

---

# Cours de mathématiques

## Terminale S1

### Chapitre 12 : Calcul Intégral

---

Année scolaire 2008-2009  
mise à jour 27 avril 2009

---



FIG. 1 – Henri-Léon Lebesgue et Bernhard Riemann

*On les confond parfois* 😞

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Chapitre 12 : Calcul Intégral</b>	<b>3</b>
I.A	Intégrale d'une fonction continue positive	3
I.A.1	Définition	3
I.B	Intégrale d'une fonction continue négative	3
I.B.1	Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque	4
I.B.2	Cas d'une fonction en escalier	5
I.C	Propriétés de l'intégrale	5
I.D	Propriété	5
I.D.1	Linéarité	6
I.D.2	Relation de Chasles	6
I.D.3	Intégrales et inégalités	6
I.D.4	Valeur moyenne d'une fonction	7
I.E	Primitives	8
I.E.1	Exemple	8
I.E.2	Définition	9
I.F	Primitive d'une fonction continue	10
I.G	Calculs de primitives	10
I.H	Calculs d'intégrales	11
I.I	Intégration par parties	12
I.J	Calculs de volumes	13



## Informations sur la mise en page

Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec metapost et les macros de **J-M Sarlat** et en s'inspirant **très fortement de ce qui est fait ici par David Nivaud<sup>a</sup>** :

[http://melusine.eu.org/syracuse/metapost/cours/nivaud/figTsc\\_integrale/](http://melusine.eu.org/syracuse/metapost/cours/nivaud/figTsc_integrale/).

L'environnement bclogo, utilisé pour la réalisation de ce document, est téléchargeable ici :

<http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo>

---

<sup>a</sup>le fichier de macros s'appelle toujours courbes.mp mais est différent du fichier courbes.mp des chapitres précédents

# I Chapitre 12 : Calcul Intégral

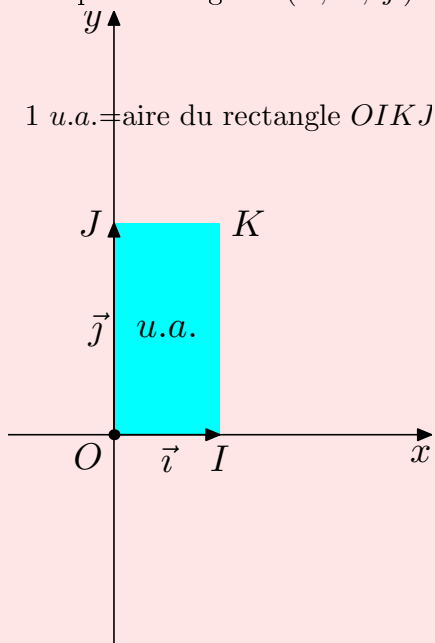
## I.A Intégrale d'une fonction continue positive

### I.A.1 Définition



#### Définition 1:

Un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ayant été fixé, une unité d'aire est définie de la manière suivante :

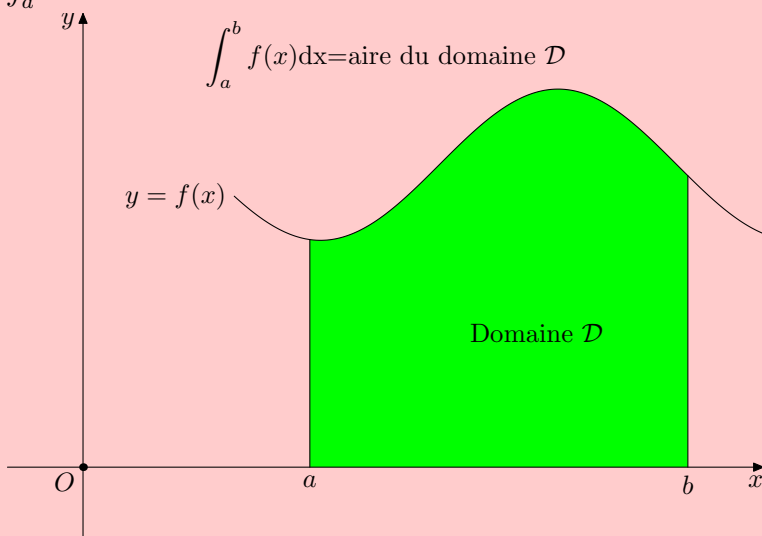


#### Définition 2:

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Le réel, noté  $\int_a^b f(x)dx$ , est l'aire, en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}$  délimité par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

