0,\ 1]$.
   On pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0,\ 1]$ par
   $$h(x) = f(x) - x$$
   On nomme α cette solution.
2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $[1,\ +\infty[$.
   On nomme β cette solution.
3. Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}. En déduire un encadrement de α.

D

Eléments de solutions

D.1 Sujets du baccalauréat

D.1.1 Correction du sujet A.2

EXERCICE 1

1. L'image M de m par F est le point d'affixe :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(e^{it}\right)^2 - e^{it} &= \frac{1}{2}e^{2it} - e^{it} \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2t + i\sin 2t) - (\cos t + i \sin t) \\ &= \left(\frac{1}{2}\cos 2t - \cos t\right) + i\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \sin t\right)\end{aligned}$$

En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on trouve bien que :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{cases}$$

2. $x(-t) = \frac{1}{2}\cos(-2t) - \cos(-t) = \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t = x(t)$ car la fonction cosinus est paire.
$y(-t) = \frac{1}{2}\sin(-2t) - \sin(-t) = -\frac{1}{2}\sin 2t + \sin t = -y(t)$ car la fonction sinus est impaire.
On peut en déduire que pour tout t de $[-\pi, \pi]$, les points de paramètre t et $(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et donc que Γ admet comme axe de symétrie cette droite.
3. $x'(t) = -\frac{2\sin 2t}{2} + \sin t = -2\sin t\cos t + \sin t = \sin t(1 - 2\cos t)$ car $\sin 2t = 2\sin t\cos t$.
Sur $[0, \pi]$, $\sin t \geqslant 0$, donc le signe de $x'(t)$ est celui de $1 - 2\cos t$. On a :
$1 - 2\cos t \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos t \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
$1 - 2\cos t \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos t \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
En conclusion, x est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
4. $y'(t) = \frac{2\cos 2t}{2} - \cos t = 2\cos^2 t - 1 - \cos t$ car $\cos^2 t = 2\cos^2 t - 1$. Comme

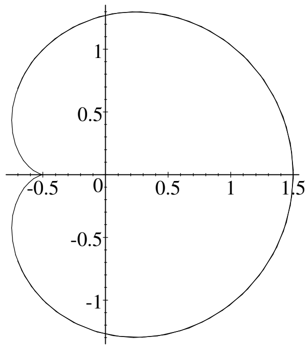
$$(\cos t - 1)(1 + 2\cos t) = 2\cos^2 t - \cos t - 1$$

on en déduit bien l'égalité cherchée. Remarquons que $\cos t - 1 \leqslant 0$, puis que
$1 + 2\cos t \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos t \geqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.
$1 + 2\cos t \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos t \leqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$
En conclusion, y est décroissante sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

5. On obtient le tableau de variations :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	$\sqrt{3}$	$+$	0
$x(t)$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0
$y'(t)$	0	$-$	(-1)	$-$	0	$+$	2

6. On trace la restriction de Γ obtenue pour $t \in [0, \pi]$, puis on effectue la réflexion par rapport à l'axe des abscisses pour obtenir toute la courbe.



EXERCICE 2

1. (a) $\varphi'(t) = \frac{1}{(t+2)^2} > 0$, donc φ est croissante $[0, 2]$, ce qui implique en particulier que

$$\varphi(0) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(2) \Rightarrow \frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}$$

(b) Il suffit de multiplier l'inégalité précédente par $e^{\frac{t}{n}} > 0$.

(c) Comme $0 \leqslant 2$, on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne :

$$\int_0^2 \frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} dt \leqslant \int_0^2 \varphi(t)\, e^{\frac{t}{n}} dt \leqslant \int_0^2 \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}} dt$$

Comme $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}} dt = \left[n e^{\frac{t}{n}}\right]_0^2 = n e^{\frac{2}{n}} - n = n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$, on obtient :

$$\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$$

(d) On utilise le changement de variable défini par $h = \frac{2}{n}$, en remarquant que si n tend vers $+\infty$ alors h tend vers 0. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h}\left(e^{h} - 1\right) = 2$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) = 3$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) = \frac{7}{2}$.
Si (u_n) admet une limite L, alors en utilisant le théorème des gendarmes, on a bien $3 \leqslant L \leqslant \frac{7}{2}$.

