Cours de mathématiques

Terminale S1

Chapitre 7 : Dénombrements

Année scolaire 2008-2009
mise à jour 15 janvier 2009

Fig. 1 – Émile Borel

Un spécialiste des probabilités

Table des matières

Informations sur la mise en page

Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec métapost et les macros de J-M Sarlat. L'environnement bclogo, utilisé pour la réalisation de ce document, est téléchargeable ici : `http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo`

I Chapitre 7 : Dénombrement

I.A Introduction(fiche)

? Problème ouvert

Considèrons un ensemble $\mathcal{E}$ ayant n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$.
On dresse la liste de toutes les parties de $\mathcal{E}$, y compris la partie vide n'ayant aucun élément,et on note chacune de ces parties sur un carton que l'on place dans une urne, chaque carton étant supposé indiscernable au toucher.
On tire alors au hasard deux cartons simultanément de l'urne.
La question est de savoir quelle est la probabilité que la réunion de ces deux cartons soit égale à $\mathcal{E}$.

1. Résoudre le problème si $n = 1$ puis $n = 2$.
2. Résoudre le problème dans le cas général.
3. Reprendre le problème si l'on suppose que l'on tire au hasard les deux cartons successivement et avec remise du premier carton tiré.

À la fin de ce chapitre, vous posséderez quelques éléments qui vous permettont de résoudre ce problème, ce sera d'ailleurs le sujet du devoir 15.

I.A.1 Jeux et dénombrements

Nous allons évoquer et décrire trois jeux qui vont nous permettre de dénombrer les différents tirages possibles de p éléments d'un ensemble à n éléments.

1. **Joker**
   Il s'agit de choisir successivement 7 chiffres au hasard parmi les dix chiffres de 0 à 9.
   On obtient alors un nombre de sept chiffres, un même chiffre pouvant être choisi plusieur fois.
2. **Le quinté**
   Lors d'une course de 20 chevaux, on s'intéresse à l'arrivée, dans l'ordre, des 5 premiers chevaux, en admettant qu'il ne peut y avoir d'ex-aequo et que le joueur n'a aucune connaissance hippique lui permettant de jouer autrement qu'entièrement au hasard.
3. **Le loto**
   Le jeu du loto consiste à choisir au hasard 6 nombres parmi les 49 premiers entiers naturels, un même nombre ne pouvant être choisi plusieur fois et l'ordre d'apparition des nombres n'étant pas prise en compte.

? **Quelle probabilité de gagner pour chacun des jeux ?**
Après avoir remarqué que les trois jeux se modèlisent par une ***loi équirépartie***(voir rappels fiche), déterminer dans chacun des cas évoqués ci-avant la probabilité de gagner, c'est à dire de trouver les bons numéros.

I.A.2 Différents tirages dans une urne

De nombreuses expériences aléatoires peuvent s'assimiler à des tirages de boules dans une urne $\mathcal{U}$ et se modélisent par une loi équirépartie comme suit :

– **Tirages successifs avec remise**
On tire une boule de l'urne $\mathcal{U}$, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On effectue de la sorte p tirages (dits *successifs avec remise*).

Définition 1:
Un résultat possible est une suite ordonnée ou liste de p éléments choisis dans un ensemble à n éléments.
Le nombre de ***suites ordonnées ou listes*** de p éléments choisis dans un ensemble à n éléments est n^p.

Cette méthode est à relier au Joker.

– **Tirages successifs sans remise**
On tire une boule de l'urne $\mathcal{U}$, on note son numéro et on ne la remet pas dans l'urne. On effectue de la sorte p tirages, avec $p \leq n$ (dits *successifs sans remise*).

Définition 2:
Un résultat possible est une ***liste ou suite ordonnée d'éléments tous distincts d'un ensemble à*** n ***éléments***.
Le nombre de ***listes ou de suites ordonnées*** formées de p numéros distincts pris dans $\mathcal{U}$ est égal à $n(n-1)\dots(n-p+1)$.
Cas particulier : Lorsque $p = n$, toutes les boules sont tirées une à une, une telle liste est appelée ***permutation***.
Le nombre de ***permutations*** formées des n numéros de $\mathcal{U}$ est égal à $n(n-1)\dots 2\times 1$.

Cette méthode est à relier au Quinté.

– **Tirages simultanés**

Définition 3:
On tire simultanément p boules de l'urne $\mathcal{U}$ ($p \leq n$). On obtient ainsi un ensemble de p numéros pris parmi n, que l'on appelle ***combinaison***(voir le paragraphe qui suit).

Cette méthode est à relier au Loto.

