Table des matières

ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERMINALE S

Année scolaire 1998 / 1999

Lycée
Louis ARMAND
Poitiers

A

Sujets du baccalauréat

A.1 Sujet national 1998

EXERCICE 1 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, P(A) désigne la probabilité de A ; *p*(B / A) la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

   $p_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

   (a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

   (b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :
   C_1 : « en cinq minutes, un seul client se présente » ;
   C_2 : « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;
   E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence » ;

   (a) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{E})$.

   (b) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{E}/\mathrm{C}_2) = 0,42$ et calculer $\mathrm{P}(\mathrm{C}_2 \cap \mathrm{E})$.

   (c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.

EXERCICE 2 (*5 points*)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) :

$$\frac{z-2}{z-1} = z$$

   On donnera le module et un argument de chaque solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (2) :

$$\frac{z-2}{z-1} = i$$

   On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2.
   On suppose que M est distinct des points A et B.

   (a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.

   (b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4. (a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$$

   où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

   (b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (3) :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$$

   On cherchera les solutions sous forme algébrique.

PROBLEME (*10 points)*

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm).

On rappelle qu'une fonction f est majorée par une fonction g (ce qui signifie aussi que g est minorée par f) sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$.

Partie A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$; on notera C la représentation graphique de f et Γ celle de g.

On se propose de démontrer que f est minorée par g sur $[0; +\infty[$.

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Etudier le sens de variation de h sur $[0; +\infty[$; calculer $h(0)$. (L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)
2. En déduire que pour tout réel x positif ou nul,

   (1) $$\frac{2x}{x+2} \leqslant \ln(1+x)$$
3. Construire dans le même repère les courbes C et Γ et montrer qu'elles admettent en O une même tangente D que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes).

Partie B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \mapsto kx$, majorant la fonction : $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0; +\infty[$.

Soit f_k la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1. Étudier le sens de variation de f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par :
   $$f_1(x) = \ln(1+x) - x$$
2. Étudier la limite de f_1 en $+\infty$ et donner la valeur de f_1 en 0.
3. Montrer que pour tout réel x positif ou nul :

   (2) $$\ln(1+x) \leqslant x.$$
4. En déduire que si $k \geqslant 1$, alors : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx$
5. Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$.
   Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \dfrac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k. (L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)
6. En déduire les valeurs de k strictement positives telles que pour tout $x \geqslant 0$,
   $$f(x) \leqslant kx$$

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :
$$\mathrm{I} = \int_0^1 \ln(1+x)dx.$$
(On remarquera éventuellement que : $\dfrac{x}{x+2} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$).
En déduire le calcul de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 (x - \ln(1+x))\,dx$ puis de $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}\right) dx$.
Pour le calcul de K on pourra vérifier que $\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{2+x}$.
Interpréter géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes C, Γ et la droite D obtenues dans la partie A.

2. Soit u la fonction définie sur $[0;1]$ de la façon suivante :
$$u(0) = 1 \quad \text{et si } x \neq 0, \quad u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$
   (a) Démontrer que la fonction u est continue sur $[0;1]$.
   (b) On pose :
   $$\mathrm{L} = \int_0^1 u(x)dx.$$
   En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties A et B, montrer que :
   $$\int_0^1 \frac{2}{x+2}dx \leqslant L \leqslant 1.$$
   En déduire une valeur approchée de L à 10^{-1} près.

A.2 Sujet expérimental 1998

Première partie avec calculatrice
Problème (11 points)

Avertissement : l'usage d'une calculatrice n'est pas nécessaire pour traiter la partie C.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f(x) = x\ln x - 2\ln x - (\ln x)^2$$
on note f' sa fonction dérivée et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x$.
Dans un repère orthogonal donné, on appelle Γ la représentation graphique de f, Γ′ la représentation graphique de f', et Δ celle de g.

Voir figure 1 ces trois courbes sur l'écran d'une calculatrice pour x compris entre 0 et 5.

A - Etude de f

1. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

2. Montrer que

$$f'(x) = (1 - \frac{2}{x})(1 + \ln x)$$

3. En déduire le sens de variation de f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
   Donner un encadrement de longueur 10^{-2} pour les deux solutions non entières.

B - Intersection des représentations graphiques de f et de g

1. Reproduire sur la copie et compléter le tableau des valeurs suivant en donnant les résultats à 10^{-2} près.

Point de Γ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	$0,05$	$0,25$	e^{-1}	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$										

2. On veut déterminer si la courbe représentative de f coupe la droite Δ pour $0 < x < 7$. Que peut-on, à l'aide de sa calculatrice, conjecturer ?
   Préciser les éléments qui permettent de faire cette conjecture. (noter le type de calculatrice utilisée).

3. On s'intéresse aux solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ appartenant à l'intervalle $[7; +\infty[$.

   (a) Montrer que f' est une fonction croissante sur $[7; +\infty[$.

   (b) En déduire que $f'(x) > 2,1$ pour tout x appartenant à $[7; +\infty[$.

   (c) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique sur $[7; +\infty[$. (on pourra utiliser le sens de variation de la fonction h définie sur $[7; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - 2x$).

   Dans la suite, on notera α cette solution.

4. Mise en évidence de α sur un graphique.
   Choisir un nombre entier a tel que $a < \alpha < a + 5$.
   Sur papier millimétré, on trace un carré de $10\ cm$ de côté.
   Le sommet inférieur gauche représentera le point de coordonnées $(a; 2a)$ et le sommet diagonalement opposé le point de coordonnées $(a + 5; 2(a + 5))$.
   Tracer dans ce carré Γ et Δ.
   Mettre le nombre α en évidence sur le graphique et en donner une valeur approchée.

C - Calcul de probabilité.

Dans cette partie, on se réfère au tableau des valeurs construit dans la partie B.1)
Les trois questions sont indépendantes.
Pour chacune des trois questions, les choix effectués sont équiprobables.

1. On place les 4 points A, C, H et J dans un repère, et on les relie à l'aide de 3 segments formant une ligne brisée continue (par exemple la ligne brisée $AHJC$).

   (a) Combien de lignes brisées différentes peut-on former ainsi ?
   ($AHJC$ et $CJHA$ représentent la même ligne brisée)

(b) On choisit l'une de ces lignes brisées.
Quelle est la probabilité d'obtenir la représentation graphique d'une fonction ?

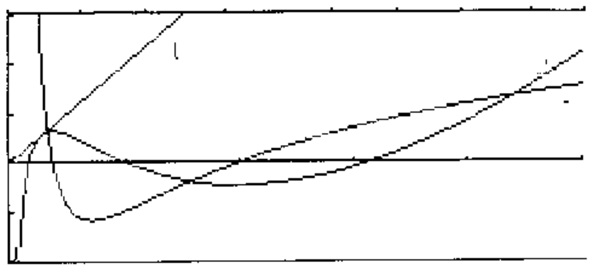
2. On choisit cinq points parmi les dix du tableau ; on les relie suivant l'ordre de leurs abscisses croissantes, à l'aide de segments formant une ligne brisée.
Quelle est la probabilité d'obtenir une ligne qui ne coupe pas l'axe des abscisses ? (le point D peut être choisi).

3. On choisit cinq points consécutifs parmi les dix (par exemple $BCDEF$).

(a) Combien y-a-t-il de possibilités ?

(b) On échange l'abscisse et l'ordonnée de chacun de ces cinq points.
Les nouveaux points ainsi obtenus sont joints à l'aide de segments dans l'ordre de leurs ordonnées croissantes.
Quelle est la probabilité d'obtenir la représentation graphique d'une fonction ?

Figure 1 (courbes Γ, Γ' et Δ) :



Seconde partie sans calculatrice

Exercice 1 (4 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

et représentée dans le repère de la figure 1.

1. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit la suite (U_n) définie pour $n > 0$ par :

$$U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x)dx$$

(a) Calculer U_1 et U_2. Exprimer U_n en fonction de n.

(b) Que représente graphiquement le nombre U_n ?

3. Montrer que (U_n) est une suite décroissante positive.
Calculer la limite de cette suite.

4. On pose $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$

   (a) Calculer S_1, S_2, S_3 et exprimer S_n en fonction de n.

   (b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct.
(Unité graphique $4cm$).
On désigne par θ un nombre réel tel que $-\pi < \theta < \pi$.
On appelle A, M et N les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$.
On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1, et par (C') le cercle de centre A et de rayon 1.

1. Tracer (C) et (C'), et placer A, M et N dans le cas ou $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2. Montrer que N appartient à (C') et donner la nature du triangle $OANM$. Déterminer un argument de $1 + e^{i\theta}$.

3. $u = 1 + e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.

   (a) Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

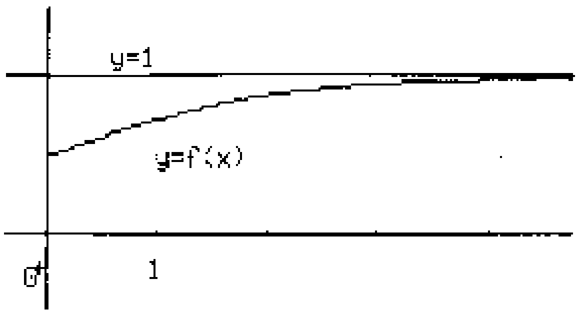
   $$z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + 2 + 2\cos\theta = 0$$

   En déduire la seconde solution de cette équation.

   (b) Quelle sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$?

4. On considère l'équation (E) : $z^2 - az + a = 0$ où a est un nombre réel tel que $0 < a \leqslant 4$. On nomme R le point d'affixe a, et T le milieu de $[OR]$.
   La perpendiculaire à l'axe réel passant par T coupe (C') en deux points U et U'.
   Montrer que les affixes de U et de U' sont les solutions de (E).

Figure 1 (courbe représentative de f) :



A.3 Guadeloupe 1998

EXERCICE I (4 points)

Un jeu de dominos est fabriqué avec les sept couleurs : *violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge*. Un domino se compose de deux cases portant chacune l'une des sept couleurs. Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino : c'est un double.

1. Montrer que le jeu comporte 28 dominos différents. Les 28 dominos, indiscernables au toucher, sont mis dans un sac.

2. On tire simultanément trois dominos du sac.
   Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux doubles parmi ces trois dominos ?

3. Dans cette question, on tire un seul domino. Calculer la probabilité des événements suivants :

   (a) J_2 : « Lejaune figure deux fois »
   (b) J_1 : « Le jaune figure une seule fois »
   (c) J : « Le jaune figure au moins une fois »

4. On effectue n tirages successifs d'un domino, en notant à chaque tirage la (ou les) couleur(s) obtenue(s) avant de remettre dans le sac le domino tiré et de procéder au tirage suivant ; les tirages sont indépendants.
   Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n, que J soit réalisé au moins une fois.
   Calculer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $\text{p}_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE II (5 points)

Partie A
On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$$

1. (a) Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que :

   $$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C},\ P(z) = \left(z^2+1\right)Q(z)$$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

Partie B
Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. Placer dans ce repère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = -i$, $z_C = -\sqrt{3}$ et $z_D = -\sqrt{3} - 2i$.
   Montrer que ces quatre points appartiennent au cercle de diamètre $[CD]$.

2. Montrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme C en D. Calculer une valeur entière approchée à un degré près d'une mesure de l'angle de cette rotation.

3. Calculer, sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$$

Interpréter géométriquement le module et l'argument de ce rapport.

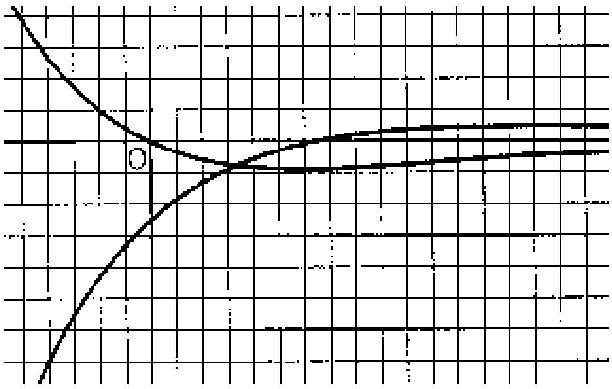
PROBLEME (11 points)

Partie A : Etude de fonctions

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = (x+1)\,e^{-x} \quad f_2(x) = -xe^{-x} \quad f_3(x) = (x-1)\,e^{-x}$$

On appelle C_1, C_2, C_3 leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Les courbes C_2 et C_3 sont données sur le graphique ci-dessous.



1. Etude de la fonction f_1.

   (a) Calculer la dérivée f_1' de f_1 et étudier son signe. En déduire les variations de f_1.

   (b) Déterminer les limites de f_1 en $+\infty$, en $-\infty$.

   (c) Dresser le tableau de variation de f_1.

2. Etude graphique.

   (a) Identifier sur la figure donnée les courbes C_2 et C_3 et placer sur le dessin le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   (b) Etudier la position relative des courbes C_1 et C_3.

   (c) Tracer C_1 dans le même repère que C_2 et C_3 sur la figure fournie.

3. Etude d'équations différentielles.

   (a) Montrer que f_1 est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y' + y = e^{-x}$$

(b) Montrer que f_1 est aussi solution de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad y'' + 2y' + y = 0$$

(c) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_2) . En déduire que f_2 et f_3 sont aussi des solutions de (E_2) .

(d) Parmi les solutions de (E_2) , quelles sont celles qui sont aussi solutions de (E_1) ?

Partie B : Etude d'aires liées à C_1 et C_2.
Pour n entier strictement positif, on appelle M_n le point de C_3 d'abscisse $n \ln 2$. On pose :

$$f(x) = f_1(x) - f_3(x)$$

pour tout x réel.

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire U_n du domaine plan limité par la courbe C_3, la courbe C_1 et les segments $[M_n, P_n]$ et $[M_{n+1}P_{n+1}]$ pour $n > 0$. P_n et P_{n+1} sont les projections orthogonales respectives de M_n et M_{n+1} sur $(O; \vec{\imath})$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire V_n du trapèze $P_n M_n M_{n+1} P_{n+1}$ pour $n > 0$. Montrer que le rapport $\frac{V_n}{U_n}$ est constant.

A.4 Polynésie 1998

EXERCICE 1 (5 points)

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et deux boules noires.
On tire au hasard une boule de l'urne A :

- si elle est noire, on la place dans l'urne B,
- sinon, on l'écarte du jeu.

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B.
On considère les événements suivants :
R$_1$: ‹‹ La boule tirée de A est rouge ››
N$_1$: ‹‹ La boule tirée de A est noire ››
R$_2$: ‹‹ La boule tirée de B est rouge ››
N$_1$: ‹‹ La boule tirée de B est noire ››

1. (a) Calculer les probabilités des événements R_1 et N_1.