2. (a) Pour tout t dans $[0, 2]$, on a

$$2 - \frac{1}{t+2} = \frac{2(t+2)}{t+2} - \frac{1}{t+2} = \frac{2t+3}{t+2}$$

On en déduit que :

$$I = \int_0^2 2 - \frac{1}{t+2}dt = [2t - \ln(t+2)]_0^2 = 4 - \ln 2$$

(b) Pour tout t dans $[0, 2]$, on a $0 \leqslant \frac{t}{n} \leqslant \frac{2}{n}$, et la croissance de la fonction exponentielle établit l'inégalité demandée.
On multiplie l'inégalité précédente par $\left(\frac{2t+3}{t+2}\right)$ qui est positif pour $t \in [0, 2]$. Il vient :

$$\frac{2t+3}{t+2} \leqslant \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{2}{n}}$$

Par intégration, on obtient :

$$\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt \leqslant \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt \leqslant \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{2}{n}}dt$$

Il reste à remarquer que

$$\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{2}{n}}dt = e^{\frac{2}{n}}\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt = e^{\frac{2}{n}}I$$

ce qui établit l'inégalité.

(c) $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2}{n}} = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2}{n}}I = I$. Le théorème des gendarmes établit donc que (u_n) est convergente et que sa limite vaut I.

PROBLEME (*10 points)*

Partie A

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}(\ln x - 2) = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to0^+}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x\to0^+}(\ln x - 2) = -\infty$, donc $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.
2. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables. On trouve que

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{\ln x + x - 3}{x^2}$$

en appliquant la formule de dérivation d'un produit.

3. (a) u est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$u'(x) = \frac{1+x}{x} > 0$$

donc u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

(b) Sur $[2,3]$, la fonction u est dérivable, strictement croissante, et $u(2)$ et $u(3)$ sont de signes contraires. Donc l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2,3]$. Comme $u(2,20) \simeq -1,15 \times 10^{-2} < 0$ et $u(2,21) \simeq 2,99 \times 10^{-3} > 0$, le réel α appartient à l'intervalle $[2,20; 2,21]$.

(c) u est croissante et s'annule en α, donc sur $]0,\alpha[$ $u(x)$ est négatif et sur $]\alpha,+\infty[$ $u(x)$ est positif.

4. (a) On remarque que $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$, et donc que $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. Donc f est décroissante sur $]0,\alpha[$ et croissante sur $]\alpha,+\infty[$.

(b) $u(\alpha) = 0$ équivaut à $\ln\alpha + \alpha - 3 = 0$, qui fournit

$$\ln\alpha = 3 - \alpha$$

On a en reportant cette valeur dans l'expression de $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)((3-\alpha) - 2) = \frac{2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha} = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

Comme $2,20 < \alpha < 2,21$, on a $1,20^2 < (\alpha-1)^2 < 1,21^2$ et

$$\frac{1}{2,21} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2,20}$$

Par multiplication de ces deux inégalités, on a :

$$\frac{1,20^2}{2,21} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{1,21^2}{2,20}$$

Passant à l'opposé, on en déduit finalement que :

$$-\frac{1,21^2}{2,20} < f(\alpha) < -\frac{1,20^2}{2,21}$$

L'application numérique fournit $-\frac{1,21^2}{2,20} \simeq -0,665$ et $-\frac{1,20^2}{2,21} \simeq -0,651$, ce qui permet d'obtenir

$$-0,67 < f(\alpha) < -0,65$$

5. (a) Le signe de $f(x) = \frac{(x-1)(\ln x - 2)}{x}$ est sur $]0,+\infty[$ celui du produit $(x-1)(\ln x - 2)$. Il reste à faire un tableau de signes :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 2$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion, $f(x)$ est négatif sur $\left[1, e^2\right]$, et positif sur $]0,1] \cup \left[e^2 + \infty\right[$.

(b) Voir le graphique en fin d'épreuve.

Partie B

1. (a) Comme F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$, on a

$$F'(x) = f(x)$$

Connaissant le signe de $f(x)$ d'après la question précédente, on peut dire que F est décroissante sur $\left[1, e^2\right]$ et croissante sur $]0,1] \cup \left[e^2, +\infty\right[$.

(b) Comme $F'(1) = f(1) = 0$ et $F'\left(e^2\right) = f\left(e^2\right) = 0$, les tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 sont donc horizontales.

2. (a) Posons $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$, d'où $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$ puis appliquons la célèbre formule :

$$\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = [u(t)\, v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt$$

On obtient alors :

$$\int_1^x \ln t\, dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x 1 dt = x \ln x - x + 1$$

(b) $f(x) = \ln x - 2 - \frac{1}{x} \ln x + \frac{2}{x}$ après développement.