I.B Définitions

I.B.1 Combinaison

Définition 4:
Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, le nombre $n(n-1)\dots 2\times 1$ est noté $n!$ (il se lit factorielle n).
Par convention : $1! = 1$ et $0! = 1$.

On revient sur les suites ordonnées et les permutations
Le nombre de **suites ordonnées de** p **éléments, tous distincts,** d'un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ Le nombre de **permutations** d'un ensemble à n éléments est $n!$.

THÉORÈME 1

Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n $(0 \leq p \leq n)$ est noté $\binom{n}{p}$ et est égal à

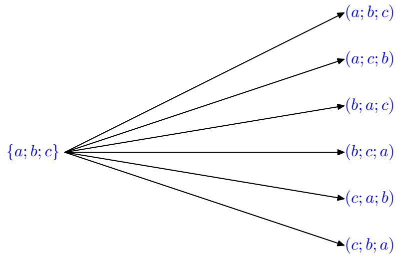
$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

.

Demonstration : Faisons d'abord le raisonnement sur un exemple :

Quel est le nombre de combinaisons de trois et éléments pris dans un ensemble de 5 éléments ? On sait que le nombre de listes de trois éléments distincts d'un ensemble à cinq éléments est égal à $\dfrac{5!}{(5-3)!}$. Choisissons une combinaison de trois éléments, que l'on note $\{a;b;c\}$. Combien de listes ordonnées d'éléments distincts peut-on constituer avec cette combinaison ? Il y a, d'après le schéma qui se trouve à droite, 6=3 ! fois plus de listes que de combinaisons, d'où :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!}$$



$$\binom{5}{3} \times 3! = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Considérons maintenant le cas général : soit un ensemble $\mathcal{E}$ à n éléments.
On choisit une combinaison parmi les $\binom{n}{p}$ possibles de $\mathcal{E}$.
Pour cette combinaison, on a $p!$ permutations possibles.
Donc nous pouvons en déduire que le nombre de suites ordonnées de p éléments, tous distincts, de $\mathcal{E}$, que l'on sait égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ est aussi, d'après ce qui précéde, égal à

$$p! \times \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

.
Ce qui permet d'obtenir :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

I.B.2 Propriétés des combinaisons

Théorème 2
Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

Théorème 3
Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

En effet choisir de prendre p objets parmi n revient au même que de prendre $n-p$ objets parmi n.

Théorème 4
Pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n$:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Demonstration :

1. E est un ensemble à n éléments, on note a un élément fixé de E. Pour dénombrer les parties à p éléments de E, on peut distinguer :
   - celles qui ne contiennent pas a : ce sont les parties à p éléments choisis parmi les $n-1$ éléments restants ; elles sont au nombre de
   $$\binom{n-1}{p}$$
   - celles qui contiennent a : il reste à choisir $p-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments restants ; on en compte :
   $$\binom{n-1}{p-1}$$

   Or il y a $\binom{n}{p}$ parties à p éléments de E, donc
   $$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$
2. deuxième facon de démontrer la propriété :

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}\\
\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}\\
\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!}\\
\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!}\\
\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \binom{n}{p}
\end{aligned}
$$

Le triangle de Pascal

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	$\binom{0}{0}$					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

Blaise Pascal, mathématicien.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	**3**	**3**	1		
4	1	4	**6**	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

On place des 1 sur la ligne correspondant à $n=0$ et $n=1$ et sur la diagonale, puis on calcule les $\binom{n}{p}$ de proche en proche en utilisant
le théorème 3.

Exemple : $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=\binom{4}{2}$

I.B.3 Formule du binôme

Théorème 5 -Formule du binôme

Pour tous nombres *complexes* a et b, et pour tout entier $n \geq 1$,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k}a^k b^{n-k} + \ldots + b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque importante

Dans le théorème précédent, a et b sont deux nombres complexes.
Nous ne savons pas encore ce qu'est un tel nombre, aussi nous nous contenterons de prendre a et b réels, pour l'instant.
L'ensemble des nombres complexes sera introduit dans le chapitre 8.

Démonstration de la fomule du binôme

Vous démontrerez la formule du binôme par récurrence (voir le Devoir 14)

Application de la formule du binôme

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.
2. En déduire le nombre de toutes les parties d'un ensemble à n éléments[a].

[a] (*voir le problème ouvert du début de chapitre*)

Solution :

1. D'après la formule du binôme : $(1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k}$ donc $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
2. Le nombre de toutes les parties d'un ensemble à n éléments est la somme du nombre de parties à 0 élément, à 1 éléments, à 2 éléments, ..., à n éléments.

   Le nombre total est donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, c'est à dire 2^n d'après la question 1.