   (b) Calculer les probabilités des événements ‹‹ R$_2$ sachant R$_1$ ›› et ‹‹ R$_2$ sachant N$_1$ ››. En déduire que la probabilité de R_2 est de $\dfrac{27}{50}$.

   (c) Calculer la probabilite de N_2.

2. On répète n fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de A, suivie du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes.

   Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99?

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ (unité graphique 2 cm). On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3+2i$.
On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$$

1. Calculer les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f. Placer les points A, O', B et B' dans le plan.
2. (a) Calculer, pour tout complexe z différent de 1, le produit

   $$(z'-1)(z-1)$$

   (b) En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

   $$\text{AM} \times \text{AM'} = 2 \text{ et } \left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\text{AM}}\right)+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\text{AM'}}\right) = \frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

3. Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C'). En préciser le centre et le rayon. Construire (C) et (C').
4. (a) Déterminer l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\text{AB}})$.

   (b) Démontrer que, si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A, passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.
5. On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (d).
   Placer son image P' sur la figure.

PROBLEME (10 points)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E_1) :

   $$y''+2y'+y=0.$$

   (**Remarque :** Cette question est désormais hors programme, voir la fin du problème pour de plus amples informations).

2. On considère l'équation différentielle (E_2):

$$y'' + 2y' + y = x + 3.$$

   (a) Vérifier que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x + 1$ est solution de (E_2).

   (b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction $g - p$ est solution de (E_1).

   (c) Déduire de **1.** et **2.(b)** les solutions de (E_2)

   (d) Déterminer la solution générale de (E_2) qui vérifie :

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad g'(0) = 2.$$

Partie B : Étude d'une fonction f et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle [0,+∞[par :

$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}.$$

On note ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

1. (a) f' et f'' désignant respectivement les dérivées première et seconde de f, calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.

   (b) Etudier le sens de variation de la dérivée f'.

   (c) Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

   (d) Calculer la limite de f en +∞.

   (e) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. (a) Démontrer que la droite ($\mathcal{D}$) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à ($\mathcal{C}$) et préciser la position relative de ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{C}$).

   (b) La courbe ($\mathcal{C}$) admet en un point A une tangente parallèle à la droite ($\mathcal{D}$). Déterminer les coordonnées de A.

3. Démontrer que l'équation de $f(x) = 2$ admet sur [0,+∞[une unique solution notée α , puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

4. (a) Construire la droite ($\mathcal{D}$), le point A défini au **2.(b)**, la courbe ($\mathcal{C}$) et la tangente en A à la courbe ($\mathcal{C}$).

   (b) Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Partie C : Recherche d'une approximation décimale de α

1. Démontrer que, sur [0,+∞[, l'équation : $f(x) = 2$ équivaut à l'équation :

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = x$$

2. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle [0 , 1] par :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

   (a) Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle [0 , 1] et réaliser le tableau de variations de la fonction h.

   (b) En déduire que, pour tout réel x de [0 , 1], $h(x)$ appartient à [0 , 1].

   (c) Calculer $h''(x)$ pour tout réel x de l'intervalle [0 , 1] ; étudier le sens de variations de h'.

   (d) En déduire que, pour tout réel x de [0 , 1],

$$0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{4}$$

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

pour tout entier naturel n.

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle [0 , 1].

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

   puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

   (d) Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et, à à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de u_p à 10^{-6} près. Que peut-on en déduire pour α ?

Remarque : La question **A.1.** n'est plus au programme. Nous admettrons, pour traiter la suite de la **partie A**, que les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions $x \mapsto (Ax + B)e^{-x}$ (A et B étant des constantes réelles).

A.5 Centresétrangers 1998

EXERCICE 1 (4 points)

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue n tirages successifs (n entier supérieur ou égal à 1) d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est blanche, on ne la remet pas.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie $n = 3$. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Si k est un entier compris entre 1 et 3, on note E_k l'événement
<<seule la k ième boule tirée est blanche>>.

1. Montrer que la probabilité de l'événement E_1 est $p(E_1) = \dfrac{5}{36}$.
2. Calculer les probabilités des événements E_2 et E_3.
   En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des 3 tirages.
3. Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule blanche ait été tirée en dernier ?

Partie B

On effectue maintenant n tirages.

1. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de tirer au moins une boule blanche en n tirages.
2. Quelles valeurs faut-il donner à n pour que : $p_n > 0,99$?

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
L'unité graphique est de 3 cm.
On considère les points B, C, D, E définissant le carré de sens direct $BCDE$ d'affixes respectives :

$$b = 1 - i \qquad c = -1 - i \qquad d = -1 - 3i \qquad e = 1 - 3i$$

1. Calculer |b|, |c|, |d|, |e|.
2. Soit Γ le cercle de centre O passant par B.
   Déterminer une équation du cercle Γ.
   On considère Q un point de Γ distinct de B et de C.
   L'affixe de Q est notée $q = x + iy$ (avec x et y réels).
3. Soient F et G les points du plan tels que $QBFG$ soit un carré de sens direct, c'est à dire tels que : $\left(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QG}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   On pose $Z = \dfrac{g - q}{b - q}$ où g est l'affixe du point G.
   Interpréter géométriquement le module et un argument de Z. En déduire Z.
4. Prouver que : $g = (1 + x + y) + i(1 - x - y)$. En déduire $|g|$ en fonction de x et de y.

5. En utilisant la question 2. exprimer $|g|$ en fonction de y.
6. A l'aide de considérations géométriques, prouver que : $|f| = |g|$, f étant l'affixe du point F.
7. Pour quelles valeurs de x et de y les points E, D, G, et F sont-ils sur un cercle de centre O ?
   Préciser le rayon de ce cercle. En déduire alors la nature du triangle QBC.

PROBLEME (11 points)

Le but du problème est l'étude d'une fonction g_k où k est un réel fixé qui vérifie : $0 < k < e$.
Dans la partie **A** on met en évidence certaines propriétés d'une fonction f qui seront utilisées dans la partie **B**.

Partie A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 - x)e^x - k$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f. Calculer $f(1)$.
3. (a) Établir que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, une notée α_k appartenant à l'intervalle $]-\infty, 1[$ et l'autre notée β_k appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$.
   (b) Montrer que :
   $$e^{\alpha_k} - k\alpha_k = (e^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$$
   On démontrerait de même que β_k vérifie l'égalité :
   $$e^{\beta_k} - k\beta_k = (e^{\beta_k} - k)(\beta_k - 1)$$
4. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - kx$.
   (a) Étudier le sens de variation de u.
   (b) On rappelle que $0 < k < e$. Justifier la propriété suivante :
   pour tout réel x, $e^x - kx > 0$.
2. Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g_k(x) = \frac{e^x - k}{e^x - kx}$$
   On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction g_k dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
   (a) Déterminer la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) Prouver que : $g_k'(x) = \dfrac{k\ f(x)}{(e^x - kx)^2}$.

(c) En déduire le tableau de variation de g_k. Calculer $g_k(1)$.

3. On nomme M_k et N_k les points de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisses respectives α_k et β_k.

   (a) En utilisant la question **3**.b)(**Partie A**), montrer que :

$$g_k(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_k - 1}$$

   (b) Donner de même $g_k(\beta_k)$.

   (c) Déduire de la question précédente que lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe $\mathcal{H}$ dont on donnera une équation.

4. **Représentations graphiques pour des valeurs particulières de k**

   (a) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

   (b) Prouver que $\alpha_2 = 0$.

   (c) En prenant comme unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées, construire les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{H}$ sur un même graphique.
   On prendra $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = 1,8$; $\beta_2 = 1,6$.

A.6 Pondichéry 1998

EXERCICE I (4 points)

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires.
On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.

   a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?

   b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?

   c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?

   d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.
On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On considère les événements suivants :
R : << Les boules tirées sont rouges >>;
D : <<Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur >>;
B : <<La boule tirée dans l'urne U_2 est rouge >>.

   a. Calculer la probabilité de l'événement R.

b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur?

c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(\mathrm{B})$ de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

EXERCICE II (5 points)

On considère le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^4 + 17\,z^2 - 28\,z + 260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\mathrm{P}(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4\,z + 20).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

3. Placer dans un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4i,\ n = -2 - 4i,\ p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$.

4. **a.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m} = i$. Placer son image K.

b. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

5. **a.** Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.

b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.

c. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

PROBLEME (11 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; unité graphique : 4 cm.

Partie A

⋆ **Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;\ +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0\,;\ +\infty[$.
On note α cette solution.

b. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

⋆ **Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$**

1. a. Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. a. Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. a. Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

b. En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

5. a. Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)\,u(x)}{xe^x + 1} \quad \text{avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$

b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (T).

6. Tracer $\mathcal{C}$ et (T).

Partie C

⋆ **Calcul d'aire et étude d'une suite**

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;\,+\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question **B.2.**

2. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Calculer, en cm^2, l'aire A du domaine $\mathcal{D}$.
Donner une valeur décimale au mm^2 près de l'aire A.

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

a. Calculer v_0, v_1 et v_2.
On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0, v_1 et v_2.

b. Interpréter graphiquement v_n.

c. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n = 1$.

d. Déterminer la limite de la suite (v_n).

A.7 Amérique du Nord 1998

EXERCICE 1 (5 points)

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1. Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.

   (a) On suppose ici $n = 10$. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis.
   Déterminer la loi de probabilité de X.

   (b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3.
   Calculer la probabilité, notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

2. Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.

   (a) On suppose ici $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux billets choisis.
   Déterminer la loi de probabilité de Y.

   (b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3.
   Calculer la probabilité, notée q_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

3. (a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}.$$

(b) En remarquant que pour tout entier n, $n-2$ est inférieur à $n-1$, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on ait

$$p_n - q_n < 10^{-3}$$

(c) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 4 cm), on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Pour chaque point M du plan, d'affixe z, M$_1$ d'affixe z_1 désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M' d'affixe z' l'image de M$_1$ par la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.
Enfin, on note T la transformation qui à chaque point M associe le point M'.

1. (a) Démontrer : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.
   (b) Déterminer l'image du point B.
   (c) Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.
2. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels.
   (a) Pour z non nul, calculer la partie réelle du quotient $\frac{z'}{z}$ en fonction de x et de y.
   (b) Démontrer que l'ensemble (E), des points M du plan tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, est un cercle (C), dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points.
   Tracer (E).
3. Dans cette question on pose $z = 1 + i$.
   (a) Vérifier que M appartient à (E). Placer M et M' sur la figure.
   (b) Calculer le module de z'.
   (c) Calculer l'aire, en cm^2, du triangle OMM'.

PROBLEME (10 points)

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n\ln(x)}{x^2}$$

PARTIE A
I : Etude des fonctions f_n

1. Calculer $f'_n(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur et $n - 2 - 2n\ln(x)$.

2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$
3. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$
4. Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II : Représentation graphique de quelques fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 5 cm). On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1. Tracer (C_2) et (C_3) .
2. (a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n?
   (b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_n) à partir de (C_2) et (C_3) .

PARTIE B
Calculs d'aires

1. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale :
$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$
2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
3. On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C_n) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 1$ et $x = e$.
   (a) Calculer A_2.
   (b) Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

PARTIE C
Etude sur l'intervalle $]1; +\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$.
Dans toute la suite, on prendra $n \geqslant 3$.

1. (a) Vérifier que, pour tout n,
$$e^{\frac{n-2}{2n}} > 1 \text{ et } f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$$
   (b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1; e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty\right[$ exactement une solution notée α_n.
3. On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n) .
   (a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geqslant 1$.
   (b) En déduire que, pour $n \geqslant 8$, on a $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n) .

A.8 Asie 1998

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ayant comme unité graphique 3 cm. Les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique **et** sous forme exponentielle $(\rho e^{i\theta})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$
On pose : $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.
Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle et placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan $\mathcal{P}$.

2. Soit *r* la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Calculer l'affixe z_3 du point $M_3 = r\,(M_2)$.
Placer M_3 sur la figure précédente.

3. Soit *t* la translation dont le vecteur $\overrightarrow{w}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.
Calculer l'affixe z_4 du point $M_4 = t\,(M_2)$.
Placer M_4 sur la figure précédente.

4. Soient $z_5 = \dfrac{i}{2}(1 + i\sqrt{3})$ et $z_6 = \dfrac{2}{i-\sqrt{3}}$.
Exprimer z_5 et z_6 sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
Placer les points M_5 et M_6 d'affixes respectives z_5 et z_6 sur la figure.

5. (a) Calculer z_k^6 pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   (b) Ecrire $z^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.

Exercice 2 (5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. $\mathbb{N}^*$ *est l'ensemble des entiers strictement positifs.*
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :
$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1, e[$ et pour tout entier naturel n, on a :
$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$$
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

   (c) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n \geqslant 0$
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(n+1)I_n \leqslant e$
   (c) En déduire la limite de I_n.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Problème (11 points)

Partie A

Soit la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, qui, à tout x, associe :

$$g(x) = e^x(x-1) + x^2.$$

1. **a.** Montrer que la dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est :

$$g'(x) = x(e^x + 2).$$

b. Déterminer les limites de g en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$.

c. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Montrer que α est dans l'intervalle $\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}.$$

1. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0\,;\,+\infty[$, et que, par suite, l'équation $f(x) = x$ admet α pour solution unique sur I.

2. **a.** Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur $[0\,;\,+\infty[$ dans un repère orthonormal (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f(x)$ appartient à I.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = f(u_{n-1}) \quad \text{pour tout } n > 1 \end{cases}$$

   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \in I$.

   b. Montrer que, pour tout $x \in$ I,

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

   c. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\text{pour tout } n > 1, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|.$$

   d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   e. En déduire que (u_n) converge vers α

   f. A priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ?

3. En utilisant la décroissance de f, montrer que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-7}.

A.9 Remplacement 1998

Exercice I

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Il n'est pas demandé de faire de figure.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.
On considère les quatre points $A,\ B,\ C$ et I de coordonnées respectives :

$$A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \qquad I\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points $A,\ B$ et C.

2. Soit Q le plan d'équation :

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

et Q' le plan de repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{k})$.

a. Pourquoi Q et Q' sont-ils sécants ?

b. Donner un point E et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'.

3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$J\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \qquad K\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère S et de la droite (JK).

Exercice II

1. On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.

   (a) Calculer $P(4)$.

   (b) Résoudre dans C l'équation : $P(z) = 0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tel que : $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 2\ cm$.
   Soient A, B, C les points d'affixes respectives :

   $$a = 4 \qquad b = 1 + i\sqrt{3} \qquad c = 1 - i\sqrt{3}$$

   (a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

   (b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$

   On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

   (a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

   (b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$

   (a) Montrer que le quadrilatère $COFH$ est un carré.

(b) Calculer l'affixe du point H.