(c) On a puisque F est la primitive de f qui s'annule en 1 :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x f(t)\, dt = \int_1^x \left(\ln t - 2 - \frac{1}{t} \ln t + \frac{2}{t} \right) dt \\ &= \int_1^x \ln t dt + \left[-2t - \frac{(\ln t)^2}{2} + 2 \ln t \right]_1^x \\ &= x \ln x - 3x - \frac{1}{2} \ln^2 x + 2 \ln x + 3 \end{aligned}$$

On peut aussi déduire de la question précédente qu'une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto (x \ln x - x)$, ce qui permet de trouver comme primitives de f les fonctions :

$$x \mapsto (x \ln x - x) - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2 \ln x - 2x + k$$

Il reste à utiliser le fait que $F(1) = 0 \Rightarrow k = 3$, et l'on retrouve bien le résultat précédemment obtenu.

3. (a) On pose $X = \frac{1}{x}$. Si x tend vers 0 par valeurs supérieures, alors X tend vers $+\infty$. On a donc :

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{X}\right)}{X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0$$

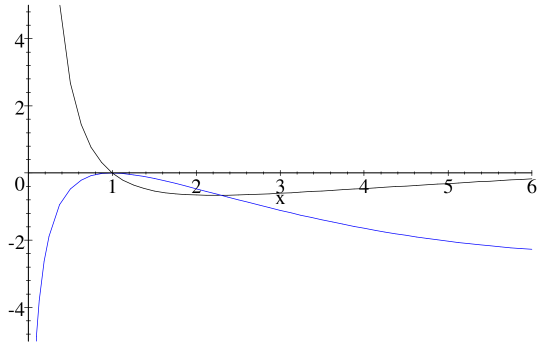
d'après le formulaire de baccalauréat.
On en déduit que $\lim_{x \to 0^+} F(x) = -\infty$, car $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

(b) On développe l'expression donnée pour x strictement supérieur à 1, et on établit facilement l'égalité.
$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$.

(c) On récapitule les résultats précédents :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$			0				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$5-e^2$		

(d) On obtient :



4. La fonction f est dérivable et à valeurs négatives sur $\left[1, e^2\right]$, donc l'aire en unités d'aires est égale à

$$-\int_1^{e^2} f(x)\,dx$$

L'unité d'aire valant 4 cm^2, on a donc l'aire $\mathcal{A}$ cherchée qui est égale à :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -4\int_1^{e^2} f(x)\,dx = -4\left[F(x)\right]_1^{e^2}\\ &= 4F(1) - 4F\left(e^2\right)\\ &= 4e^2 - 20\end{aligned}$$

D.2 Exercices

D.2.1 Correction de l'exercice B.2.5

1. (a) Il s'agit de répartir les 4 places inoccupées sur les 32 places possibles. On choisit donc une partie de 4 éléments dans un ensemble en comportant 32, donc il y a $C_{32}^4 = 35960$ répartitions possibles.

   (b) On suppose bien sûr que les élèves se répartissent de manière équiprobable sur les places. La probabilité de l'évènement A est donc donnée par le nombre de cas favorables à la réalisation de A sur le nombre de cas possibles.

Le nombre de cas possibles correspond au nombre de manières dont il est possible de répartir 28 élèves sur 32 places ; soit C_{32}^{28}. Le nombre de cas favorables correspond à la répartition des 20 élèves qui restent sur les 24 places inocupées, soit C_{24}^{20}. La probabilité de l'évènement A est donc de $\dfrac{C_{24}^{20}}{C_{32}^{28}} \simeq 0,3$.
L'évènement B est réalisé si on répartit 14 élèves parmi les 16 places situées de part et d'autre de l'allée centrale. La probabilité cherchée est donc égale à $\dfrac{C_{16}^{14} \times C_{16}^{14}}{C_{32}^{28}} \simeq 0,4$.

2. La variable aléatoire X, égale au " nombre de places inocupées au rang R4 ", peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4, car il y au plus quatre places inocupées au rang R4.

