Cours de mathématiques

Terminale S1

Chapitre 6 : Équations différentielles

Année scolaire 2008-2009
mise à jour 21 décembre 2008

Fig. 1 – Leonhard Euler

M'a permis de découvrir Scilab.

Table des matières

Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec métapost et les macros de J-M Sarlat. L'environnement bclogo*, utilisé pour la réalisation de ce document , est téléchargeable ici :*
`http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo`

I Chapitre 6 : Équations différentielles

I.A Introduction(fiche)

I.A.1 Désintégration des noyaux radioactifs

Nous avons traîté cette activité dans le chapitre précédent pour introduire la fonction exponentielle.
Rappel : Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante : si $N(t)$ est le nombre de noyaux présents à l'instant t, pendant la durée $\triangle t$,la variation $\triangle N(t)$ du nombre de noyaux est proportionnelle à $\triangle t$ et à $N(t)$.
Les physiciens écrivent :

$$\boxed{\triangle N(t) = -kN(t)\triangle t \text{ pour } k > 0}$$

En supposant que la fonction $N : t \longmapsto N(t)$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$, expliquez pourquoi on peut écrire , pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{N'(t) = -kN(t)}$$

On dit alors (voir exercice fiche TD) que la fonction N est solution de l'équation différentielle

$$y' = -ky$$

dont les solutions sont les fonctions

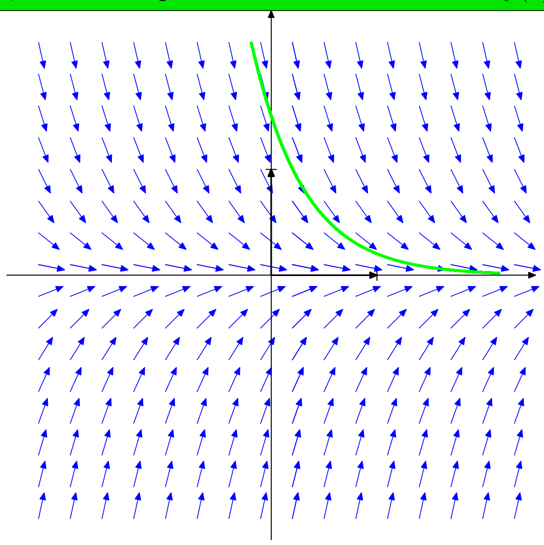
$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto Ke^{-kx}$$

où K est une constante.
Parmi toutes ces solutions, une seule vérifie la condition initiale $f(0) = N(0)$, $N(0)$ étant le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant initial $t = 0$.
Prenons par exemple $k = 2$, alors les solutions de l'équation $y' = -2y$ sont les fonctions

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto Ke^{-2x}$$

où K est une constante que l'on peut déterminer lorsque l'on donne la condition initiale $f(0) = 1.5$ unité, par exemple.
La figure qui suit donne les solutions sous forme de champ de tangentes et le graphe de la solution qui vérifie la condition initiale.

En vert, la solution qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1.5$



Champ de tangentes de $y' = -2y$

I.A.2 Loi de refroidissement de Newton

Un thermomètre indique la température d'une pièce ($20°C$).On le place sur le bord d'une fenêtre à l'extérieur, où la température est de $4°C$.Au bout de trois minutes, il indique $8°C$.La loi de Newton exprime que la température $f(t)$ évolue en fonction du temps t écoulé depuis le changement de milieu du thermomètre (t en minutes, $f(t)$ en degré Celsius) de la manière suivante :
il existe une constante k telle que, pour tout $t \geq 0$:

$$f'(t) = k(f(t) - 4)$$

(On convient que $t = 0$ lors du changement de milieu.)

1. On pose $g(t) = f(t) - 4$.
   Montrer que g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout $t \geq 0$:

   $$g'(t) = kg(t)$$

2. En déduire que $g(t) = g(0)e^{kt}$
3. Exprimer alors $f(t)$ en fonction de t et calculer la constante k.
4. Étudier et représenter graphiquement la fonction f sur $[0; +\infty[$.