(c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

PROBLÈME (11 points)

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

2. Déterminer la solution φ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = -e$$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -xe^{2x+1}.$$

(a) Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?

(b) Etudier le sens de variation de de f.

(c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(d) Dresser le tableau de variation de f.

(e) On appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 4 cm).
Quelle est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point O ?
Ecrire une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse (-1).

(f) On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x.$$

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) ?

2. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + exe^x.$$

(a) Etudier le sens de variation de h.
En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

(b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Γ).

(c) Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathcal{C})$ et (Γ).

3. m désigne un réel quelconque et M désigne le point de la courbe (Γ) d'abscisse m.

   (a) Ecrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.

   (b) La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.
   Calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J du segment [AB].

   (c) Prouver que J appartient à $(\mathcal{C})$.

   (d) Tracer D et J pour $m = 0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque.
   A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'intégrale :

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^x te^{2t}dt.$$

2. Soit x un réel négatif.
   Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées (u, v) vérifient :

$$\begin{cases} x \leqslant u \leqslant 0 \\ 0 \leqslant v \leqslant f(x) \end{cases}$$

3. Calculer $\mathcal{A}(-1)$.

4. $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?

A.10 Sujet expérimental 1997

PROBLEME commun.
(avec calculatrice) 11 points
A. Résolution approchée d'une équation

1. On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(x) = 3\ln x - x$$

   (a) Déterminer les limites de h en 0 et en $+\infty$.

   (b) Etudier les variations de h. Montrer que h admet un maximum, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près. Aucune courbe représentative n'est demandée.

2. Déduire de l'étude précédente que l'équation :

$$(E) \qquad 3\ln x = x$$

   admet deux solutions, l'une, notée α, élément de l'intervalle $]0, 3[$, l'autre, notée λ, élément de l'intervalle $]3, +\infty[$.

3. Montrer que $1,85 \leqslant \alpha \leqslant 1,86$.

4. On désigne par I l'intervalle $[4,5]$.

   (a) Montrer que la fonction ϕ définie sur I par $\phi(x) = 3\ln x$ transforme tout élément de I en un élément de I et que λ est élément de I.

   (b) Montrer que pour tout élément x de I, on a $\left|\phi'(x)\right| \leqslant 3/4$.

   (c) On définit la suite (u_n) d'éléments de I par : $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} = 3\ln u_n$$

   Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$|u_n - \lambda| \leqslant (3/4)^n$$

   En déduire que la suite (u_n) a pour limite λ.

   (d) Déterminer un entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de λ à 10^{-3} près. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de λ.

B. Etude d'une fonction

On considère la fonction f, définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On prendra pour unité graphique 4cm.

1. Etudier les variations de f, en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Déterminer une équation de la tangente T à C en son point A d'abscisse 1.

3. Tracer C et T.

4. A tout entier naturel non nul n on associe l'équation d'inconnue x :

   $$(\mathcal{E}_n) \qquad f(x) = \frac{1}{n}$$

   (a) Montrer que, pour tout $n = 1$ ou $n = 2$, cette équation n'admet pas de solution.

   (b) Montrer que, pour n supérieur ou égal à 3, l'équation $(\mathcal{E}_n)$ admet deux solutions, qu'on désignera par α_n et λ_n, où $\alpha_n \leqslant \lambda_n$.

   (c) Montrer que les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_n)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction exponentielle avec la courbe représentative de la fonction puissance $x \to x^n$.

C. Etude des suites (α_n) et (λ_n)

1. On se propose dans cette question de montrer que, pour tout x positif ou nul, on a :

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

   (a) On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction g par

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)$$

   Etudier le sens de variation de g.

   (b) En déduire le signe de g. Montrer que pour tout réel x positif ou nul on a

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x)$$

   (c) Montrer qu'on a également, pour tout x positif ou nul, $x \geqslant \ln(1+x)$.

2. Etude de α_n pour $n \geqslant 4$.

   (a) En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout réel positif x, on a

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} \leqslant x$$

   En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$ on a

$$f(1+\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$$

   (b) Montrer que, pour tout x élément de l'intervalle $[0, 1/2]$ on a

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} \geqslant \frac{1}{2}x$$

   En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$ on a

$$f(1+\frac{2}{n}) \geqslant \frac{1}{n}$$

   (c) Montrer que, pour $n \geqslant 4$, $1 + 1/n \leqslant \alpha_n \leqslant 1 + 2/n$. Quelle est la limite de la suite (α_n) ?

3. Etude de λ_n

   (a) Montrer que, pour $n \geqslant 4$, $f(n) \geqslant 1/n$.

   (b) Comparer n et λ_n puis déterminer la limite de la suite λ_n.

Exercice 1 ; commun
(sans calculatrice) 4 points

Une petite association organise une souscription qui prend la forme d'une tombola. Au cours d'une réunion, 100 enveloppes indiscernables sont mises en vente au prix unitaire de 100 F. 5 de ces enveloppes permettent chacune de gagner 500 F, 20 rapportent chacune 100 F, les autres sont perdantes.

1. *Le point de vue des organisateurs*

   (a) La vente de 60 enveloppes étant assurée, l'opération est-elle à coup sûr rentable ?

   (b) Combien d'enveloppes faut-il vendre pour réaliser à coup sûr un bénéfice de $4\,000$ F ?

2. *Le point de vue du premier souscripteur*
   Pour le premier souscripteur, l'achat d'enveloppes peut être assimilé à un tirage sans remise en situation équiprobabilité.

   (a) Cette personne achète une enveloppe. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X représentant son gain (différence entre la somme éventuellement perçue et la somme engagée, 100 F).

   (b) Cette personne achète deux enveloppes. Soit Y la variable aléatoire représentant son gain (différence entre la somme éventuellement perçue et la somme engagée, 200 F). Quelles sont les valeurs prises par Y ?
   Montrer que $P(Y = 200) = 5590/9900$.
   Présenter sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. On présentera les probabilités utiles sous forme de fractions de même dénominateur.

Exercice 2
élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité ; 5 points
(sans calculatrice)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 5cm. On désigne par A et K les points d'affixes respectives 1 et $1 + i$, et par I et J les points d'affixes respectives i et $-i$.
On rappelle que, si P, Q et R sont trois points quelconques du plan, distincts et d'affixes respectives p, q et r, on a l'égalité :

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \arg\left(\frac{r-p}{q-p}\right) \qquad (\text{modulo } 2\pi)$$

1. On désigne par Γ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère sur ce cercle un point N distinct de I et J. On note t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON})$.

   (a) Quelle est la nature du triangle INJ ?

   (b) Montrer que, pour tout réel t tel que $t \neq \pi/2 + k\pi$ (où k est un entier relatif), le nombre complexe :

   $$\frac{e^{it} + i}{e^{it} - i}$$

   est imaginaire pur.

Dans la suite, on désigne par C le cercle de centre A et de rayon 1.

2. On nomme r la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. Tracer C et son image C' par la rotation r sur une même figure, qui sera complétée par la suite.

   (a) On note M' l'image par r d'un point quelconque M du plan. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.

   (b) Déterminer l'antécédent H de K par r.

3. Dans cette question, M est un point quelconque du cercle C, distinct de H et de K. On note t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$. Ainsi l'affixe z de M s'écrit : $z = 1 + e^{it}$.

   (a) Montrer que :

$$\frac{z' - (1+i)}{z - (1+i)} = i\frac{e^{it} + i}{e^{it} - i}$$

   (b) Montrer finalement que les points M, K et M' sont alignés.

   (c) En déduire une construction de M' connaissant M.

B

Exercices

B.1 Intégration

B.1.1 Japon 1996 (modifié)

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

et on pose

$$I_n = \int_1^e f_n(x)\, dx$$

1. Calculer la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1 + \ln x}{x}$. En déduire I_1.

2. En utilisant une intégration par parties montrer que :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

En déduire I_2.

3. En utilisant la formule précédente, montrer par récurrence que pour tout entier n non nul :

$$\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

4. En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1, e]$, montrer que pour tout n entier naturel non nul :

$$0 \leqslant I_n \leqslant 1$$

En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

B.1.2 Amérique du Sud 1995

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien, et

$$\text{pour } n = 0 \quad I_0 = \int_1^e x^2 \, dx.$$

1. Calculer I_o.
2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3. \qquad (1)$$

   En déduire I_2.
4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive.
   (b) Déduire de l'égalité (1) que, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n \leqslant \frac{e^3}{n+1}$$

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

B.1.3 Sportifs de haut niveau 1994

On considère la suite I définie par :

$$I_0 = \int_0^1 e^x \, dx$$

et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n \, e^x \, dx$$

1. (a) Calculer

$$\int_0^1 (1-x)^n \, dx$$

   (b) A l'aide de l'encadrement :

$$1 \leqslant e^x \leqslant e$$

   valable sur l'intervalle $[0,1]$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

(c) Montrer que la suite I est convergente et déterminer sa limite.

2. (a) Calculer I_0, puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

   (b) Etablir, en intégrant par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!} \tag{1}$$

3. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$J_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

   (a) En utilisant les relations (1), exprimer J_n à l'aide de I_0 et I_n.

   (b) En déduire la limite J de la suite (J_n) .

   (c) Justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant J - J_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$$

B.1.4 Polynésie 1991

Dans cet exercice, on se propose d'encadrer l'intégrale :

$$K = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\,dx$$

1. En étudiant les variations des fonctions :

$$g : x \mapsto e^{-x} + x - 1 \text{ et } h : x \mapsto 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$$

   sur l'intervalle $[0,1]$, démontrer que pour tout x de $[0,1]$,

$$1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2} \tag{1}$$

2. Déduire de 1. un encadrement de e^{-x^2} pour x élément de $[0,1]$, puis montrer que pour tout x de $[0,1]$:

$$1 - x \leqslant \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leqslant 1 - x + \frac{x^4}{2\,(1+x)} \tag{2}$$

3. (a) Montrer que pour tout x de $[0,1]$:

$$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

   (b) Déduire alors de (2) que :

$$\frac{1}{2} \leqslant K \leqslant \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$$

   Donner une valeur approchée de K à 3×10^2 près.

B.2 Probabilités

B.2.1 Groupe II bis 1997

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.

   (a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

   (b) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au cours de ces quatre tirages.

2. On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise. Répondre aux mêmes questions qu'à la question 1.

3. n étant un nombre entier strictement positif, on effectue n tirages successifs avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.

   (a) Calculer P_1, P_2, P_3 et P_n.

   (b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n.

B.2.2 Paris 1997

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième dé est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1. On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.

On note A l'évènement : " les deux dés tirés sont normaux "

On note B l'évènement : " les deux faces supérieures sont numérotées 6.

1. (a) Définir l'évènement contraire de A, qu'on notera $\overline{\mathrm{A}}$.

   (b) Calculer les probabilités de A et de $\overline{\mathrm{A}}$.

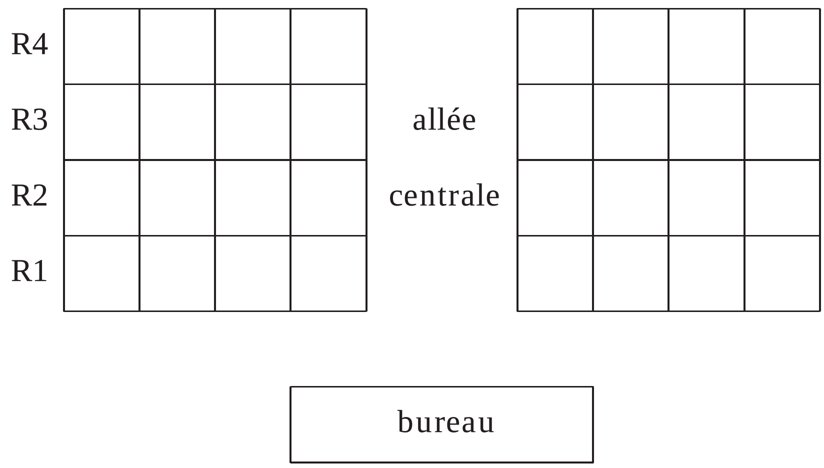
2. (a) Calculer $p\,(\mathrm{B}/\mathrm{A})$, probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $p\,(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})$.

   (b) Calculer $p\,(\mathrm{B})$.

3. Calculer $p\,(\mathrm{A}/\mathrm{B})$, probabilité de A sachant que B est réalisé.

B.2.3 Pondichéry 1997

Voici le plan de la salle 308 du lycée Dupont :



Le premier jour de l'année scolaire, les élèves de la classe de TS1 sont invités par leur professeur principal à s'installer au hasard des places disponibles dans cette salle. La classe de TS1 comporte 28 élèves.

1. (a) Quel est le nombre de répartitions possibles des places inoccupées ?
   (b) Calculer à 10^{-1} près, les probabilités des évènements suivants :
   A : " les huit places du rang R4 sont toutes occupées "
   B : "Il y a autant d'élèves à gauche qu'à droite de l'allée centrale "

2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme fractionnaire. Soit X la variable aléatoire " nombre de places inoccupées au rang R4 ".

   (a) Donner la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer son espérance mathématique.

B.2.4 Polynésie 1997

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes. Tous les résultats de calcul de probabilité seront donnés sous forme d'une fraction irréductible.
Une classe de terminale S d'un lycée compte 30 élèves dont 10 filles.

1. A chaque séance du cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard trois élèves. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : " Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons "
   B : " Les trois élèves interrogés sont de même sexe "
   C : " Il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés. "

2. Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles. On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexes différents. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   D : " Les deux délégués sont internes "
   E : " Un seul de deux délégués est interne ".

3. A la fin de chaque séance le professeur désigne au hasard un élève qui effacera le tableau. Un même élève peut être désigné plusieurs fois.
   (a) Déterminer la probabilité P_n pour que le tableau soit effacé au moins une fois par une fille à l'issue de n séances.
   (b) Déterminer le nombre minimal de séances pour que $P_n \geqslant 0,9999$.

B.2.5 Amérique du Nord 1997

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7. On note, pour n entier naturel ou nul :
G_n l'évènement " Juliette gagne la n-ième partie "
P_n l'évènement " Juliette perd la n-ième partie "

1. (a) Déterminer les probabilités $p\left(G_1\right)$, $p\left(G_2/G_1\right)$ et $p\left(G_2/P_1\right)$. En déduire la probabilité $p\left(G_2\right)$.
   (b) Calculer $p\left(P_2\right)$.
2. On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = p\left(G_n\right)$ et $y_n = p\left(P_n\right)$.
   (a) Déterminer pour n entier naturel non nul les probabilités $p\left(P_{n+1}/G_n\right)$ et $p\left(G_{n+1}/P_n\right)$.
   (b) Montrer que pour tout n entier naturel non nul :
$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$$
3. Pour n entier naturel non nul, on pose
$$v_n = x_n + y_n \text{ et } w_n = 4x_n - 3y_n$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.
   (b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.
4. (a) Déduire du 3. l'expression de x_n en fonction de n.
   (b) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

B.2.6 Remplacement 1996

Un livreur de pizzas doit servir un client qui se trouve à 6 km et qui exige d'être servi à 20 h 00 précisément. Pour se déplacer, il utilise un scooter qui roule constamment à 36 km/h. (on néglige les phases d'accélération et de décélération). Sur son trajet, il va rencontrer 2 deux tricolores non synchronisés et indépendants.