   (a) La probabilité qu'il n'y ait pas de place inocupée au rang R4 est $\dfrac{C_{24}^{4}}{C_{32}^{4}}$. En effet, les cas possibles correspondent à répartir les 4 places inocupées parmi les 32 places possibles, tandis que les cas favorables correspondent au choix des 4 places parmi les 24 qui ne sont pas situées au rang R4.
   La probabilité qu'il y ait exactement une place inocupée au rang R4 est donnée par $\dfrac{C_8^1 \times C_{24}^{3}}{C_{32}^{4}}$. Les cas favorables consistent à choisir une place inocupée parmi les 8 du rang R4, et les trois autres parmi les 24 qui ne sont pas situées au rang R4. Par le même raisonnement, on peut dresser le tableau récapitulant la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
$p(X=x)$	$\dfrac{C_{24}^4}{C_{32}^4} = \dfrac{5313}{17980}$	$\dfrac{C_8^1 \times C_{24}^3}{C_{32}^4} = \dfrac{2024}{4495}$	$\dfrac{C_8^2 \times C_{24}^2}{C_{32}^4} = \dfrac{966}{4495}$
x_i	3	4	
$p(X=x)$	$\dfrac{C_8^3 \times C_{24}^1}{C_{32}^4} = \dfrac{168}{4495}$	$\dfrac{C_8^4}{C_{32}^4} = \dfrac{7}{3596}$	

   (b) La formule du cours permet de trouver que l'espérance mathématique de X vaut 1.

D.2.2 Correction de l'exercice B.3.7

1. (a) Un point M d'affixe z ($z \neq 2i$) est invariant si et seulement si $z' = z$ soit $z = \frac{2z}{z-2i}$. Ce qui équivaut à :

$$z(z-2i) = 2z \Leftrightarrow z(z-2i-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ z = 2+2i \end{cases}$$

   Il s'en suit que f admet deux points invariants, le point O et le point d'affixe $2+2i$.

   (b) L'image de B a pour affixe $1+i$, c'est donc I milieu de [AB].
   L'image de I est le point d'affixe $2i$, c'est donc A.

2. $z' = \frac{2z}{z-2i}$ équivaut

$$\left\{\begin{array}{l}|z'| = \left|\frac{2z}{z-2i}\right| \\ \text{et} \\ \arg z' = \arg \frac{2z}{z-2i} \quad (2\pi)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|z'| = \frac{|2z|}{|z-2i|} \\ \text{et} \\ \arg z' = \arg 2 + \arg z - \arg(z-2i) \quad (2\pi)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|z'| = \frac{|2z|}{|z-2i|} \\ \text{et} \\ \arg z' = 0 + \arg z - \arg(z-2i) \quad (2\pi)\end{array}\right.$$

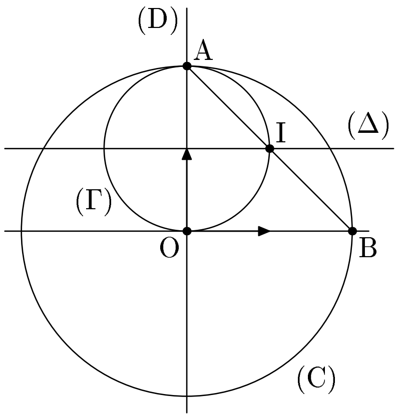
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}OM' = 2\frac{OM}{AM} = 2\frac{MO}{MA} \\ \text{et} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) \quad (2\pi)\end{array}\right.$$

On obtient finalement le résultat, en effet :
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) \quad (2\pi)$.

3. Si M appartient à la médiatrice de [OA] alors MO=MA. Donc, M étant distinct de A, $\frac{MO}{MA} = 1$. D'où OM'=2. M' appartient alors au cercle de centre O et de rayon 2. Ce cercle passe par B.

4. Si M est en O, alors M' est en O, puisque O est invariant.
Si M est différent de O, le vecteur $\overrightarrow{MO}$ n'est pas nul. Si M est élément du cercle de diamètre [OA] privé de A et O alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$. En utilisant le résultat de la question 2. nous en déduisons que : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$, donc que M' est élément d'une droite passant par O et de vecteur directeur orthogonal à $\overrightarrow{u}$, c'est à dire à la droite (OA).

5. La figure est ci-dessous.



D.3 Problèmes

D.3.1 Correction du problème C.8

Partie I

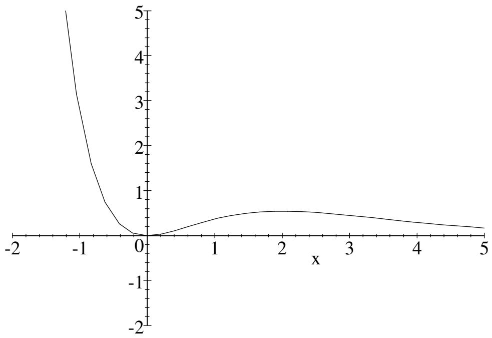
1. $f'(x) = (2-x)xe^{-x}$.