I.A.3 Salinité d'une solution acqueuse

Une solution acqueuse dont la salinité est de $0,3kg.L^{-1}$ se déverse à la vitesse de $2L.min^{-1}$ dans un réservoir contenant initialement 10 litres d'eau pure.
On suppose que le mélange est homogène à chaque instant.
Le mélange s'écoule du réservoir à la même vitesse, ainsi sa contenance reste égale à 10 litres.
On note $y(t)$ la masse en kg contenu dans le réservoir au bout de t minutes.

1. Que vaut $y(0)$?
2. On note h une durée (en minutes) assez petite pour que l'on puisse considérer que la concentration en sel ne varie pas entre les instants t et $t + h$ ($h > 0$).
   - Expliquer pourquoi, entre les instants t et $t + h$, il s'écoule du réservoir $2h$ litres de solution qui contient $2h.\dfrac{y(t)}{10}$ kg de sel.
   - Expliquer pourquoi, entre les instants t et $t + h$, il se déverse $2h$ litres de solution qui contient $0.6h$ kg de sel.
   - Montrer que $y(t + h) - y(t) = -2h\dfrac{y(t)}{10} + 0.6h$.
3. En déduire que y est dérivable sur $[0; +\infty[$ et vérifie l'équation différentielle :

   $$y'(t) = -0.2y(t) + 0.6$$

4. À l'aide de la méthode d'Euler (revoir les TP correspondants), tracer une ligne polygonale qui approche la courbe représentative sur l'intervalle $[0; 15]$ de la fonction f dérivable sur $[0; +\infty[$ vérifiant $f(0) = 0$ et pour tout réel $t \geq 0$,

   $$f'(t) = -0.2f(t) + 0.6$$

I.B Vocabulaire

Vocabulaire

On dit que la fonction f est solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}: \; y' = ay + b$ (a et b étant deux réels fixés) sur l'intervalle I si f est dérivable sur I et si, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = af(x) + b$.
Lorsque que l'on ne précise pas l'intervalle I, on prend impicitement $I = \mathbb{R}$.
On tolèrera l'expression "*$y = f(x)$ est solution de l'équation $\mathcal{E}$*", sachant qu'une solution de l'équation $\mathcal{E}$ est une *fonction*.

I.C Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Théorème 1

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné) sont les fonctions $x \longmapsto Ke^{ax}$ où K est une constante.

Démonstration :

- Il est évident que les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ke^{ax}$ sont solutions de l'équation $\mathcal{E}: \; y' = ay$.
- Réciproquement, supposons que y soit une solution quelconque de l'équation, on pose alors

$$g(x) = e^{-ax}y(x)$$

On remarque que la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$z'(x) = e^{-ax}y'(x) - ay(x)e^{-ax} = e^{-ax}(y'(x) - ay(x)) = 0$$

car y est solution de $\mathcal{E}$.
Autrement dit, la fonction z est constante sur $\mathbb{R}$, donc il existe une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = K$$

Ce qui permet d'écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; y(x) = Ke^{ax}$$

I.D Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème 2

Les solutions de l'équation différentielle $\mathcal{E}': \; y' = ay + b$ ($a \neq 0$ et b réels donnés) sont les fonctions $x \longmapsto Ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où K est une constante.

Démonstration :

- La fonction $g: x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution de $\mathcal{E}'$ évidemment.
- Soit f une solution quelconque de $\mathcal{E}'$, alors on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = af(x) + b$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g'(x) = ag(x) + b$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f-g)'(x) = a(f-g)(x)$$

autrement dit,

$$f \text{est solution de } \mathcal{E}' \iff f-g \text{ est solution de } \ y' = ay$$

