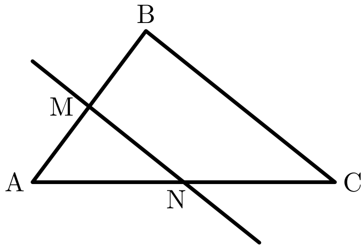
chapitre 3 :

Le théorème de thalès et sa réciproque.

1. La droite des milieux.

(a) Milieux.

THÉORÈME :
Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.



Données :

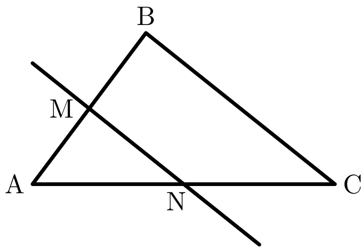
- M est le milieu de $[AB]$.
- N est le milieu de $[AC]$.

Conclusion :

La droite (MN) est parallèle à la droite (BC).

(b) Longueurs.

THÉORÈME :
Dans un triangle, le segment joignant les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté.



Données :

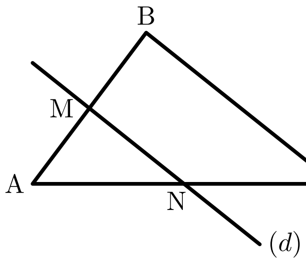
- M est le milieu de $[AB]$.
- N est le milieu de $[AC]$.

Conclusion :

$MN = \dfrac{BC}{2}$.

(c) Milieux et parallèles.

THÉORÈME :
Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.



Données :

- M est le milieu de $[AB]$.
- (d) est parallèle à (BC).

Conclusion :

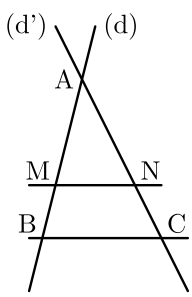
(d) passe par le milieu N de $[AC]$.

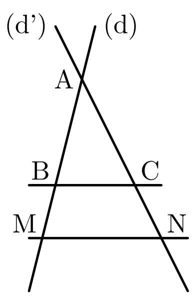
2. Le théorème de Thalès.

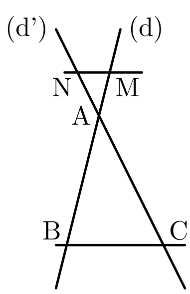
(a) Propriété.

Etant donné deux droites (d) et (d') sécantes au point A ; B et M deux points de (d) distincts de A ; C et N deux points de (d') distincts de A :
si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

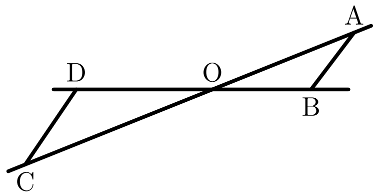






(b) Calculer des longueurs.

Sur la figure ci-contre les droites (AC) et (BD) sont sécantes en O.
De plus, on suppose que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
On donne : $OB = 5$ cm ; $AB = 3$ cm ; $OD = 6$ cm ; $OC = 9$ cm.
Calculer les longueurs OA et CD.



Les points A, O, C sont alignés ainsi que les points B, O, D. De plus, les droites (AB) et (CD) sont parralèles. Donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}.$$

D'où en remplaçant par les valeurs :

$$\frac{OA}{9} = \frac{5}{6} = \frac{3}{CD}.$$

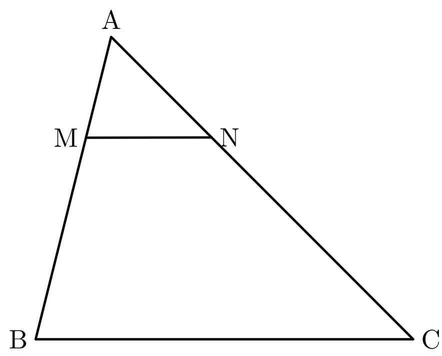
On calcule les longueurs inconnues :

$$\frac{OA}{9} = \frac{5}{6} \text{ donc } OA = 9 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{2} = 7,5$$

$$\frac{3}{CD} = \frac{5}{6} \text{ donc } CD = \frac{6 \times 3}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$$

On conclut : $OA = 7,5$ cm et $CD = 3,6$ cm.

(c) Vérifier si deux droites sont parallèles.



Sur la figure ci-contre les points A, M, B sont alignés, ainsi que les points A, N, C. On sait que : $AM = 11,9$ cm ; $AB = 35$ cm ; $AN = 18,2$ cm ; $AC = 52$ cm.
Les droites (BC) et (MN) sont-elles parralèles ?

On calcule les rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{11,9}{35} = 0,34 \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{18,2}{52} = 0,35$$

On les compare :

$$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC} \text{ (car } 0,34 \neq 0,35)$$

On applique la propriété de Thalès :
Si les droites (BC) et (MN) étaient parallèles, on aurait $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ ce qui n'est pas le cas.
On en déduit que les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

3. La réciproque du théorème de Thalès.

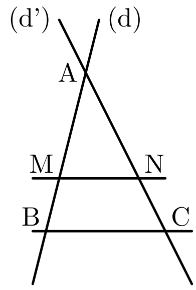
(a) Propriété.

Etant donné deux droites (d) et (d') sécantes au point A ; B et M deux points de (d) distincts de A ; C et N deux points de (d') distincts de A :

si les points A, B, M et A, C, N sont dans le même ordre et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, alors :

Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

(b) Exemple :



Sur la figure ci-contre les points A, M, B sont alignés, ainsi que les points A, N, C. On sait que : $AM = 3,6$ cm ; $AB = 6$ cm ; $AN = 5,1$ cm ; $AC = 8,5$ cm.

Les droites (BC) et (MN) sont-elles parrallèles ?

On a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3,6}{6} = 0,6 \text{ et } \frac{AN}{AC} = \frac{5,1}{8,5} = 0,6$$

Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A.

Les points A, M, B de la droite (AB) et les points A, N, C de la droite (AC) sont dans le même ordre.

De plus, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$.

D'après la réciproque du Théorème de Thalès, on en déduit que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.