$\int_a^b f(x)dx$  se lit somme de  $a$  à  $b$  de  $f(x)dx$  ou intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$

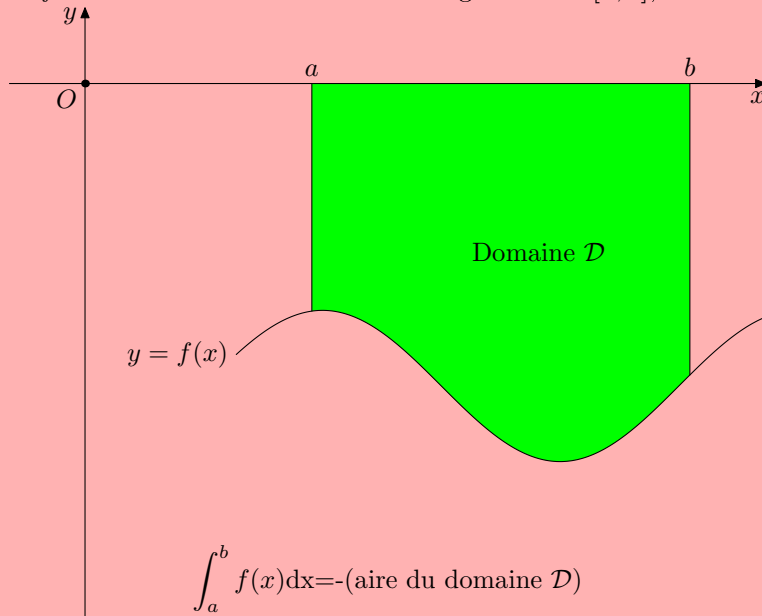


## I.B Intégrale d'une fonction continue négative



### Définition 3:

Si  $f$  est une fonction continue et négative sur  $[a; b]$ , on a la définition suivante :

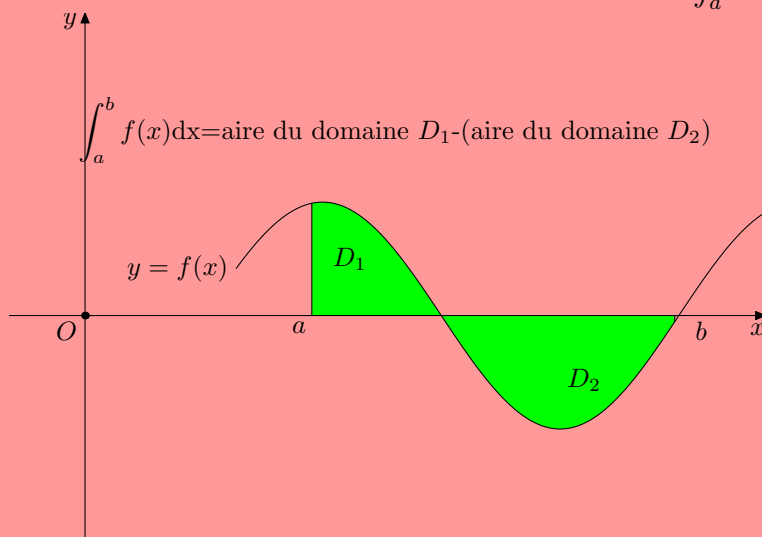


#### I.B.1 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque



### Définition 4:

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , alors on définit  $\int_a^b f(x)dx$  de la manière suivante :





### Remarque

On admet pour l'instant l'égalité suivante :

si  $f$  est une fonction continue sur  $[a; b]$ , alors, pour tout  $c \in [a; b]$ ,

$$\int_c^c f(x)dx = 0$$

## I.B.2 Cas d'une fonction en escalier



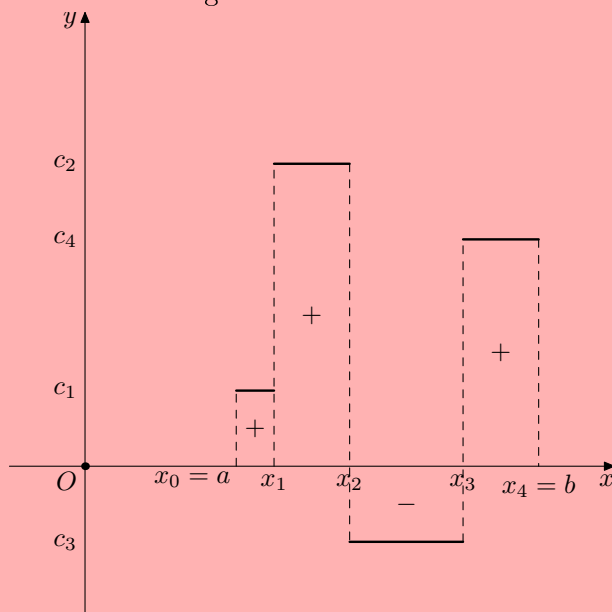
### Définition 5:

Il est un cas où, si la fonction  $f$  n'est pas continue sur  $[a; b]$ , on peut néanmoins définir  $\int_a^b f(x)dx$ , c'est le cas des fonctions en escalier.

Si  $f$  est définie ainsi :

1. si  $x \in [x_0; x_1[$ ,  $f(x) = c_1$
2. si  $x \in [x_1; x_2[$ ,  $f(x) = c_2$
3. si  $x \in [x_2; x_3[$ ,  $f(x) = c_3$
4. si  $x \in [x_3; x_4]$ ,  $f(x) = c_4$

alors  $\int_a^b f(x)dx$  = somme des aires des rectangles situés au-dessus de l'axe des abscisses- (somme des aires des rectangles en dessous de l'axe des abscisses)



## I.C Propriétés de l'intégrale

### I.D Propriété



### THÉORÈME 1

On admet pour l'instant, la définition de l'intégrale ayant été donnée précédemment, que

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

La notion de primitive nous permettra de valider cette propriété dans quelques instants.

### I.D.1 Linéarité



#### THÉORÈME 2

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a; b]$  et  $\alpha$  un réel, alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$$

et

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

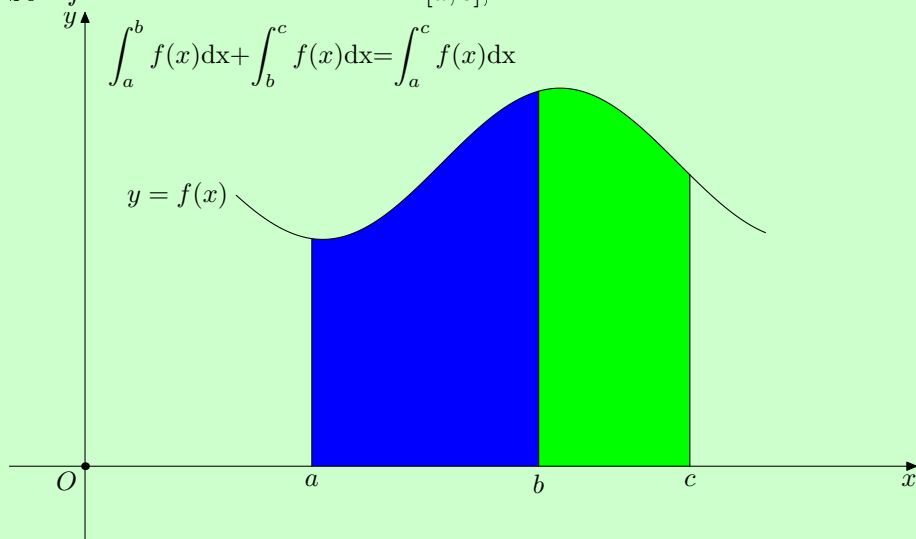
### I.D.2 Relation de Chasles



#### THÉORÈME 3

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; c]$ , alors :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$



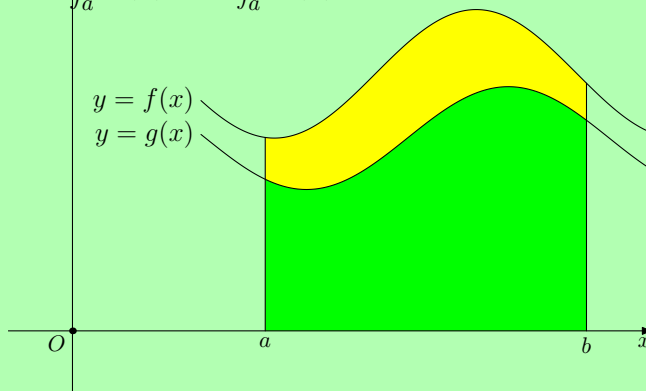
### I.D.3 Intégrales et inégalités



#### THÉORÈME 4

Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a; b]$  et si, pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $g(x) \leq f(x)$  alors on a :