S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.

S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu :

– la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$.

– la probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{4}$.

Soit T la variable aléatoire " temps en minutes mis par le livreur pour arriver à destination ".

1. (a) Calculer, en justifiant le calcul, la probabilité $p\left(T=11\right)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de T.
2. Calculer l'espérance mathématique de T.
3. Représenter la fonction de répartition de T.
4. Le livreur part à 19 h 49.
   (a) Quelle est la probabilité pour le livreur d'arriver en retard ?
   (b) Quelle est la probabilité pour le livreur d'arrive en avance ?

B.2.7 Guadeloupe 1996

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction.
Monsieur Martin a 17 cravates : 12 cravates à motifs et 5 cravates unies. Il range toujours 10 cravates (7 à motifs et 3 unies) du côté gauche de son armoire et 7 cravates (5 à motifs et 2 unies) de l'autre côté.

1. Monsieur Martin devant partir en voyage pendant 3 jours a besoin de 3 cravates. Pour cela, il choisit 3 cravates simultanément et au hasard du côté gauche de son armoire. Soit X le nombre de cravates à motifs qu'il choisit :
   (a) Calculer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer $E\left(X\right)$.
2. Lorsqu'il ne voyage pas, pour déterminer la cravate qu'il portera dans la journée, Monsieur Martin utilise la méthode suivante : il choisit un côté de l'armoire au hasard, de façon équiprobable, et il prend ensuite une cravate, toujours au hasard, sur le côté choisi. On considère les évènements suivants :
   G : ‹‹ Monsieur Martin choisit le côté gauche de l'armoire. ››
   D : ‹‹ Monsieur Martin choisit le côté droit de l'armoire. ››
   M : ‹‹ Monsieur Martin tire une cravate à motifs. ››
   U : ‹‹ Monsieur Martin tire une cravate unie. ››
   (a) Calculer $p\left(\mathrm{M}\right)$.
   (b) Calculer $p\left(\mathrm{G}/\mathrm{M}\right)$, probabilité conditionnelle de G sachant que M est réalisé.
3. Tous les jours, pendant n jours, Monsieur Martin effectue son choix en suivant la méthode indiquée en 2. Chaque soir, il remet la cravate utilisée pendant la journée à sa place.
   (a) Calculer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'il ait pris au moins une cravate à motifs.
   (b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

B.2.8 Groupe II bis 1996

On dispose de deux urnes :
• une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires;
• une urne U_2 dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.
Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobable.

1. Montrer que la probabilité de l'événement E : <<parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches >>est égale à $0,46$.

2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   (b) Le joueur doit verser $2,50$ F avant d'effectuer le tirage ; il reçoit à l'issue du tirage 1 F par boule blanche obtenue. Le jeu est-il équitable ?

3. Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré deux boules blanches.

4. On ne considère que l'urne U_1, de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules. On nomme succès le tirage de deux boules blanches. On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne). Déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès sur les dix tirages.

B.2.9 La Réunion 1996

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public :
Dans une urne se trouvent placées 7 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher.
Le joueur prend une boule au hasard ; si cette boule est noire, le jeu s'arrête ; si cette boule est rouge, le joueur prend une deuxième boule (sans remettre la première boule tirée dans l'urne) et le jeu s'arrête.
Une boule noire tirée apporte au joueur 1 F et chaque boule rouge 2 F.
Pour faire un jeu, le joueur paie 2 F. On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur (c'est à dire la différence entre la somme rapportée par les boules tirées et le prix du jeu).

1. (a) Quelles sont les valeurs que X peut prendre ?

   (b) Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

2. Un joueur fait trois jeux. Ceux-ci se déroulent dans des conditions identiques (après chaque jeu, les boules tirées sont remises dans l'urne).
   Déterminer la probabilité des événements suivants :
   A : le joueur perd 3 F.
   B : le joueur perd 1 F.
   C : le gain du joueur est nul.
   En déduire la probabilité de l'événement D : <<le joueur a un gain strictement positif >>.

B.2.10 Nouvelle Calédonie 1996

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. Une urne U contient 4 jetons blancs et 3 noirs. On tire successivement les 7 jetons sans remise.
   X est la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jeton blanc apparaît au k-ième tirage.
   Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
2. Une autre urne U′ contient 17 jetons blancs et 18 noirs.
   On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître.
   Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U, sinon on tire un jeton de l'urne U′.
   (a) Démontrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à 0,5.
   (b) On a tiré un jeton blanc, calculer la probabilité pour qu'il provienne de U.

B.2.11 La Réunion 1995

Un code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0,1, ...,9.

1. (a) Quel est le nombre de codes possibles ?
   (b) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux ?
2. Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio.
   Il sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 9, 9 et 5, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.
   (a) Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?
   (b) Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 2 minutes avant de pouvoir tenter un second essai ; le delai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, il est de 8 minutes...(le délai d'attente double entre deux essais successifs).
   Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures ?

B.2.12 Exercice complémentaire

On considère le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

Pour déterminer les coefficients $a,\ b,\ c$ on lance trois fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et les numéros sortis donnent les valeurs de $a,\ b,\ ,c$. Calculer les probabilités des événements suivants :

1. E_1 : le système a une infinité de solutions

2. E_2 : le système n'a aucune solution
3. E_3 : le système a une seule solution
4. E_4 : le système a une seule solution qui est $(3;0)$

Les résultats seront donnés sous la forme de fractions de dénominateur 108.

B.3 Nombres complexes

B.3.1 Groupe I bis 1997

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, ayant comme unité graphique 4 cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, -1 et i.
On considère la fonction f de $\mathcal{P}-\{A\}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de $\mathcal{P}-\{A\}$, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z+1}{z-2i}$$

1. (a) Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
   (b) Déterminer l'affixe du point C' image de C. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?
   (c) Montrer que le point C admet un antécédent unique par f que l'on notera C''. Quelle est la nature du triangle BCC'' ?
2. Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de z'.
3. Déterminer, en utilisant la question précédente, quels sont les ensembles suivants :
   (a) L'ensemble E_a des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif.
   (b) L'ensemble E_b des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.
   (c) L'ensemble E_c des points M dont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

B.3.2 Groupe II bis 1997

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, (unité graphique 3 cm).
On désigne par A le point d'affixe i.
A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z^2}{i-z}$$

1. Déterminer les points M confondus avec leur image M′.

2. Étant donné un complexe z distinct de i, on pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y' réels.
   Montrer que :
   $$x' = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1-y)^2}$$
   En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M dont l'image M′ est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble $\mathcal{E}$.

3. Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM′. En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que M et M′ soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner l'ensemble $\mathcal{F}$.

4. Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. M′ est le point d'affixe z' correspondant, et G l'isobarycentre des points A, M et M′.
   Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.
   Montrer que G est situé sur un cercle un centre O dont on précisera le rayon. Après avoir comparé les angles $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OG}:)$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}:)$, effectuer la construction de G. En déduire celle de M′.

B.3.3 Antilles 1997

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité graphique est 1 cm.
On considère les points A, B , C d'affixes respectives :

$$z_A = (3\sqrt{3} - 2) + i(3 + 2\sqrt{3})$$
$$z_B = (-\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1)$$
$$z_C = (1 - 4\sqrt{3}) + i(-4 - \sqrt{3})$$

1. On se propose de placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ à l'aide du compas. Pour cela on considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle de mesure $\frac{-2\pi}{3}$.
   (a) Donner l'écriture complexe de $\mathcal{R}$.
   (b) Vérifier que $\mathcal{R}$ transforme le point A en le point A' d'affixe : $4 - 6i$.
   On admettra que $\mathcal{R}$ transforme les points B et C en les points B' et C' d'affixes respectives $2 + 2i$ et $-2 + 8i$.
   (c) Placer les points A', B', C' puis, à l'aide du compas, les points A, B, C. (La construction de A sera justifiée).

2. (a) Calculer $z_A - z_B + z_C$.
   (b) En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$.

3. Soit l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

   (a) Vérifier que B appartient à $\mathcal{C}$.

   (b) Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathcal{C}$.

4. Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que :

$$2\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\|$$

B.3.4 Polynésie 1997

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes $z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis z_n en fonction de z_0 et n.
   Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).

3. Déterminer la distance OM_n en fonction de n.

4. (a) Montrer que l'on a $M_nM_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout n entier naturel.

   (b) On pose $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$
   (C'est à dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$). Déterminer L_n en fonction de n puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ en fonction de n.
   Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?

B.3.5 Centres étrangers 1997

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A d'affixe $2i$, B d'affixe 2 et I milieu de [AB] (on prendra 2 cm d'unité graphique). On considère la fonction f qui, à tout point M distinct de A, d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{2z}{z - 2i}$$

1. (a) Montrer que f admet comme points invariants le point O et un deuxième point dont on précisera l'affixe.

   (b) Déterminer les images par f des points B et I.

2. Soit M un point quelconque distinct de A et O.
   Etablir que :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ OM' = 2\,\dfrac{MO}{MA} \end{cases}$$

3. Soit (Δ) la médiatrice de [OA].
   Montrer que les transformés par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera.

4. Soit (Γ) le cercle de diamètre [OA], privé du point A. Montrer que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (D) que l'on précisera.

5. Tracer (Δ), (Γ),(C), (D) sur la même figure.

B.3.6 Japon 1997

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1. Soit le polynôme P tel que pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$$

   Déterminer les réels u et v tels que

$$P(z) = (z-2)\left(z^2 + uz + v\right)$$

   et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. On note α la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de α. Soient A, B et C les points d'affixes respectives α, β et 2, I le milieu de $[AB]$ et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'affixe du point $r(B)$ et en déduire la nature du quadrilatère $OACB$.

3. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ privé du point C dans $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z ($z \neq 2$) associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z-(1+i)}{z-2}$$

   (a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
   Déterminer le point E tel que $f(E) = C$.

   (b) Quelles distances représentent les réels $|z-(1+i)|$ et $|z-2|$?
   En déduire que si M appartient à la médiatrice de $[AC]$, M' appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

B.3.7 La Réunion 1996

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :

   (a) $z^2 - 2z + 5 = 0$.

   (b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ les points $A,\ B,\ C,\ D$ d'affixes respectives :

$$z_A = 1+2i,\ z_B = 1+\sqrt{3}+i,\ z_C = 1+\sqrt{3}-i,\ \text{et } z_D = 1-2i.$$

   (a) Placer les points $A,\ B,\ C,\ D$ et préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.

   b. Vérifier que

$$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$$

   Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?

   c. Prouver que les points $A,\ B,\ C,\ D$ appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

3. On considère l'équation :

$$z^2 - 2(1+2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

   où θ désigne un nombre réel quelconque.

   a. Résoudre l'équation (1) dans $\mathbb{C}$.

   b. Montrer que les images des solutions appartiennent au cercle Γ.

B.3.8 Nouvelle Calédonie 1996

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et 4.
L'application f associe à tout point M d'affixe z de $\mathcal{P}$, distinct de A, le point M′ d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{z-4}{z-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $i\sqrt{2}$.
   Déterminer l'affixe de C′ = f(C).

2. Démontrer que f admet deux points invariants I et J. (On notera I celui d'ordonnée positive.)
   Placer les points I, J, C et C′.

3. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X, Y réels.

   (a) Déterminer X et Y en fonction de x et y.

   (b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.

   (c) Déterminer et construire l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

4. Donner une interprétation géométrique de $\mid Z \mid$, $\mid z - 4 \mid$, $\mid z - 1 \mid$.
   En déduire l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $\mid Z \mid = 1$.
   Construire D.

B.3.9 Sportifs de haut niveau 1996

1. (a) i. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z + 9 = 0$$

   On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées, z_1 étant la solution de partie imaginaire positive.

   ii. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2, et donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2.

   (b) Placer dans le plan P rapporté à un repère orthonormal direct $(0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 1 cm, les images M_1 et M_2 de z_1 et z_2.
   Expliquer pourquoi M_1 et M_2 sont situés sur le cercle Γ de centre O de rayon 3, que l'on tracera.

2. On considère la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

   On considère les points A et B d'affixes

$$z_A = 3e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_B = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

   et A' et B' leurs images par f.

   (a) Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

   (b) Déterminer sous forme exponentielle les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A' et B'.
   Placer les points A, B, A' et B' sur la figure.
   Expliquer pourquoi ces points sont sur le cercle Γ.

3. Calculer $\arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)$ et montrer que B et A' sont symétriques par rapport au point O. En déduire que le triangle ABA' est rectangle.

B.3.10 La Réunion 1995

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; (unité graphique 4 cm).
On appelle A et B les points d'affixes respectives i et $-i$.
A tout point M du plan d'affixe z différente de $-i$, on associe le point M' dont l'affixe z' est définie par :

$$z' = \frac{z-i}{z+i}$$

1. Calculer l'affixe z' du point M′ associé au point M d'affixe $z = 2+i$. Préciser le module et un argument de z'. Placer les points M et M′ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2. Dans cette question, M est un point quelconque du plan distinct de B.
   Montrer que $OM' = \dfrac{MA}{MB}$. En déduire que, lorsque z est un réel, M′ appartient à un cercle que l'on précisera.

3. Dans cette question, M est un point quelconque du plan distinct de B.
   Aux points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z = \bar{z}$, (où $\bar{z}$ désigne le nombre conjugué de z), $z_2 = -z =$ et $z_3 = \dfrac{1}{z}$, on associe les points M'_1, M'_2 et M'_3 d'affixe z'_1, z'_2 et z'_3.

   (a) Montrer les relations : $z'_1 = \dfrac{1}{\overline{z'_1}}$, $z'_2 = \dfrac{1}{z}$ et $z'_3 = -\dfrac{1}{z}$.
   Exprimer les modules et arguments de z'_1, z'_2 et z'_3 en fonction du module et d'un argument de z'.

   (b) En utilisant ce qui précède, placer les points M_1, M_2, M_3, M'_1, M'_2 et M'_3 sur la même figure qu'au 1. dans le cas où $z = 2+i$.

B.3.11 Groupe IV 1994

On considère les nombres complexes $-1+i$, $3\,(1+i)$ et 2.