2. Pour tout réel x $e^{-x} > 0$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2-x)x$.
f' s'annule pour $x = 0$ ou $x = 2$. $f'(x) > 0$ pour $x \in]0, 2[$. $f'(x) < 0$ pour

$x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.
f est donc croissante sur $]0, 2[$ et décroissante sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.
$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. On en déduit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Pour tout réel x, $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.Nous savons que, pour $\alpha > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

3. Le tracé de la courbe représentative de f est ci-dessous :



Partie II

1. On intègre par parties. On pose $u'(x) = e^{-x},\ u(x) = -e^{-x}$
$v(x) = x,\ v'(x) = 1$
d'où $J = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1} + 1$
2. $f(x) + f'(x) = x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 2xe^{-x}$
3. On en déduit : $\int_0^1 f'(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 xe^{-x}dx$
Comme $\int_0^1 f'(x)dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - 0$ et $2\int_0^1 xe^{-x}dx = 2J$ on obtient : $\int_0^1 f(x)dx = 2J - f(1)$
Remarque :
En remplaçant J et $f(1)$ par leur valeur, il vient $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{5}{e} + 2$.

Partie III

Il n'est pas demandé de prouver que l'équation $f(x) = f(2)$ a une solution unique dans I.

1. On a $f(\alpha) = f(2)$, c'est à dire $\alpha^2e^{-\alpha} = 4e^{-2}$.
On en déduit : $\alpha^2 = 4e^\alpha e^{-2}$.
α est négatif d'où : $\alpha = -\sqrt{4e^\alpha e^{-2}}$ soit $\alpha = -2e^{\frac{\alpha}{2}}e^{-1}$ ou encore $\alpha = -\frac{2}{e}e^{\frac{\alpha}{2}}$. On a bien $\alpha = g(\alpha)$.
2. $g'(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$. Pour tout x de I g' est négative, donc g est décroissante. $g(I) = [g(0), g(-1)]$. Or $g(0) = -\frac{2}{e} \simeq -0,73$ et $g(-1) = -\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} \simeq -0,45$. Il en résulte que $[g(I)] \subset I$.
$|g'(x)| = \frac{1}{e}e^{\frac{x}{2}}$. Pour x élément de I, $\frac{x}{2}$ est négatif, donc $e^{\frac{x}{2}} \leqslant 1$. On en déduit que pour tout x de I, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{e}$.

3. Pour tout x de I, $g(x)$ et α appartiennent à I, et comme $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{e}$, on peut appliquer l'inégalité des accroissement finis avec nombres $g(x)$ et α d'où :
   $|g(x) - g(\alpha)| \leqslant \frac{1}{e}|x - \alpha|$ et comme $g(\alpha) = \alpha$
   on obtient finalemnent $|g(x) - g(\alpha)| \leqslant \frac{1}{e}|x - \alpha|$.
4. Ayant admis que pour tout n de $\mathbb{N}$, U_n appartient à I, on peut appliquer l'inégalité démontrée à la question précédente à $x = U_n$. On obtient pour tout n de $\mathbb{N}$:
   $$|g(U_n) - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|U_n - \alpha| \quad \text{c'est dire} \quad |U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|U_n - \alpha|.$$
   Démontrons par récurrence que : $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n |U_0 - \alpha|$.
   • Pour $n = 0$, on a $\left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$ donc $|U_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^0 |U_0 - \alpha|$.
   • On suppose que : $|U_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n |U_0 - \alpha|$; on obtient alors :
   $$|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^n |U_0 - \alpha|.$$
   Finalement : $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$ ce qui démontre la propriété au rang $n + 1$.
   Conclusion :
   Pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $|U_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e^n}\right) |U_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2e^n}$.
   Par ailleurs, $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\alpha \in [-1, 0]$, donc $|U_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$.
   Il en résulte que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2e^n}$.
5. Pour avoir $|U_0 - \alpha| \leqslant 10^{-6}$, il suffit que $\frac{1}{2e^n} \leqslant 10^{-6}$, c'est à dire $2e^n \geqslant 10^6$.
   $2e^n \geqslant 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad e^n \geqslant \frac{10^6}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \ln\left(\frac{10^6}{2}\right)$.
   $\ln\left(\frac{10^6}{2}\right) \simeq 13,12$.
   La plus petite valeur de n qui convienne est 14.

   Remarque :
   La calculatrice donne $U_{14} \simeq -0,556929$ qui est une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Index

Ce livre a été entièrement composé grâce au logiciel LaTeX

La réalisation de cet ouvrage a été rendue possible grâce à :

Françoise Labrousse
Michel Gosse
Jean-Claude Renaud
Christian Ballion
Jean-Pierre Prigent
Jean Michel Sarlat

et au soutien moral de tous les autres...