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$



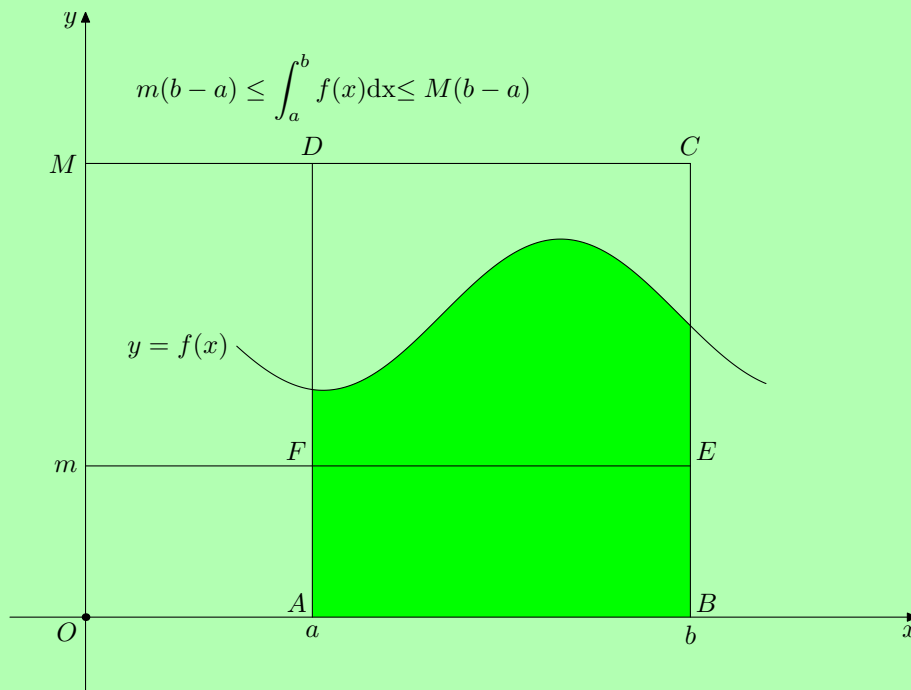


### THÉORÈME 5 : Inégalités de la moyenne

S'il existe  $m$  et  $M$  tels que, pour tout  $x \in [a; b]$

$$m \leq f(x) \leq M$$

alors on a :



Il suffit de comparer les aires du domaine sous la courbe avec celles des triangles  $ABCD$  et  $ABEF$

#### I.D.4 Valeur moyenne d'une fonction



### THÉORÈME 6

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ ;  $a$  et  $b$  sont deux réels distincts de l'intervalle  $I$ .

Alors il existe un réel  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ .

Le nombre  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  est appelé **valeur moyenne de  $f$  entre  $a$  et  $b$** .



### Interprétation cinématique : la vitesse moyenne d'un mobile

La vitesse moyenne d'un mobile est la valeur moyenne de la vitesse, d'où :

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$



### Démonstration

On suppose la fonction  $f$  croissante. (On admet le résultat dans le cas général.)

Premier cas :  $a < b$ . Puisque  $f$  est croissante, pour tout réel  $x$  dans  $[a; b]$ ,

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

On a alors

$$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b-a)$$

et, puisque  $b-a > 0$ ,

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(b)$$

Le réel  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  est dans l'intervalle  $[f(a); f(b)]$ , donc il existe  $c$  dans  $[a; b]$  tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Deuxième cas :  $a > b$ . On procède de la même manière que précédemment, à vous de le faire.

## I.E Primitives

### I.E.1 Exemple

On s'intéresse à la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 0.9 \times e^{-0.9x}$$

Le but est double :

- Introduire la notion de primitive.
- Découvrir la fonction  $f$  en vue du chapitre sur la loi exponentielle.

Soit  $\mathcal{A}$  la fonction qui, à tout réel  $x$  positif, associe  $\mathcal{A}(x) = \int_0^x 0.9 e^{-0.9t} dt$ .