1. Ecrire ces nombres sous forme trigonométrique.

2. On désigne par a, b et c ces trois nombres de façon que $|a| < |b| < |c|$, et par A, B et C leurs images respectives dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

   (a) Placer A, B et C.

   (b) Montrer que le triangle obtenu est rectangle et isocèle.

3. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z' telle que

$$z' = 2iz + 1 - 2i$$

Soient A', B' et C', d'affixes respectives a', b' et c', les images par f des points A, B et C.

(a) Déterminer a', b' et c'. Placer A', B' et C' dans le plan $\mathcal{P}$. Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$? On justifiera la réponse.

(b) Calculer puis mettre sous forme trigonométrique le complexe W défini par :

$$W = \frac{c' - b'}{c - b}$$

(c) En déduire la valeur de $\dfrac{B'C'}{BC}$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}\right)$. Que peut-on dire des droites (BC) et $(B'C')$?

B.3.12 Sujet complémentaire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct d'origine O. Ω et A sont les points d'affixes respectives 1 et 2. On appelle F l'application qui à tout point M d'affixe z distinct de Ω associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z^2}{2(z-1)}$$

1. Déterminer les points invariants par F.

2. Soit E_1 la droite (OA) privée de Ω.

   (a) Déterminer le tableau de variation de la fonction g définie pour tout réel $x \neq 1$ par :

   $$g(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$$

   (b) En déduire l'image de E_1 par F.

3. Soit E_3 le cercle de centre Ω et de rayon 1. Pour tout point $M(z)$ de ce cercle, on pose :

   $$z = 1 + e^{i\theta}$$

   (a) Démontrer que : $z' = 1 + \cos\theta$

   (b) En déduire l'image de E_3 par F.

4. On pose $z = x + iy$ avec $z \neq 1$.

   (a) Calculer la partie imaginaire de z' en fonction de x et de y.

   (b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que l'image de M par F se trouve sur (OA).

B.4 Courbes paramétrées

B.4.1 Sujet complémentaire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal avec 5 cm pour unité.
Soit $\mathcal{H}$ la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos 3t \ , \ t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

1. Démontrer que pour t élément de l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$:

   (a) $\cos 2t \geqslant 0$ ssi $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

   (b) $\sin 3t \leqslant 0$ ssi $t \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Calculer les dérivées premières des fonctions x et y. Déduire leur signe de la question précédente.

3. Construire le tableau de synthèse résumant les variations de x et y sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Définir les coordonnées des points associés aux valeurs 0 , $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$ du paramètre t, ainsi que celles d'un vecteur directeur de chacune des tangentes à la courbe $\mathcal{H}$ en ces points.

5. Construire **soigneusement** chacun des points définis à la question précédente et sa tangente.
   Achever la construction de $\mathcal{H}$.

B.4.2 Sujet complémentaire

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le cercle C de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées $(-1; 0)$. A tout point m de C, on associe le point M, projeté orthogonal de A sur la tangente en m à C. On appelle t une mesure de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{Om}\right)$.

1. Démontrer que le point M a pour coordonnées :

   $$\left(\cos t - \sin^2 t\right), \sin t \cos t + \sin t$$

   Lorsque m décrit C, l'ensemble des points M est une courbe C' définie comme la courbe paramétrée ensemble des points $M(t)$ lorsque t varie dans $\mathbb{R}$.

2. Etudier les positions relatives des points $M(t)$, $M(t+2\pi)$, $M(-t)$. En déduire qu'il suffit, pour tracer la courbe C', de limiter les variations de t à l'intervalle $[0; \pi]$.

3. Tracer C' en précisant les tangentes aux points de paramètres 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. On admettra qu'au point de paramètre π, la courbe C' admet une tangente horizontale.

B.5 Barycentre

B.5.1 Remplacement 1996

1. Soient M, N, O, P quatre points du plan. Montrer que $MNOP$ est un parallélogramme si et seulement si le point P est barycentre des points pondérés $(M, 1)$, $(N, -1)$, $(O, 1)$.

2. Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux parallélogrammes dans le plan. On note I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$.
Montrer que L est le barycentre des points I, J, K affectés de coefficients que l'on déterminera. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $IJKL$?

3. Montrer que les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3 des parallélogrammes $ABCD$, $A'B'C'D'$ et $IJKL$ sont alignés et préciser les positions relatives de Ω_1, Ω_2 et Ω_3 .

B.5.2 Nouvelle Calédonie 1996 (modifié)

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BD]$. Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, et M le milieu de $[LK]$. Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1. Justifier l'existence du barycentre G du système :
$$\{(A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 2)\}$$
En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ).

2. Montrer que G est en M, que M, I, J sont alignés, et donner la position de M sur (IJ).

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points X du plan tels que :
$$\left\|\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD}\right\| = 4\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|$$

4. Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

B.5.3 Centres étrangers 1994

On donne trois points A, B, C distincts non alignés du plan et on note a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC.

$$a = BC \quad b = CA \quad c = AB$$

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

1. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment $[BC]$.

   (a) Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et de BC^2. En déduire :

   $$AG^2 = \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$$

   Ecrire de même les expressions de BG^2 et de CG^2.

   (b) Montrer que :

   $$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

2. Déterminer l'ensemble (E) .

3. On choisit $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. Placer trois points A, B, C et dessiner (E) dans ce cas particulier.

B.5.4 Exercice complémentaire

ABC est un triangle isocèle, A' est le milieu de $[BC]$ et H l'orthocentre du triangle. On pose : $BC = 2a \quad AB = AC = 3a$.

1. Soit θ une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Calculer $\cos\theta$.

2. Soit D le projeté orthogonal de B sur $[AC]$. Démontrer que D est barycentre de $(A, 2)$ et $(C, 7)$.

3. Déterminer trois entiers $a,\ b,\ c$ afin que H soit barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

B.5.5 Exercice complémentaire

Soit ABC un triangle. Le point I est le symétrique de B par rapport à C. Le point J est le symétrique de C par rapport à A. Le point K est le symétrique de A par rapport à B. On obtient un nouveau triangle IJK.

1. Démontrer que A est le barycentre de $(\mathrm{I}, 2)$, $(\mathrm{J}, 4)$, $(\mathrm{K}, 1)$.
   Exprimer de même sans calculs B et C comme barycentres de I, J, K.

2. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs des droites (BC), (AC), (AB) avec les droites (KJ), (IK), (JI).

   (a) Démontrer que R est le barycentre de $(\mathrm{I}, 1)$ et $(\mathrm{J}, 2)$.

   (b) Enoncer les résultats analogues pour les points P et Q.

3. On donne le triangle IJK. Retrouver le triangle ABC.

B.5.6 Exercice complémentaire

ABC est un triangle dont les 3 angles sont aigus. On appelle A', B', C' les pieds des hauteurs, H l'orthocentre du triangle. On pose : $BC = a \quad CA = b \quad AB = c$.

1. Démontrer que A' est le barycentre de $(B, b\cos\hat{C})$ et $(C, c\cos\hat{B})$.
2. En déduire que A' est le barycentre de $(B, \tan\hat{B})$ et $(C, \tan\hat{C})$.
3. Démontrer que le barycentre de $(A, \tan\hat{A})$ $(B, \tan\hat{B})$ $(C, \tan\hat{C})$ est le point H.
4. On suppose que le triangle n'est pas isocèle. Les droites (BC) et $(B'C')$ se coupent en A''. On définit de même B'' et C''.
   Démontrer que le barycentre de $(B, \tan\hat{B})$ et $(C, -\tan\hat{C})$ est A''.
   Démontrer que les points A'', B'' et C'' sont alignés.

B.6 Géometrie dans l'espace

B.6.1 Sportifs de haut niveau 1995

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(3; 2; -1)$ et $H(1; -1; 3)$.

1. Calculer la longueur AH.
2. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par H et orthogonal à la droite (AH).
3. On donne les points : $B(-6; 1; 1)$, $C(4; -3; 3)$ et $D(-1; -5; -1)$.
   (a) Démontrer que les points B, C et D appartiennent au plan $\mathcal{P}$.
   (b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
   (c) Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
   (d) Démontrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à $\dfrac{145}{3}$.
4. (a) Calculer l'aire du triangle ABC.
   (b) Calculer la distance du point D au plan ABC.

C

Problèmes

C.1 Nantes 1997

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est 2 centimètres.

PARTIE A

Etude d'une fonction g

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x \ln x - x + 1$$

et C sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Etudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.
3. On note C' la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que C et C' ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout élément x de $[1; e]$, on a :

$$x \ln x - x + 1 \leqslant \ln x$$

On ne demande pas de représenter C et C'

4. (a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$J = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx$$

(b) Soit Δ le domaine plan définie par :

$$\Delta = \{M(x, y) \ ; \ 1 \leqslant x \leqslant e \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant \ln x\}$$

Déterminer en cm^2 l'aire de Δ. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

PARTIE B

Etude d'une fonction f.
Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1. Pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement.
2. Déterminer le tableau de variation de f. On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

PARTIE C

Etude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que
$$3,5 < \alpha < 3,6$$
2. Soit h la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :
$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
   (a) Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$.
   (b) Etudier le sens de variation de h.
   (c) On pose $I = [3;4]$. Montrer que, pour tout élément de I, on a $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leqslant \frac{5}{6}$.
3. On définit la suite (u_n) par :
$$u_0 = 3 \text{ et pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = h(u_n)$$
   Justifier successivement les trois propriétés suivantes :
   (a) Pour tout entier naturel n,
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{5}{6}|u_n - \alpha|$$
   (b) Pour tout entier naturel n,
$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$$
   (c) La suite (u_n) converge vers α.
4. Donner un entier naturel p, tel que des majorations précédentes on puisse déduire que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Indiquer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

C.2 Groupe I bis 1997

Partie I

Soit la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Etudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a :

$$-1,28 < \alpha < -1,27$$

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$$

   En déduire le sens de variation de f.

2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T.
4. Chercher les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D. b
5. Faire le tableau de variation de f.
6. Tracer sur un même dessin (C), T et D. La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à $[-2; 4]$.

Partie III

On considère la fonction g définie sur $[0,1]$ par :

$$g\left(x\right)=\ln\left(1+e^{x}\right)$$

On note (L) la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, I le point défini par $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$, A le point d'abscisse 0 de (L) et B son point d'abscisse 1.

1. Etudier brièvement les variations de g.
2. Donner une équation de la tangente en A à (L).
3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$. Calculer les aires des trapèzes $OIPA$ et $OIBA$.
4. On admet que la courbe (L) est située entre les segments $[AP]$ et $[AB]$. Montrer alors que :

$$\ln 2+\frac{1}{4}\leqslant\int_{0}^{1}g\left(x\right)\,dx\leqslant\ln\sqrt{2\left(1+e\right)}$$

5. Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_{0}^{1}f\left(x\right)\,dx=\ln\left(1+e\right)-\int_{0}^{1}g\left(x\right)\,dx$$

6. En déduire un encadrement de

$$\int_{0}^{1}f\left(x\right)\,dx$$

C.3 Groupe II bis 1997

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'unité graphique est 2 cm.

Partie I : Etude d'une fonction g.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g\left(x\right)=x\ln x-x+1$$

et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Etudier les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Etudier les variations de g. En déduire le signe de $g\left(x\right)$ en fonction de x.

3. On note $\mathcal{C}'$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1, e]$, on a :

$$x \ln x - x + 1 \leqslant \ln x$$

On ne demande pas de représenter $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

4. (a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$J = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx$$

(b) Soit Δ le domaine plan défini par :

$$\Delta = \{M(x,y) \,; 1 \leqslant x \leqslant e \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant \ln x\}$$

Déterminer, en cm^2, l'aire de Δ. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

Partie II : Etude d'une fonction f.
Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$$

1. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1. Pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement.

2. Déterminer le tableau de variation de f. On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$.

3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie III : Etude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que

$$3,5 < \alpha < 3,6$$

2. Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(a) Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$.

(b) Etudier le sens de variation de h.

(c) On pose $I = [3, 4]$. Montrer que pour tout x élément de I on a $h(x) \in I$ et

$$|h'(x)| \leqslant \frac{5}{6}$$

3. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout } n \geqslant 0 \; u_{n+1} = h\left(u_n\right)$$

Justifier successivement les trois propriétés suivantes :

(a) Pour tout entier naturel n,

$$\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leqslant \frac{5}{6}\left|u_n - \alpha\right|$$

(b) Pour tout entier naturel n,

$$\left|u_n - \alpha\right| \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(c) La suite (u_n) converge vers α.

4. Donner un entier naturel p, tel que des majorations précédentes on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Indiquer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

C.4 Antilles 1997

Partie I
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f\left(x\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.

2. Calculer la limite de $f\left(x\right)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le signe de $f\left(x\right)$ pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$.

4. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 5 cm. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.

Partie II
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g\left(x\right) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g. Déduire de la partie I le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.

2. Vérifier que $g = h \circ k$ avec h et k les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ et } k(x) = \frac{1}{x}$$

En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0.

3. Donner le tableau des variations de g sur $]0, +\infty[$.

Partie III

1. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. On note $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant \lambda \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

En utilisant les résultats de la partie II,

   (a) Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ.
   (b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.
   (c) Justifier l'affirmation :
   " L'équation $A(\lambda) = 5$ admet une solution unique notée λ_0"
   Puis donner un encadrement de λ_0 d'amplitude 10^{-2}.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Montrer, en remarquant que $\ln(u_n) = g(n)$, que :

   (a) La suite (u_n) est une suite croissante.
   (b) La suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

C.5 Polynésie 1997

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right) e^{-x}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right) e^{-x}$$

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.

3. En déduire le tableau de variation de g.

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que

$$0,35 \leqslant \alpha \leqslant 0,36$$

5. En déduire le signe de g.

Partie II : Etude de f

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

3. En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et donner son tableau de variation.

4. (a) Démontrer que :

$$f(\alpha) = \alpha\left(1 + 2e^{-\alpha}\right)$$

   (b) A l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}.

5. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à Δ.

6. Donner une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

7. Tracer Δ, T puis $(\mathcal{C})$.

8. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$$

   soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x^2 + 2)\,e^{-x}$.

   (b) Calculer en fonction de α l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C})$, Δ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$.

   (c) Justifier que :

$$\mathcal{A} = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$$

Partie III : Etude d'une suite

1. Démontrer que pour tout x de $[1; 2]$:

$$1 \leqslant f(x) \leqslant 2$$

2. Démontrer que pour tout x de $[1; 2]$:

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$$

3. En utilisant le sens de variation de la fonction h définie sur $[1;2]$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$

démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β dans $[1;2]$.

4. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2$$

(b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \beta|$$

(c) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

(d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

(e) Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on ait :

$$|u_n - \beta| \leqslant 10^{-2}$$

C.6 Amérique du Nord 1997

La partie III est indépendante des parties II et IV.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 3 cm). On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie I

1. Justifier que pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Représenter $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$. On montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C})$ et on placera les points d'abscisse 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ en ces points.