c'est à dire que

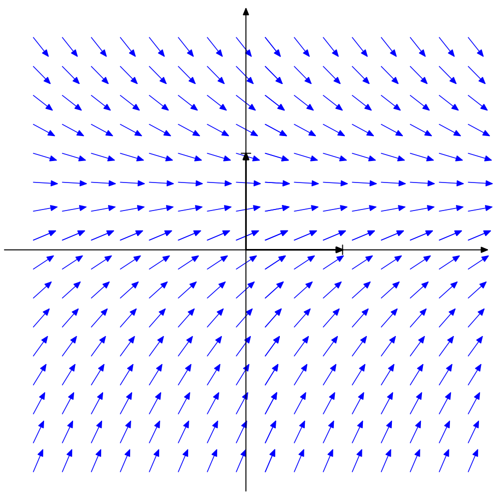
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - g(x) = Ke^{ax}, K \text{ constante}$$

donc

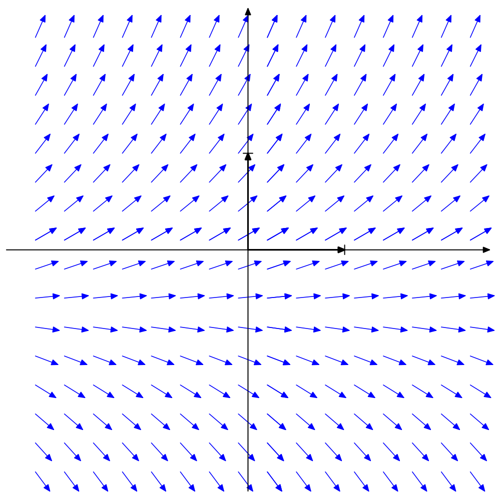
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

Lorsque $a = 0$, les solutions de $\mathcal{E}'$ sont les fonctions affines $x \longmapsto bx + K$

Exemple 1: Les champs de tangentes sont dans les cas $a = -0.8$ et $a = 0.8$ données ci-dessous :



Champ de tangentes de $y' = -0.8y + 0.5$



Champ de tangentes de $y' = 0.8y + 0.5$

Théorème 3

Il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (x_0 et y_0 réels donnés)

Démonstration : Voir exercice fiche.

I.E Équations se ramenant à $y' = ay + b$ (exercices de sessions antérieures du bac)

Les énoncés ont été obtenus ici :
http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique346

I.E.1 Exercice 1

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c . Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) : y' = \frac{y}{4}.$$

   (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   (b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est- à-dire $g(0) = 1$.

   (c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2)\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   (a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

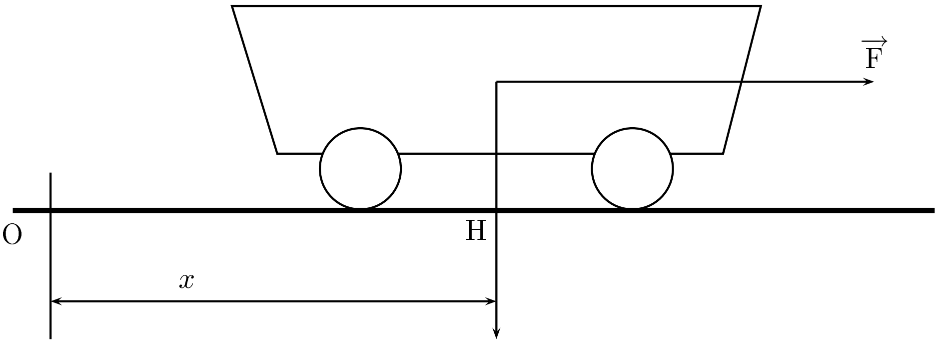
$$(\mathrm{E}_3)\left\{\begin{array}{lcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

   o h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

   (b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   (c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

I.E.2 Exercice 2



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles ? la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 $\mathrm{N.m^{-1}.s}$. La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H ? l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$(\mathrm{E}) \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
   Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle
   (F) $\quad v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.
   Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
   (a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
   (b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{-t/8}$.
3. Calculer $\mathrm{V} = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale ? 90 % de sa valeur limite V ?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