Alors, pour tout réel  $a$  positif, le réel  $\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)$  représente l'aire du domaine hachuré en vert ci-après. (on se place dans le cas où  $h$  est strictement positif) :

En utilisant les inégalités de la moyenne décrites plus haut, on peut écrire :

$$h \times f(a+h) \leq \mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a) \leq h \times f(a)$$

d'où

$$f(a+h) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} \leq f(a)$$

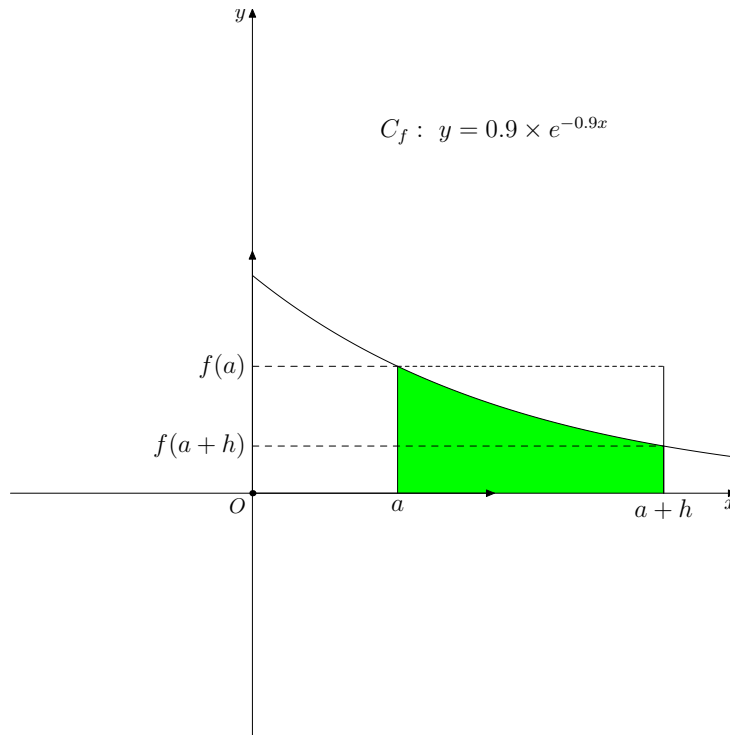
De la même manière, en considérant  $h$  strictement négatif, on obtient :

$$f(a) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} \leq f(a+h)$$

Si on fait tendre  $h$  vers 0 et en tenant compte du fait que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $\mathbb{R}^+$  en particulier, on obtient, après passage à la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} = f(a)$$





Ce qui nous permet de dire que la fonction

$$\mathcal{A} : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et vérifie

$$\mathcal{A}'(x) = f(x)$$

La fonction  $\mathcal{A}$  est appelée **primitive** de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Cela nous permet aussi de calculer la valeur exacte de  $\int_0^1 f(t) dt$  que l'on avait seulement approchée par les méthodes des rectangles et de Monte-Carlo en utilisant *Scilab*.

En effet, si l'on considère la fonction  $F$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par

$$F(x) = \mathcal{A}(x) + e^{-0.9x}$$

on voit que, la fonction  $F$  étant manifestement dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $F'(x) = 0$ , pour tout  $x \geq 0$ , donc

$$F(x) = K(\text{constante}) = F(0) = 1$$

Autrement dit,

$$\mathcal{A}(x) = 1 - e^{-0.9x} \text{ pour tout } x \geq 0$$

or

$$\int_0^1 f(t) dt = \mathcal{A}(1)$$

donc

$$\int_0^1 f(t) dt = 1 - e^{-0.9}$$

## I.E.2 Définition



### Définition 6:

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$  si, pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $F'(x) = f(x)$ . (implicitement, cela suppose que  $F$  soit dérivable sur  $I$ )



### THÉORÈME 7

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors  $f$  admet une infinité de primitives.

Les autres primitives de  $f$  sur  $I$  sont définies par  $G(x) = F(x) + K$  où  $K$  est une constante réelle.

Démonstration :  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ . La fonction  $G$  est aussi dérivable sur  $I$  avec  $G' = F' = f$ . Donc  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Inversement, si  $G$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  alors  $G' = f = F'$  d'où  $G' - F' = 0$ .

La dérivée de  $G - F$  est nulle sur l'intervalle  $I$  donc  $G - F$  est constante sur  $I$ , il existe donc un réel  $K$  tel que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $G(x) - F(x) = K$ , d'où le résultat.



### THÉORÈME 8

Soit  $f$  une fonction admettant des primitives sur  $I$ .

Soient  $x_0$  est un réel donné appartenant à  $I$  et  $y_0$  un réel quelconque.

Alors il existe **une unique primitive**  $F$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

## I.F Primitive d'une fonction continue



### THÉORÈME 9

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ;  $a$  est un réel de  $I$ .

Alors la fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(a) = 0$ .

La démonstration de ce théorème sera vue en TD.