Partie II
On s'intéresse à l'intersection de $(\mathcal{C})$ et de (Δ) . On pose, pour tout réel x :

$$\varphi(x) = f(x) - x$$

1. Déterminer la fonction dérivée φ' de φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Déterminer la limite de φ en $-\infty$.

   (b) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right)$$

   En déduire la limite de φ en $+\infty$.

3. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que la droite (Δ) coupe la courbe $(\mathcal{C})$ en un point et un seul. On désigne par α l'abscisse de ce point. Montrer que

$$0,3 < \alpha < 0,4$$

Partie III
On pose $J = [0,3; 0,4]$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est décroissante sur J. En déduire que si x appartient à J alors $f(x)$ appartient à J.

2. (a) Prouver que pour tout x de J,

$$|f'(x)| \leqslant 0,95$$

   On pourra montrer que f' est croissante sur J.

   (b) En déduire que pour tout x de J :

$$|f(x) - \alpha| \leqslant 0,95\,|x - \alpha|$$

3. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Prouver que pour tout n :
   - u_n appartient à J.
   - $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,95\,|u_n - \alpha|$
   - $|u_n - \alpha| \leqslant (0,95)^n$
     En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

   (b) Déterminer un entier n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0,

$$|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$$

Partie IV

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe $(\mathcal{C})$. On se propose de déterminer une valeur approchée de $\mathcal{A}$ en unités d'aire.

1. Montrer que la tangente T à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $\frac{1}{4}$ a pour équation :

$$y = -\frac{24}{25}x + \frac{6}{25} + \ln\frac{25}{16}$$

2. Soient les points E d'abscisse 0 et F d'abscisse $\frac{1}{2}$ de la courbe $(\mathcal{C})$. Montrer que la droite (EF) a pour équation :

$$y = 2\left(\ln\frac{5}{8}\right)x + \ln 2$$

3. On admet que sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de T et en dessous de (EF).

   (a) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{24}{25}x + \frac{6}{25} + \ln\frac{25}{16}\right)dx \leqslant \mathcal{A} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}}\left(2\left(\ln\frac{5}{8}\right)x + \ln 2\right)dx$$

   (b) En déduire que

$$\ln\frac{5}{4} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{1}{4}\ln\frac{5}{2}$$

   (c) Donner une valeur approchée de A à 5×10^{-3} près.

C.7 Japon 1997

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie I

Etude pour $n = 1$

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour C_1 ?
2. Etudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau des variations de f_1.
3. Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$ à la courbe C_1.
   Etude pour $n = 2$

4. Déterminer $\lim_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour C_2 ?

5. Calculer $f_2'(x)$ et donner le tableau de variations de f_2.

Partie II

1. Etudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; En déduire la position relative de C_1 et C_2.

2. Tracer C_1 et C_2.

Partie III

n étant un entier naturel non nul, on pose :

$$I_n = \int_1^e f_n(x)\ dx$$

1. On pose :

$$F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

   Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)\, I_n$$

3. Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Partie IV

1. En utilisant la question 2. de la partie III, montrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

2. En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1;e]$, montrer que pour tout n entier naturel non nul :

$$0 \leqslant I_n \leqslant 1$$

3. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

C.8 Nouvelle Calédonie 1996

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2e^{-x}$$

ainsi que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. En déduire le tableau de variation de f. Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Tracer $\mathcal{C}$. On choisira une unité graphique de 4 cm.

Partie II

1. Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.
2. Vérifier que f est telle que : $f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}$.
3. En déduire que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2\mathrm{J} - f(1)$$

   (J est définie à la question **II - 1.**).

Partie III

L'équation $f(x) = f(2)$ admet une seconde solution, notée α, et appartenant à l'intervalle I $= [-1, 0]$.

1. Soit $g(x) = \left(-\dfrac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$. Montrer que $f(\alpha) = f(2)$ équivaut à $g(\alpha) = \alpha$.
2. Montrer que g(I) est inclus dans I et que $\mid g'(x) \mid \leqslant \dfrac{1}{e}$ pout tout x appartenant à I.
3. En déduire que $\mid g(x) - \alpha \mid \leqslant \dfrac{1}{e} \mid x - \alpha \mid$ pout tout x appartenant à I.
4. On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} U_0 = -0,5 \\ U_{n+1} = g(U_n) \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$$

   On admet que U_n appartient à I pour tout entier $n \geqslant 0$.
   Montrer que

$$\mid U_n - \alpha \mid \leqslant \frac{1}{e^n} \mid U_0 - \alpha \mid \leqslant \frac{1}{2e^n}$$

   pour tout entier $n \geqslant 0$.
5. Déterminer le plus petit entier n tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

C.9 Sportifs de haut niveau 1996

L'objectif de la partie A est de résoudre une équation différentielle (1) *avec second membre. Dans la partie B, on étudiera une fonction, solution particulière de l'équation* (1) *, à l'aide d'une fonction auxiliaire. Dans la partie C, on déterminera l'aire d'une région du plan donnée. Les parties A, B et C peuvent être traités indépendamment l'une de l'autre.*

PARTIE A

Résolution d'une équation différentielle.

On se propose de déterminer les fonctions définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x} \qquad (1)$$

1. Montrer que la fonction p définie sur $]0;+\infty[$ par $p(x) = e^{-x}\ln x$ est une solution particulière de l'équation (1) .
2. Démontrer qu'une fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si la fonction $h = f - p$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad (2)$$

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad (2)$$

4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) .

PARTIE B

Etude de fonctions

On se propose dans cette partie d'étudier une solution particulière de l'équation différentielle (1). Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$$

Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$$

1. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer la fonction dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0;+\infty[$ et que cette solution α appartient à $[0,45;0,46]$.

4. Déduire de ce qui précède l'étude du signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Etude de la fonction f.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 centimètres.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Pour calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$, on pourra établir que :

$$f(x) = 3e^{-x} + \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x} \text{ pour tout } x > 0$$

   Déduire de cette étude les asymptotes de la courbe C.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = e^{-x} g(x)$$

   Déduire de l'étude faite à la question 1.4 les variations de f. Pour le calcul de $f(\alpha)$, on prendra comme valeur approchée de α la valeur $0,45$.

3. Déterminer le point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

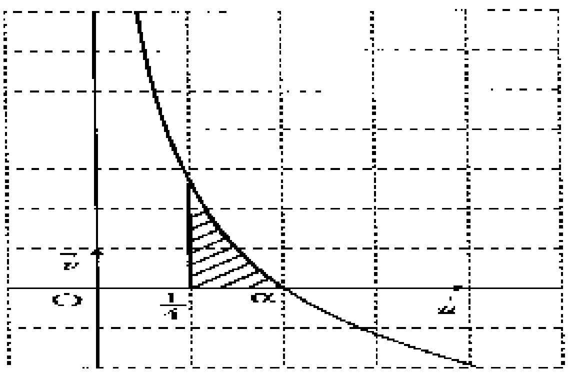
4. Tracer la courbe C.

Calcul d'aire

On considère dans le repère orthogonal $(O;\vec{u},\vec{v})$ ci-dessous (unité sur l'axe des abscisses : 4 cm, unité sur l'axe des ordonnées : 1 cm), la courbe de la fonction g définie par, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$$

α est la valeur déterminée en B.I.3 telle que $g(\alpha) = 0$.



1. Déterminer en fonction de α :

$$I = \int_{0,25}^{\alpha} \ln x \, dx$$

   On pourra utiliser une intégration par parties.

2. (a) Calculer, en fonction de α :

$$J = \int_{0,25}^{\alpha} g(x)\ dx$$

(b) Montrer que l'on a :

$$J = \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\ln 2$$

(c) Calculer l'aire A en cm^2 de la partie hachurée sur la figure, en fonction de α. Donner une valeur approchée de A en prenant $\alpha \simeq 0,45$.

C.10 National Année 1995

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\ln|x-3|$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité 1 cm).

Partie A : Etude de la fonction f.

1. Préciser l'ensemble de définition D de f.

2. (a) Vérifier que si x appartient à D, alors :

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$$

(b) Pour x appartenant à D, calculer $f''(x)$, où f'' désigne la dérivée seconde de f. En déduire les variations de f'.

(c) Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en 3 à gauche.

(d) Montrer que f' s'annule sur $]-\infty;3[$ pour une seule valeur α. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty;3[$.

(e) Etudie le signe de $f'(x)$ sur $]3;+\infty[$.

(f) Dresser le tableau de variation de f.

3. Etudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes éventuelles à (C)

4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses.

5. Tracer la courbe (C) .

Partie B : Calcul d'une aire

A désigne l'aire en cm^2 de la région comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x différent de 3 :

$$\frac{x^2 + 2x}{3 - x} = ax + b + \frac{c}{3 - x}$$

2. En déduire la valeur exacte de :

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{t^2 + 2t}{3 - t}\, dt$$

3. Grâce à une intégration par parties, et en utilisant la question précédente, calculer la valeur exacte de l'aire A.

C.11 La Réunion 1995

Dans tout ce problème, ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A – étude d'une fonction auxiliaire
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x$$

1. Etudier les variations de g. Préciser $g(1)$.

2. En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0,\ 1[$ et $]1,\ +\infty[$.

Partie B – Etude d'une fonction
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f(\frac{1}{x})$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur) dans l'expression de $f(x)$.
   Déterminer la limite de f en 0.

3. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2x}g(x)$.
   En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty]$.

4. On nomme C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé ; unité graphique 5 cm. Tracer C_f.

Partie C – Résolution approchées d'équations

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0,\ 1]$ (on pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0,\ 1]$ par $h(x) = f(x) - x$).
   On nomme α cette solution.

2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $[1,\ +\infty[$.
   On nomme β cette solution.

3. Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}. En déduire un encadrement de α.

D

Sujets de concours

D.1 Concours général 1998

EXERCICE I

Un tétraèdre $ABCD$ vérifie les conditions suivantes :

(a) les arêtes AB, AC et AD sont deux à deux orthogonales

(b) $AB = 3$ et $CD = \sqrt{2}$.

Déterminer la valeur minimale de $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

EXERCICE II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout entier n, la relation :

$$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$$

Montrer qu'il existe un entier p non nul, tel que la relation $u_n = u_{n+p}$ ait lieu pour tout entier naturel n.

EXERCICE III

Pour tout réel x on note $E(x)$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Soit k un entier fixé, supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définie par :

$$f(n) = n + E\left(\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}}\right)$$

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction f.

EXERCICE IV

On considère deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, et un point M n'appartenant à aucune de ces deux droites. On considère deux points variables, A sur D_1 et B sur D_2, tels que le point M appartienne au segment $[A, B]$.

(Les questions 1 et 2 sont indépendantes)

(1) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle l'aire du triangle OAB est minimale. Construire les points A et B ainsi déterminés.

(2) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle le périmètre du triangle OAB est minimal et qu'on a alors l'égalité des périmètres des triangles OAM et OBM, ainsi que la relation :

$$\frac{AM}{\tan \frac{\widehat{OAM}}{2}} = \frac{BM}{\tan \frac{\widehat{OBM}}{2}}$$

Construire les point A et B ainsi déterminés.

EXERCICE V

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère un ensemble A de n points du plan, cet ensemble ne contenant pas trois points alignés.

Montrer qu'il existe un ensemble S de $2n-5$ points du plan tel que pour tout triangle dont les sommets sont des points de A il existe au moins un point de S qui lui soit strictement intérieur.

D.2 Concours général 1997

Exercice I

On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier à 1997 côtés. Sur chacun de ces jetons est inscrit un entier relatif, la somme de ces entiers relatifs étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive.

Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui, combien y-a-t-il de choix possibles ?

Exercice II

Une capsule spatiale a la forme du solide de révolution délimité par une sphère de centre O, de rayon R, et un cône de sommet O qui rencontre cette sphère selon un cercle de rayon r.

Quel est le volume maximal d'un cylindre droit contenu dans cette capsule, le cylindre et la capsule ayant même axe de révolution ?

Exercice III

C est un cube d'arête 1 et p est la projection orthogonale sur un plan. Quelle est la valeur maximale de l'aire de $p(C)$?

Exercice IV

Etant donné un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs de ses côtés et m, n, p les longueurs de ses médianes. Pour tout réel α strictement positif, on définit le réel $\lambda(\alpha)$ par la relation

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = (\lambda(\alpha))^\alpha (m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha)$$

1. Calculer $\lambda(2)$.
2. Calculer la limite de $\lambda(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
3. A quelle condition portant sur a, b, c le réel $\lambda(\alpha)$ est-il indépendant de α?

Exercice V

Dans le plan, soient A et B deux points distincts. Pour tout point C extérieur à la droite (AB), on note G l'isobarycentre du triangle ABC et I le centre de son cercle inscrit.

1. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < \pi$. Quel est l'ensemble Γ des points C tels que
$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \alpha + 2k\pi$$
k étant un entier? Lorsque C décrit Γ, montrer que G et I décrivent deux arcs de cercle que l'on précisera.
2. On suppose désormais que $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \pi$. Comment doit-on choisir C dans Γ pour que la distance GI soit minimale?
3. On note $f(\alpha)$ la distance minimale GI de la question précédente. Expliciter $f(\alpha)$ en fonction de $a = AB$ et α. Déterminer la valeur maximale de $f(\alpha)$ lorsque α décrit $\left]\dfrac{\pi}{3}, \pi\right[$.

D.3 ENI 1998

Le sujet porte sur le programme du baccalauréat série S. Il est constitué d'exercices indépendants. Le texte remis au candidat prévoit 5 réponses possibles pour chaque exercice repérées par les lettres A, B, C, D, E. Une réponse et une seule est correcte.

---

1. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$
On cherche la valeur de $f'(0)$.

A	$f'(0) = -8\sqrt{3}$	B	$f'(0) = -4$	C	$f'(0) = 0$
D	$f'(0) = 2$	E	$f'(0) = 4$		

---

2. L'ensemble des réels x pour lesquels $\ln\left|1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right|$ existe est :

   A $]0,1[$ B $]1,+\infty[$ C $]0,1[\cup]1,+\infty[$
   D $\mathbb{R}-\{1\}$ E $]0,+\infty[$

---

3. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\ln\left|1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right|$. Si f est dérivable alors :

   A $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ B $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{|\sqrt{x}-1|}$ C $f'(x)=\dfrac{1}{2x\,|\sqrt{x}-1|}$
   D $f'(x)=\dfrac{1}{2x(\sqrt{x}-1)}$ E $f'(x)=\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}$

---

4. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\ln\left|1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right|$. L'équation $f(x)=0$:

   A n'admet pas de solution
   B admet une solution unique dans l'intervalle $[0,1]$
   C admet deux solutions dans l'intervalle $[0,1]$
   D admet une unique solution dans l'intervalle $[1,+\infty[$
   E admet deux solutions dans l'intervalle $[1,+\infty[$

---

5. L'équation $4x^3-7x^2+1=0$ admet dans l'intervalle $]-1,1[$ exactement :

   A 0 solution B 1 solution C 2 solutions
   D 3 solutions E 4 solutions

---

6. Soit f une fonction définie de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$, avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et $a<b$. On considère les trois propositions suivantes :

   (P_1) Si f est continue sur $]a,b[$, alors f est dérivable sur $]a,b[$.