I.E.3 Utilisation de la méthode d'Euler et de Scilab pour résoudre $y' = ay + b$

Le logiciel de calculs numériques Scilab est un outil que l'on a déjà utilisé dans d'autres circonstances. Je vous propose de compiler ce programme source et d'observer ce qui se passe.

```
labels=["valeur de a";"valeur de b";"valeur de h";"valeur de m"];
par=x_mdialog('Choisissez les coefficients de yprime=ay+b',..
labels,['3';'1';'0.1';'3']);
a=evstr(par(1));
b=evstr(par(2));
h=evstr(par(3));
m=evstr(par(4));
function y=euler(t,z)
n=floor(t/z);
x=0:z:(n-1)*z;
y(1)=1;
for i=2:n;y(i)=y(i-1)+(a*y(i-1)+b)*z;end
j=(1+(b/a))*exp(a*x)-(b/a);
xtitle("Approximation de la solution de yprime=ay+b par la methode euler..
avec a="+string(a)+",b="+string(b)+",h="+string(h));
plot2d(x,y),plot2d(x,j,style=5)
endfunction
euler(m,h)
```

Que se passe-t-il si l'on change le signe de a ?
Êtes-vous surpris de ce que l'on obtient graphiquement ?

I.F Partie hors programme

Ce qui suit ne figure pas au programme de Terminale S et n'est donné qu'à titre de curiosité pour le moment.
Les élèves qui poursuivront des études scientifiques aborderont peut-être ce type de problèmes et penseront alors à leur professeur de Terminale :-)

I.F.1 Les requins et les sardines

Vous retrouverez toutes les explications ici :
`http://www.ann.jussieu.fr/~postel/scilab/volterra/volterra.html`

Volterra

Nous allons traiter ici le cas des systèmes de deux équations différentielles. On a un système dont les fonctions inconnues sont maintenant $x(t)$ et $y(t)$. L'exemple le plus classique, qui est d'ailleurs à l'origine des équations différentielles, est celui de la trajectoire des planètes autour du soleil. Maintenant pour voir les solutions, on va les placer dans ce que l'on appelle le plan de phase, c'est-à-dire le plan (x, y) et les solutions se promèneront, lorsque le temps t varie, le long de ces trajectoires : penser aux planètes.
D'abord une petite histoire :
À Trieste, pendant la première guerre mondiale, la pêche avait bien sûr diminué à cause des événements. La pêche consistait à lancer des filets et à récupérer tous les poissons. Le bureau des pêches avait constaté qu'alors la proportion de poissons du style requins, peu intéressants pour la consommation, avait considérablement augmenté par rapport aux poissons intéressants du style sardines. Ils demandèrent l'aide de Volterra qui modélisa le système requins-sardines par le système des deux équations différentielles suivantes où $x(t)$ représente le nombre de sardines et $y(t)$ représente le nombre de requins :

$$\begin{cases} x'(t) = a.x(t) - b.x(t).y(t);\ \ avec\ a, b > 0 \\ y'(t) = c.x(t).y(t) - d.y(t);\ \ avec\ c, d > 0 \\ x(0) = x_0,\ \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Ce modèle approché, appelé aussi système de Lotka-Volterra, signifie qu'en l'absence de requins les sardines prolifèrent $x'(t) = ax(t)$, qu'en l'absence de sardines les requins disparaissent $y'(t) = -dy(t)$ et le terme en $x(t)y(t)$, qui représente la rencontre des requins et des sardines, augmente le nombre de requins et diminue le nombre de sardines (car ces dernières sont mangées par les requins).
À partir de ce modèle Volterra en déduit, sans pouvoir faire les calculs numériques à l'époque, que plus on pêche de poissons, plus la proportion de sardines, donc de poissons intéressants, est importante ! C'est ce que nous allons essayer de retrouver par le calcul.
On prendra par exemple pour l'application numérique $a = 3, b = 1, c = 1$ et $d = 2$.