## I.G Calculs de primitives

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si  $F$  et  $G$  sont des primitives des fonctions  $f$  et  $g$  sur un intervalle  $I$ , alors  $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ .
- Si  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  et  $\lambda$  un réel, alors  $\lambda F$  est une primitive de  $\lambda f$  sur  $I$ .

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par lecture inverse le tableau des primitives suivant :

Fonction $f$	Primitive $F$	Intervalle $I$
$a$ (constante)	$ax$	$\mathbb{R}$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $]0; +\infty[$ ou $] - \infty; 0[$ si $n < 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , on a alors :

Fonction $f$	Primitive $F$	Remarques
$u'u^n$ ( $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n < 0$ , pour tout $x$ tel que $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur $I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln( u )$	$u \neq 0$ sur $I$
$u'e^u$	$e^u$	
$x \mapsto u(ax+b)$ ( $a \neq 0$ )	$x \mapsto \frac{1}{a}U(ax+b)$	$U$ primitive de $u$ sur $I$

**Remarque :** On peut ajouter à chaque primitive déterminée une constante  $K$  pour obtenir toutes les primitives.

## I.H Calculs d'intégrales



### THÉORÈME 10

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ ,  $a$  et  $b$  sont deux réels de  $I$ . Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



### Démonstration

On sait que la fonction  $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  telle que  $G(a) = 0$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $G(x) = F(x) + k$ . Or  $G(a) = 0$ , d'où  $k = -F(a)$  et on obtient :  $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ .

En posant  $x = b$ , on obtient bien  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ .



### Notation

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



### Remarque

Cela permet de valider la formule :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = - \int_b^a f(x)dx = -(F(a) - F(b))$$

## I.I Intégration par parties



### THÉORÈME 11

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , telles que leurs dérivées  $u'$  et  $v'$  soient continues sur  $I$ .

Alors pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$  :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

### 💡 Démonstration

La fonction  $uv$  est dérivable sur  $I$  avec  $(uv)' = u'v + uv'$ . Ainsi

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Puisque  $uv'$ ,  $(uv)'$  et  $u'v$  sont continues sur  $I$ , on en déduit que :

$$\int_a^b (uv')(t) dt = \int_a^b [(uv)'(t) - (u'v)(t)] dt$$

et par linéarité de l'intégration :

$$\int_a^b (uv')(t) dt = \int_a^b (uv)'(t) dt - \int_a^b (u'v)(t) dt$$

Or  $uv$  est une primitive de  $(uv)'$  sur  $I$ , donc

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

Ainsi, on obtient :

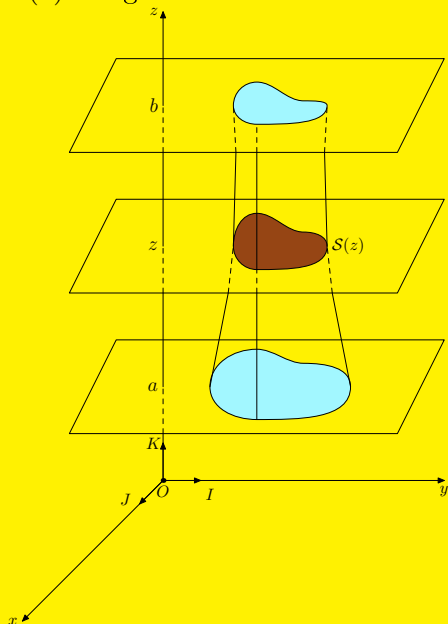
$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

## I.J Calculs de volumes

### 💡 Propriété

Dans un repère orthogonal  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$  de l'espace, le solide  $\mathcal{V}$  est limité par les plans d'équations  $z = a$  et  $z = b$ ,  $a < b$ .

$\mathcal{S}(z)$  désigne l'aire de la section du solide par le plan parallèle à  $(OIJ)$  de cote  $z$ , avec  $a \leq z \leq b$ .



L'unité de volume étant le volume du parallélépipède rectangle construit sur  $O, I, J$  et  $K$ , de la même manière que pour définir l'unité d'aire dans le plan repéré, si  $\mathcal{S}$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ , alors on admet que le volume  $V$  du solide  $\mathcal{V}$  est égal à :

$$V = \int_a^b \mathcal{S}(z) dz$$



### Remarque

Nous verrons des exemples en T-D 😊 notamment concernant des solides de révolution et les solides de référence : boule, cone, pyramide.....