   (P_2) f est dérivable en $x_0\in]a,b[$ si $\dfrac{f(x_0)-f(h)}{x_0-h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.

   (P_3) Si f est dérivable sur $]a,b[$ et si $f'(x_0)=0$ en $x_0\in]a,b[$, alors f admet un extremum en 0.

   A Les propositions (P_1), (P_2) et (P_3) sont vraies.
   B Les propositions (P_1), (P_3) sont vraies et (P_2) est fausse.
   C Les propositions (P_1), (P_2) sont fausses et (P_3) est vraie.
   D Les propositions (P_2) et (P_3) sont vraies et (P_1) est fausse.
   E Les propositions (P_1), (P_2) et (P_3) sont fausses.

---

7. Soit f une fonction définie et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2x_0+2h)-f(2x_0)}{h} = l$$

avec :

A	$l = 2f'(2x_0)$	B	$l = f'(2x_0)$	C	$l = \frac{1}{2}f'(2x_0)$
D	$l = 2f'(x_0)$	E	$l = f'(x_0)$		

8. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin 2x - \sin x}{\sin 2x + \sin x}$$

A	$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$	B	$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$	C	$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
D	$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$	E	$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$		

9. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (\pi - 2x)\tan x$$

A	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$	B	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = -2$	C	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$
D	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 2$	E	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$		

10. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

A	$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$	B	$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$	C	$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{4}{3}$
D	$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{3}$	E	$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$		

11. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\pi \sin(\pi + \sqrt{x})}{\sqrt{x^3 + x + 1}}$$

A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
D	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$	E	f n'admet pas de limite en $+\infty$		

12. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$$

avec $f(x) = \dfrac{4x-1}{x}$

A La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.
B La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2-\sqrt{3}$.
C La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
D La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{4}$.
E La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

---

13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ B $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{a+b}{2}$ C $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
D $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -(a+b)$ E $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

---

14. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx$

A $I = \dfrac{2-\sqrt{3}}{8}$ B $I = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ C $I = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
D $I = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ E $I = 0$

---

15. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit $a \in [0, \pi]$. Soit E l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que

$$a \leqslant x \leqslant \pi \quad 0 \leqslant y \leqslant \sin x$$

L'aire de E est égale à $\dfrac{1}{2}$ pour :

A $a = \dfrac{2\pi}{3}$ B $a = \dfrac{\pi}{3}$ C impossible
D $a = \dfrac{5\pi}{6}$ E $a = \dfrac{\pi}{2}$

---

16. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\tan^3\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right] dx$

A $I = \dfrac{3}{4}$ B $I = -\dfrac{1}{12}$ C $I = -\dfrac{3}{4}$
D $I = -\dfrac{3}{2}$ E $I = -3$

---

17. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A\,(2,2)$, $B\,(5,1)$ et $C\,(3,4)$. E désigne la région du plan intérieure au contour $ABCA$ formé par :
l'arc AB de la courbe d'équation : $x+3y-8=0$
l'arc BC de la courbe d'équation : $y\,(x-1)^2=16$
l'arc CA de la courbe d'équation : $y+2\,(3-x)^2=4.$
L'aire de E est égale à :

A $\frac{71}{6}$ B $\frac{31}{6}$ C $\frac{23}{6}$ D $\frac{17}{6}$ E $\frac{13}{6}$

---

18. $I=\displaystyle\int_2^4 \frac{|x-3|}{(x^2-6x)^2}dx$

A $I=\frac{1}{36}$ B $I=\frac{1}{72}$ C $I=0$
D $I=-\frac{1}{72}$ E $I=-\frac{1}{36}$

---

19. L'équation

$$2\sin^2 x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

admet dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

A 0 solution
B 1 solution
C 2 solutions
D 4 solutions
E une infinité de solutions

---

20. Soit l'équation $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, avec $x\in[0,2\pi]$. On note E l'ensemble des solutions de cette équation.

A Pour tout $x\in E$ $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
B Pour tout $x\in E$ $\cos 3x=1$
C Pour tout $x\in E$ $\sin|x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$
D $E=\left\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right\}$
E Pour tout $x\in E$ $x>\frac{1}{2}$

---

21. L'ensemble S des solutions réelles de l'équation

$$e^x-e^{-x}=2$$

est :

A $S = \left\{\ln\left(1+\sqrt{2}\right) ; \ln\left(1-\sqrt{2}\right)\right\}$
B $S = \left\{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$
C $S = \left\{\left(1+\sqrt{2}\right) ; \left(1-\sqrt{2}\right)\right\}$
D $S = \left\{\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}$
E $S = \{0\}$

---

22. Soit $z = (-1+i)^{11} + (-1-i)^{15}$

A $z = -96 + 160i$
B $z = 96 - 160i$
C $z = 160 - 96i$
D $z = -160 + 96i$
E $z = -160i$

---

23. On note E l'ensemble des réels t tels que l'équation :

$$z^2 - 2ze^{it} + 1 = 0$$

admette deux racines imaginaires pures $(z = iy,\, y \in \mathbb{R})$:

A $E = \{0\}$ B $E = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
C $E = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ D $E = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
E $E = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

---

24. Soit $z = i\left(\sqrt{3} - i\right)^{25}$

A $\arg z = 53\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B $\arg z = 28\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C $\arg z = -22\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D $\arg z = -25\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

E $\arg z = -47\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

---

25. Après une saison de chasse, on a établi les résultats suivants :
30 % des renards étaient enragés. Parmi les renards abattus, 40 % étaient enragés. On désigne par a la probabilité qu'un renard ait été abattu. Calculer en fonction de a la probabilité pour qu'un renard ait été abattu sachant qu'il était enragé.

A $\frac{4}{3}a$ B $\frac{3}{4a}$ C $\frac{3}{4}a$ D $\frac{4}{3a}$ E a

---

26. Deux joueurs A et B lancent l'un après l'autre et une seule fois un dé ordinaire non pipé. A gagne si l'écart entre les deux résultats est : 0, 1 ou 2, sinon B gagne. La probabilité que A gagne est :

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{3}{4}$ D $\frac{1}{3}$ E autre valeur

---

27. La probabilité que pile apparaisse au moins 4 fois après 5 lancers successifs d'une pièce de monnaie est :

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{4}{5}$ D $\frac{3}{16}$ E $\frac{5}{32}$

---

28. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on note P et Q les deux plans d'équations respectives :

$$P : x - 2z - 3 = 0 \qquad Q : y + z + 5 = 0$$

Soit D la droite intersection de P et Q.

A La droite D admet $\overrightarrow{u}\,(2,1,1)$ pour vecteur directeur
B La droite D passe par le point $(3,-5,1)$
C Le plan contenant $A\,(1,3,-4)$ et D a pour équation $x+y+z=0$
D Le plan contenant $A\,(1,3,-4)$ et D a pour équation $-2x+3y+7z+20=0$
E Le plan contenant $A\,(1,3,-4)$ et D a pour équation $-2x+3y+7z+21=0$

---

29. Soient trois points distincts du plan A, B et C. On note E l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$$

et I le milieu du segment $[A,B]$.

A E est réduit au point C
B E est l'ensemble vide
C E est une droite passant par I et orthogonale à (AB)
D E est un cercle de centre J milieu du segment $[IC]$
E E est un cercle de centre I

---

30. Soit E l'espace rapporté au repère orthornormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les trois points $A\,(-1,2,3)$, $B\,(0,4,4)$ et $C\,(2,0,2)$.

A $\left|\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{21}}$

B $\left|\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{-1}{\sqrt{21}}$

C $\left|\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \sqrt{5}$

D $\left|\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{\sqrt{5}}{21}$

E $\left|\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$

E

Eléments de solutions

E.1 Sujets du baccalauréat

E.1.1 Correction du sujet A.1

EXERCICE 1 (*5 points)*

1. (a) Soit F la fonction de répartition. Elle est définie par : $F(x)$ =P$(X \leqslant x)$. On obtient alors :

$$\begin{cases} \text{Si } x < 0 \quad F(x) = 0 \\ \text{Si } 0 \leqslant x < 1 \quad F(x) = 0,1 \\ \text{Si } 1 \leqslant x < 2 \quad F(x) = 0,6 \\ \text{Si } 2 \leqslant x \quad F(x) = 1 \end{cases}$$

   (b) $E(X) = 1,3$

2. (a) P(C$_1 \cap$ E)=P(C$_1$)×P(E / C$_1$)= $0,5 \times 0,7 = 0,35$.

   (b) P(E/C$_2$)=C$_2^1$×P(E)×P(G)= $2 \times 0,7 \times 0,3 = 0,42$
   P(C$_2 \cap$ E)=p(C$_2$)×P(E / C$_2$)= $0,4 \times 0,42 = 0,168$.

   (c) P(E)=P(C$_1 \cap$ E)+P(C$_2 \cap$ E)= $0,35 + 0,168 = 0,518$ en utilisant la formule des probabilités totales.

3. Y peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2. La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

Y	0	1	2
P(Y)	$0,286$	$0,518$	$0,196$

EXERCICE 2 (*5 points)*

1. Pour $z \neq 1$, on a :

$$\frac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow z - 2 = z(z-1) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$$

Cette équation admet deux solutions :

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2. Pour $z \neq 1$, on a :

$$\frac{z-2}{z-1} = i \Leftrightarrow z - 2 = i\,(z-1) \Leftrightarrow z = \frac{2-i}{1-i} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$$

3. (a) $\left|\frac{z-2}{z-1}\right| = \frac{BM}{AM}$ et $\arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right)$.

   (b) Sachant que i a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$, l'équation (2) équivaut à :

$$\frac{BM}{AM} = 1 \text{ et } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

   Ceci entraîne que M appartient à la médiatrice de $[AB]$ et que M appartient au demi-cercle de diamètre $[AB]$ situé dans la partie du plan définie par $y \geqslant 0$. L'intersection de ces deux ensembles redonne bien géométriquement le point d'affixe $\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$.

4. (a) $1 = |i| = \left|\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n\right| = \left|\frac{z-2}{z-1}\right|^n = \left(\frac{BM}{AM}\right)^n$. Comme $\frac{BM}{AM}$ est un réel positif, on en déduit que $\frac{BM}{AM} = 1$, donc que M appartient à la médiatrice de $[AB]$, et donc que M a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

   (b) Pour $z \neq 1$, on a :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i \Leftrightarrow (z-2)^2 = i\,(z-1)^2 \Leftrightarrow (1-i)\,z^2 + (2i-4)\,z + 4 - i = 0$$

   On pose alors $z = \frac{3}{2} + iy$, ce qui donne l'équation :

$$\frac{1}{4} - iy - y^2 + iy^2 + y + \frac{3}{4}i - i = 0$$

   L'annulation des partie réelle et imaginaire entraîne que :

$$y^2 - y - \frac{1}{4} = 0$$

   d'où après résolution l'ensemble des solutions :

$$S = \left\{\frac{3}{2} + i\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right), \frac{3}{2} + i\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

PROBLEME (*10 points)*

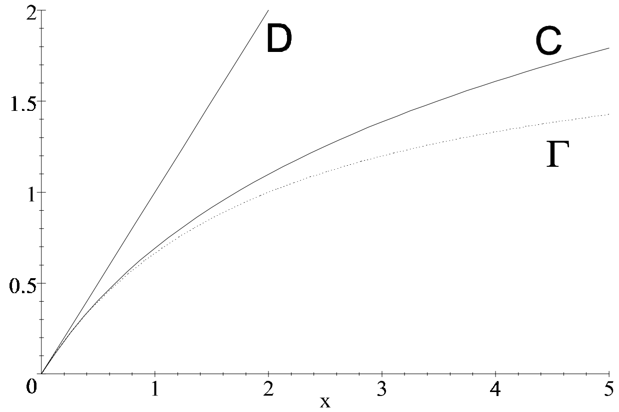
Partie A

1. $h'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2} \geqslant 0$, donc h est croissante sur $[0; +\infty[$ et $h(0) = 0$.

2. On en déduit que pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \geqslant 0$, d'où l'inégalité

$$\frac{2x}{x+2} \leqslant \ln(1+x)$$

3. C et Γ admettent en O une même tangente D d'équation $y = x$.



Partie B

1. Pour tout x de $[0; +\infty[$, $f_1'(x) = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0$, donc f_1 est décroissante sur cet intervalle.

2. Par factorisation :

$$f_1(x) = (x+1)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{x}{1+x}\right)$$

Or $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1$, donc $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$. De plus, $f_1(0) = 0$.

3. Pour tout réel x positif ou nul, $f_1(x) \leqslant 0$, ce qui entraîne bien que :

$$\ln(1+x) \leqslant x$$

4. Remarquons que si $k \geqslant 1$, alors $x \leqslant kx$. L'inégalité précédente fournit alors le résultat.

5. $f_k'(x) = \frac{1-k-kx}{1+x}$. Cette dérivée s'annule si et seulement si

$$1 - k - kx = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1-k}{k} \quad (k \neq 0)$$

Le signe de $f_k'(x)$ est celui de $(1-k-kx)$ car $1+x > 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Cette fonction affine change de signe pour $\frac{1-k}{k}$, qui appartient à $\mathbb{R}_+$. La fonction f_k est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{1-k}{k}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[\frac{1-k}{k}, +\infty\right[$. On remarque alors que $f_k\left(\frac{1-k}{k}\right) > 0$ d'après la stricte croissance de la fonction f_k sur $\left[0, \frac{1-k}{k}\right]$, ce qui prouve que dans ce cas l'inégalité

$$\ln(1+x) \leqslant kx$$

n'est pas toujours vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}_+$.

6. Les valeurs de k strictement positives telles que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx$ appartiennent donc à l'intervalle $[1, +\infty[$ d'après les questions précédentes.