On crée d'abord un fichier *volterra.sci* dans lequel on définit le système précédent sous la forme d'une fonction vectorielle $f(t, Y)$ où Y représente le vecteur (x, y) (on rappelle que les fichiers lus par Scilab doivent toujours être terminés par un retour chariot) :

```
function Yprim=f(t,Y)
x=Y(1) ; y=Y(2) ;
xprim=a*x-b*x*y ;
yprim=c*x*y-d*y ;
Yprim=[xprim ;yprim]
endfunction
```

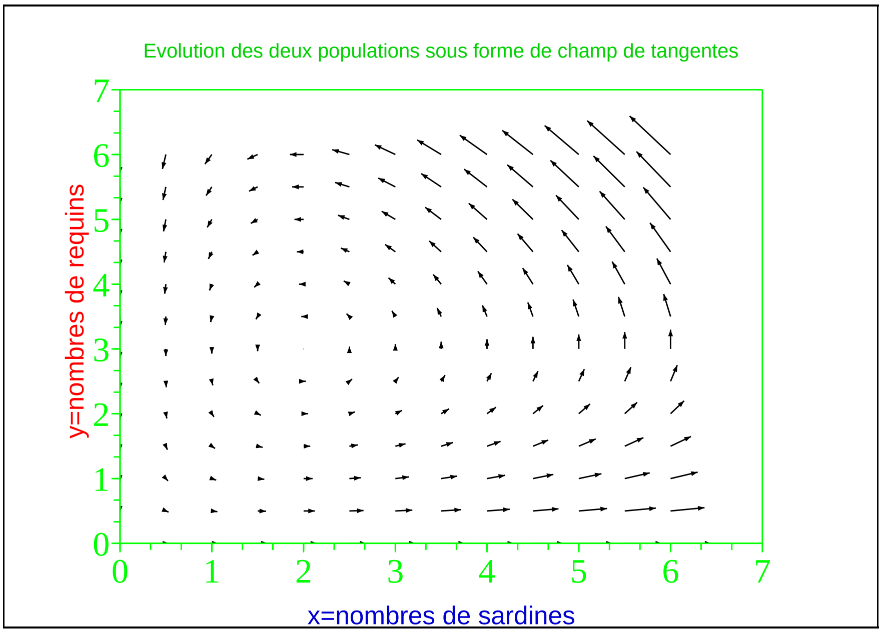
et que l'on charge par $getf("volterra.sci")$.
On va d'abord tracer les lignes de champ (ou champ de tangentes) dans le plan de phase, ce qui permet encore d'avoir une idée des trajectoires sans résoudre le système : cela revient à tracer le vecteur $(x'(t), y'(t))$ en chaque point d'une grille. On utilise ici la fonction *fchamp* définie exprès pour cela :

```
a=3; b=1; c=1; d=2;
xmin=0; xmax=6; ymin=0; ymax=6;
xr=xmin :0.5 :xmax; yr=ymin :0.5 :ymax;
xset("font",2,12)
fchamp(f,0,xr,yr)
xtitle("","x","y")
```

où la fonction f est celle définie dans *volterra.sci*. On voit le champ de vecteurs sur la figure . On peut tracer des trajectoires qui passent par le point cliqué. Cela se fait de la même manière par :

```
xset("thickness",2)
t0=0; tmax=5; dt=0.05;
T=t0 :dt :tmax; while(%t)
[c_i,x0,y0]=xclick();
if c_i==2 then break end;
if x0>=xmin & x0<=xmax & y0>=ymin & y0<=ymax then
sol=ode([x0 ;y0],t0,T,f);
plot2d(sol(1, :),sol(2, :),1,"000")
end end
```

La seule différence est qu'ici il faut donner un vecteur $(x0, y0)$ comme condition initiale et que le tableau *sol* en sortie de *ode* est maintenant une matrice à deux lignes correspondant à $x(t)$ (nombre de sardines) et $y(t)$ (nombre de requins).
Les trajectoires tournent autour du point d'équilibre $(x = d/c = 2, y = a/b = 3)$.