Partie C

1. I= $\int_0^1 \ln(1+x)dx. = 2\ln 2 - 1$.
   J = $\int_0^1 (x - \ln(1+x))\, dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$
   K = $\int_0^1 \left(\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}\right) dx = -2\ln 2 - 3 + 4\ln 3$.
   La justification demandée est évidente si l'on remaque que :
$$\frac{2x}{x+2} = \frac{(2x+4)-4}{x+2} = 2 - \frac{4}{2+x}$$
   Comme la droite D est située au-dessus de la courbe C, on peut dire que J est l'aire comprise entre C, D et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$. De même, K est l'aire comprise entre C, Γ et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2. (a) u est par théorème de cours continue sur $]0;1]$. De plus,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = u(0)$$
   donc u est continue en 0, donc continue sur $[0;1]$.

   (b) D'après la partie A, pour tout x de $]0;+\infty[$:
$$\frac{2x}{x+2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \Longrightarrow \frac{2}{x+2} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{2}{x+2} \leqslant u(x) \leqslant 1$$
   Cette inégalité est aussi valable pour $x = 0$ car $u(0) = 1$. Donc pour tout x de $[0;1]$, on a :
$$\frac{2}{x+2} \leqslant u(x) \leqslant 1 \Longrightarrow \int_0^1 \frac{2}{x+2}dx \leqslant \int_0^1 u(x)\ dx \leqslant \int_0^1 1\, dx$$
   puisque $0 \leqslant 1$. On en déduit bien l'encadrement cherché. Le calcul des intégrales donne l'encadrement :
$$2\ln 3 - 2\ln 2 \leqslant L \leqslant 1.$$
   Une valeur approchée de L à 10^{-1} près est donc par exemple $0,9$.

E.2 Exercices

E.2.1 Correction de l'exercice B.2.3

1. (a) Il s'agit de répartir les 4 places inoccupées sur les 32 places possibles. On choisit donc une partie de 4 éléments dans un ensemble en comportant 32, donc il y a $C_{32}^4 = 35960$ répartitions possibles.

   (b) On suppose bien sûr que les élèves se répartissent de manière équiprobable sur les places. La probabilité de l'évènement A est donc donnée par le nombre de cas favorables à la réalisation de A sur le nombre de cas possibles. Le nombre de cas possibles correspond au nombre de manières dont

il est possible de répartir 28 élèves sur 32 places; soit C_{32}^{28}. Le nombre de cas favorables correspond à la répartition des 20 élèves qui restent sur les 24 places inocupées, soit C_{24}^{20}. La probabilité de l'évènement A est donc de $\frac{C_{24}^{20}}{C_{32}^{28}} \simeq 0,3$.
L'évènement B est réalisé si on répartit 14 élèves parmi les 16 places situées de part et d'autre de l'allée centrale. La probabilité cherchée est donc égale à $\frac{C_{16}^{14} \times C_{16}^{14}}{C_{32}^{28}} \simeq 0,4$.

2. La variable aléatoire X, égale au " nombre de places inocupées au rang R4 ", peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4, car il y au plus quatre places inocupées au rang R4.

   (a) La probabilité qu'il n'y ait pas de place inocupée au rang R4 est $\frac{C_{24}^{4}}{C_{32}^{4}}$. En effet, les cas possibles correspondent à répartir les 4 places inocupées parmi les 32 places possibles, tandis que les cas favorables correspondent au choix des 4 places parmi les 24 qui ne sont pas situées au rang R4.
   La probabilité qu'il y ait exactement une place inocupée au rang R4 est donnée par $\frac{C_{8}^{1} \times C_{24}^{3}}{C_{32}^{4}}$. Les cas favorables consistent à choisir une place inocupée parmi les 8 du rang R4, et les trois autres parmi les 24 qui ne sont pas situées au rang R4. Par le même raisonnement, on peut dresser le tableau récapitulant la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
$p(X=x)$	$\frac{C_{24}^{4}}{C_{32}^{4}} = \frac{5313}{17980}$	$\frac{C_{8}^{1} \times C_{24}^{3}}{C_{32}^{4}} = \frac{2024}{4495}$	$\frac{C_{8}^{2} \times C_{24}^{2}}{C_{32}^{4}} = \frac{966}{4495}$
x_i	3	4	
$p(X=x)$	$\frac{C_{8}^{3} \times C_{24}^{1}}{C_{32}^{4}} = \frac{168}{4495}$	$\frac{C_{8}^{4}}{C_{32}^{4}} = \frac{7}{3596}$	

   (b) La formule du cours permet de trouver que l'espérance mathématique de X vaut 1.

E.2.2 Correction de l'exercice B.2.7

1. (a) Monsieur Martin peut prendre 0, 1, 2 ou 3 cravates à motifs. Le tirage étant simultané sans remise et équiprobable, on peut appliquer les formules de cours, d'où la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	0	1	2	3
$p(X=x)$	$\frac{C_3^3 \times C_7^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$	$\frac{C_3^2 \times C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{40}$	$\frac{C_3^1 \times C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}$	$\frac{C_3^0 \times C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}$

(b) On trouve que $E(X) = \frac{21}{10}$.
2. (a) G et D sont deux évènements incompatibles, dont la réunion donne l'univers. En appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$p(\mathrm{M}) = p(\mathrm{M} \cap \mathrm{G}) + p(\mathrm{M} \cap \mathrm{D}) = p(\mathrm{G})\ p(\mathrm{M}/\mathrm{G}) + p(\mathrm{D})\ p(\mathrm{M}/\mathrm{D})$$

Le choix du côté de l'armoire étant équiprobable, on a $p\,(\mathrm{G}) = p\,(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}$. De plus, $p\,(\mathrm{M}\,/\,\mathrm{G}) = \frac{7}{10}$, car il s'agit de choisir une cravate à motifs parmi les 7 possibles dans un ensemble qui en contient 10. De même, $p\,(\mathrm{M}\,/\,\mathrm{D}) = \frac{5}{7}$. On trouve donc que

$$p\,(\mathrm{M}) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{99}{140} \simeq 0,707$$

(b) D'après les formules du cours, on a :

$$p\,(\mathrm{G}\,/\,\mathrm{M}) = \frac{p\,(\mathrm{G} \cap \mathrm{M})}{p\,(\mathrm{M})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{7}{10}}{\frac{99}{140}} = \frac{49}{99} \simeq 0,\ 495$$

3. (a) La probabilité que Monsieur Martin prenne une cravate à motifs est de $p\,(\mathrm{M}) = \frac{99}{140}$, et la probabilité qu'il prenne une cravate unie est de $p\,(\mathrm{U}) = \frac{41}{140}$. Il n'y a donc que 2 issues possibles, et chaque tirage est indépendant du précédent. On reconnait un schéma de Bernouilli. En utilisant l'évènement contraire, on recherche donc la probabilité que Monsieur Martin ne prenne pas de cravate à motifs pendant n jours, qui est égale à $(p\,(\mathrm{U}))^n$. Donc

$$p_n = 1 - \left(\frac{41}{140}\right)^n$$

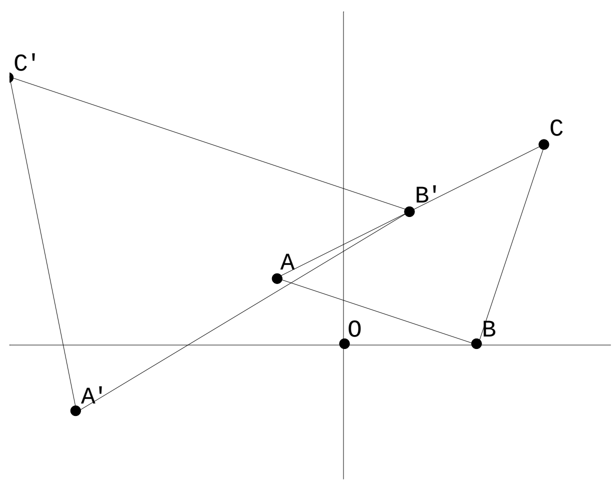
(b) $p_n \geqslant 0,99 \Rightarrow 1 - \left(\frac{41}{140}\right)^n \leqslant 0,99 \Rightarrow 0,01 \leqslant \left(\frac{41}{140}\right)^n \Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln 41 - \ln 140} \simeq 3,75$. La plus petite valeur possible pour n est donc égale à 4.

E.2.3 Correction de l'exercice B.3.11

1. On trouve que $a = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $c = 3\,(1+i) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b = 2 = 2e^{i0}$.

2. $AB = |b - a| = \sqrt{10}$, $AC = 2\sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{10}$. Le théorème de Pythagore permet de démontrer que le triangle est aussi rectangle en B.

3. (a) $a' = f\,(-1+i) = -1 - 4i$, $b' = f\,(2) = 1 + 2i$ et enfin $c' = f\,(3+3i) = -5 + 4i$. On trouve de même que $A'B' = B'C' = 2\sqrt{10}$, donc que le triangle $A'B'C'$ est isocèle. Comme $A'C' = 4\sqrt{5}$, ce triangle est aussi rectangle en B'.
   (b)$W = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$



(c) $\dfrac{B'C'}{BC} = \left|2e^{i\frac{\pi}{2}}\right| = 2$
et $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \arg\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$, donc les droites (BC) et $(B'C')$ sont orthogonales.

E.3 Problèmes

E.3.1 Correction du problème C.9

PARTIE A

1. Pour tout x de $]0;+\infty[$, on a :

$$p(x) = e^{-x}\ln x \quad p'(x) = \frac{e^{-x}(1 - x\ln x)}{x} \quad p''(x) = \frac{e^{-x}(-1 - 2x + x^2\ln x)}{x^2}$$

Il suffit alors de vérifier que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a :

$$p''(x) + 3p'(x) + 2p(x) = \frac{x-1}{x^2}e^{-x} \qquad (3)$$

pour vérifier que p est bien une solution particulière de l'équation (1) .
2. Une fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si elle vérifie pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$$

Par soustraction membre à membre avec l'égalité (3), l'égalité précédente équivaut à :

$$\begin{gathered} f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) - p''(x) - 3p'(x) - 2p(x) = 0 \\ \Leftrightarrow (f-p)''(x) + 3(f-p)'(x) + 2(f-p)(x) = 0 \end{gathered}$$

Ce qui équivaut au fait que la fonction $h = f - p$ est une solution de l'équation différentielle (2).
3. Avec les formules de cours, on trouve que les solutions de l'équation différentielle (2) sont les fonctions h définies par

$$h : x \mapsto \lambda\, e^{-x} + \mu\, e^{-2x}$$

où λ et μ sont deux constantes réelles quelconques.
4. D'après les questions précédentes, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) est constitué par les fonctions $h + p$, c'est à dire que cet ensemble de solutions est constitué des fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$x \mapsto \lambda\, e^{-x} + \mu\, e^{-2x} + e^{-x}\ln x$$

PARTIE B

I) Etude d'une fonction auxiliaire

1. $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to 0^+}(-\ln x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$. De même, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.
2. Pour tout x de $]0;+\infty[$ on a

$$g'(x) = \frac{-1-x}{x^2}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $(-1-x)$, d'où le tableau de variation de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
	$+\infty$		
$g(x)$		$\searrow$	
			$-\infty$

3. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$. Comme 0 appartient à l'intervalle image, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0;+\infty[$. Comme de plus

$$g(0,45) \simeq 0,02 > 0 \text{ et } g(0,46) \simeq -0,05 < 0$$

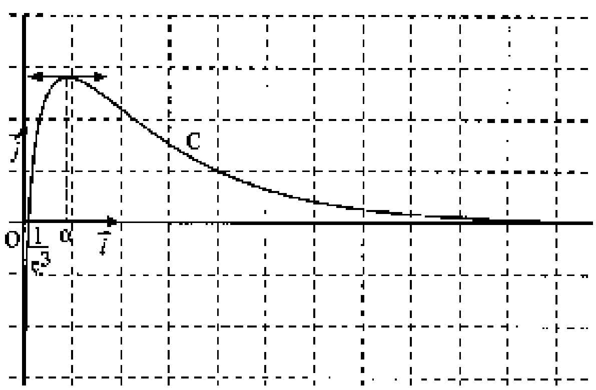
on en déduit aisément que cette solution α appartient à $[0,45;0,46]$.
4. La fonction g est décroissante sur $]0;\alpha[$ avec $g(\alpha) = 0$, donc $g(x)$ est positive sur cet intervalle. De même, on montre que $g(x)$ est négative sur $]\alpha;+\infty[$.

II) Etude de la fonction f.

1. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = 3e^{-x} + \frac{\ln x}{e^x} = 3e^{-x} + \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x}$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ d'après le cours.
Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit que les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à $\mathcal{C}$.
2. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = e^{-x}\left(-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right) = e^{-x}g(x)$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x)$, étudié précédemment. Donc f est croissante sur $]0;\alpha[$ et décroissante sur $]\alpha,+\infty[$. On trouve que $f(\alpha) \simeq 1,40$.
3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-3}$, car $e^{-x} \neq 0$ pour tout x. Les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses sont $(0, e^{-3})$. 4.



III) Calcul d'aire

1. $I = \int_{0,25}^{\alpha} \ln x \, dx = [x \ln x]_{0,25}^{\alpha} - \int_{0,25}^{\alpha} dx = [x \ln x]_{0,25}^{\alpha} - [x]_{0,25}^{\alpha}$. On trouve que :

$$I = \alpha \left(-1 + \ln \alpha\right) + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4}$$

2. (a) $J = [-3x]_{0,25}^{\alpha} - I + [\ln x]_{0,25}^{\alpha} = -2\alpha + (1-\alpha) \ln \alpha + \frac{1}{2} + \frac{3 \ln 2}{2}$.
(b) Puisque $g(\alpha) = 0$, on a $-3 - \ln \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$, d'où $\ln \alpha = -3 + \frac{1}{\alpha}$. En reportant dans l'expression de J, on trouve bien que :

$$J = \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}$$

(c) La courbe $\mathcal{C}$ étant située au-dessus de l'axe des abscisses, et l'unité d'aire valant 4 cm^2, on a donc :

$$A = 4 \int_{0,25}^{\alpha} g(x) \, dx = 4J = \left(4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 14 + 6 \ln 2\right) cm^2$$

ce qui donne en valeur approchée $A \simeq 0,85 \; cm^2$.

E.4 Sujets de concours

E.4.1 ENI Annee 1998

1.	B	6.	E	11.	C	16.	C	21.	B	26.	B
2.	C	7.	A	12.	E	17.	D	22.	A	27.	D
3.	D	8.	D	13.	B	18.	B	23.	E	28.	E
4.	B	9.	D	14.	A	19.	A	24.	C	29.	D
5.	C	10.	C	15.	B	20.	E	25.	A	30.	E

Ce livre a été entièrement composé grâce au logiciel LaTeX

La réalisation de cet ouvrage a été rendue possible grâce à :

Michel Gosse
Jean-Pierre Prigent
Jean-Claude Renaud
Christian Ballion
Jean-Michel Sarlat
Jean-Louis Coquin

et au soutien moral de tous les autres...