I.F.2 Les loups avec les moutons

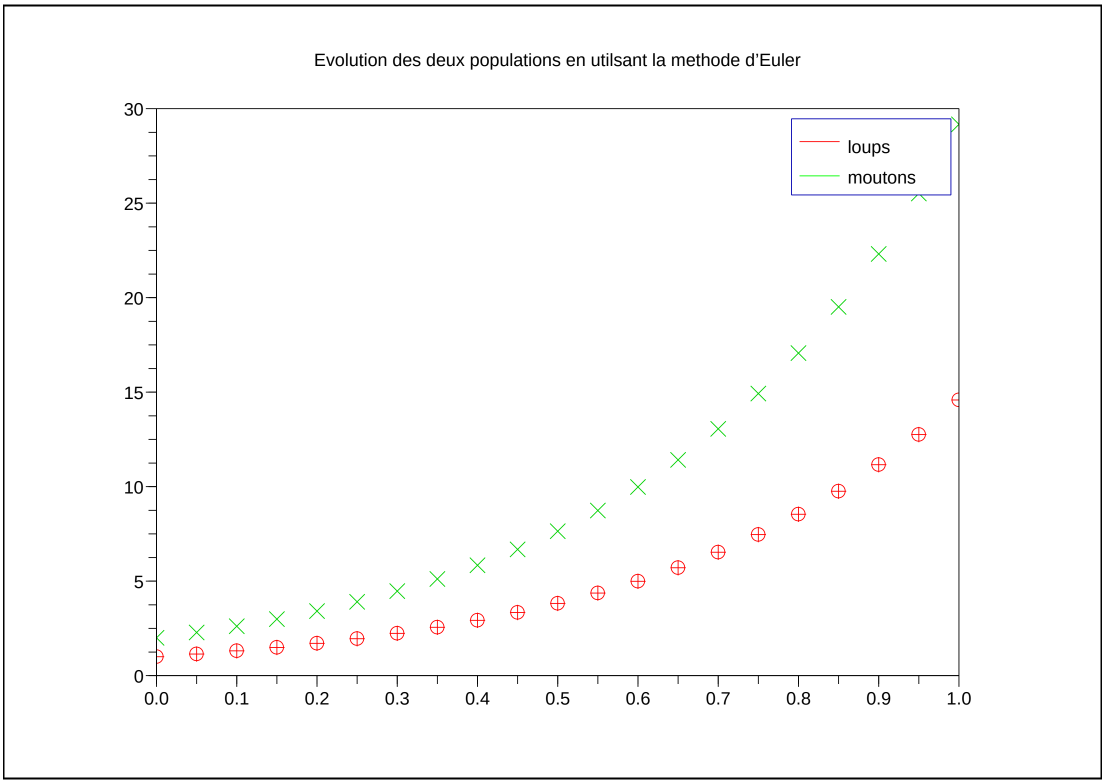
Loups et moutons

On peut étudier l'évolution de la population de loups et de moutons vivant dans le même espace de la même manière en utilisant cette fois-ci la méthode d'Euler, sans passer par un système différentiel, pour donner des valeurs approchées des deux populations, cela ressemblerait alors aux méthodes que l'on a déjà utilisées dans d'autres circonstances.

Voici le *source* correspondant :

```
A=[4,-2;1,1];
function u0=EulerExplicite(fun,u0,t0,t1,n)
// fun est la fonction de l'equation differentielle
// t0 est le temps initial
// u0 est la condition initiale en t0
// t1 le temps final
// n est le nombre de pas de temps
h=(t1-t0)/n
for i=2 :n
u0=u0+h*fun(t0,u0); t0=t0+h;
end
endfunction
Y0=[1;2 ];
deff('y=fun(t,x)','y=A*x')
t0=0; nt=10; np=20; t1=1;
temps=linspace(t0,t1,np+1)';
sol=ones(length(Y0),np+1);
sol( :,1)=Y0;
for i=1 :np
sol( :,i+1)=EulerExplicite(fun,sol( :,i),temps(i),temps(i+1),nt);
end
xbasc()
xtitle('Evolution des deux populations en utilsant la methode d''Euler')
legends(['loups';'moutons'],[5,3],'ur')
plot2d(temps,sol(1, :),style=3);
plot2d(temps,sol(2, :),style=5);
plot(temps,sol(1, :),'g+',temps,sol(2, :),'r*')
```

Deux fois plus de moutons que de loups au départ



Deux fois plus de loups que de moutons au départ