Cours de mathématiques

Terminale S1

Chapitre 3 : Continuité

Année scolaire 2008-2009
mise à jour 6 décembre 2008

"Clairvoyance" R.Magritte*-Souvenir de La Rochelle*

Table des matières

I Chapitre 3 : Continuité . . . **3**
- I.A Activités : voir fiche . . . 3
- I.B Langage de la continuité . . . 3
  - I.B.1 Définition . . . 3
  - I.B.2 Contre-exemple : la fonction partie entière . . . 3
  - I.B.3 Continuité des fonctions usuelles . . . 3
- I.C Théorème des valeurs intermédiaires . . . 4
  - I.C.1 Activité(rappel) . . . 4
  - I.C.2 Le théorème des valeurs intermédiaires et un corollaire . . . 5
  - I.C.3 Utilisation du théorème ou du corollaire . . . 6

Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec métapost et les macros de J-M Sarlat. L'environnement bclogo, utilisé pour la réalisation de ce document , est téléchargeable ici :
http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo

I Chapitre 3 : Continuité

I.A Activités : voir fiche

I.B Langage de la continuité

I.B.1 Définition

Définition 1:

f est une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
- Dire que f est continue en a signifie que f admet une limite en a égale à $f(a)$. ($\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$)
- Dire que f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel de I.

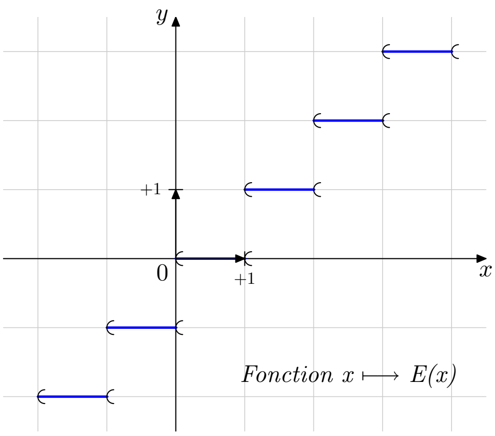
Remarque : f est continue en a si et seulement si : $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.

Exemple 1: f est la fonction définie sur $I =]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
La fonction f est continue en 2 car $f(2) = 1$ et $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$.
Plus généralement, on verra que la fonction f est continue sur I.

Remarque : Graphiquement cela signifie que l'on peut tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle I sans avoir à lever le crayon.

I.B.2 Contre-exemple : la fonction partie entière

La fonction partie entière, notée E, est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Par conséquent, si x désigne un réel et n un entier relatif, $E(x) = n$ si et seulement si $n \leq x < n+1$.



Exemples :

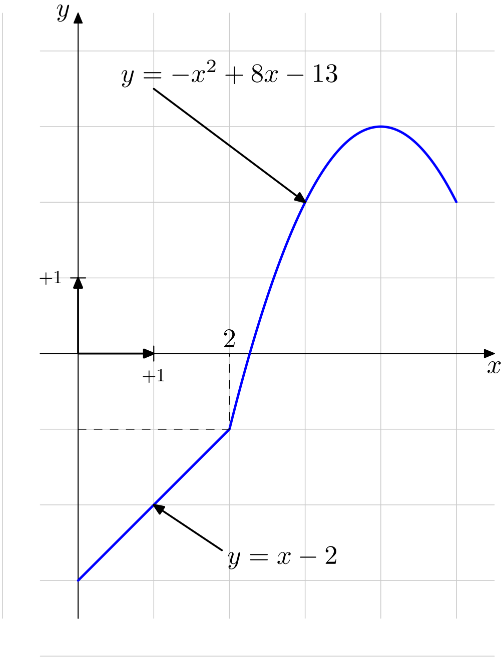
- $E(4) = 4$ car $4 \leq 4 < 5$
- $E(9,3) = 9$ car $9 \leq 9.3 < 10$
- $E(-2) = -2$ car $-2 \leq -2 < -1$
- $E(-4,3) = -5$ car $-5 \leq -4,3 < -4$

I.B.3 Continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions polynômes, sinus et cosinus, la fonction valeur absolue sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.
- Les fonctions construites par opérations ou par composition à partir des précédentes sont continues sur les intervalles qui forment leur ensemble de définition, c'est le cas en particulier des fonctions rationnelles, et de la fonction $x \longmapsto \tan x$.

Exemple 2:

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :



$$\begin{cases} f(x) = x - 3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ f(x) = -x^2 + 8x - 13 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

- f est une fonction affine sur l'intervalle $[0;2[$, elle est donc continue sur $[0;2[$.
- f est une fonction polynôme sur l'intervalle $]2;+\infty[$, elle est donc continue sur $]2;+\infty[$.

Pour démontrer que f est continue sur $[0;+\infty[$, il suffit alors de prouver qu'elle est continue en 2, c'est à dire que :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = f(2)$$

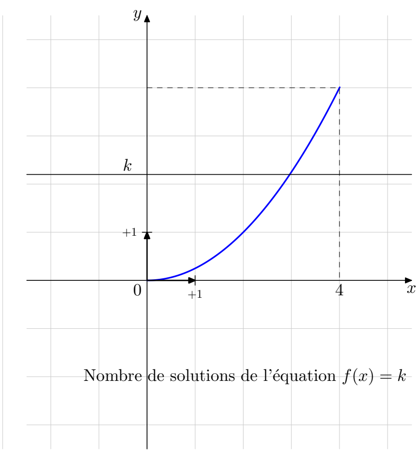
Or $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x - 3 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} -x^2 + 8x - 13 = -1$.

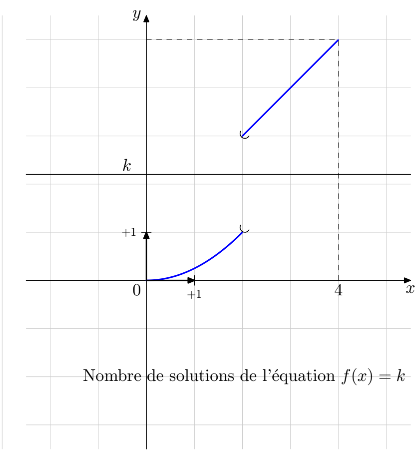
Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -1$ et f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

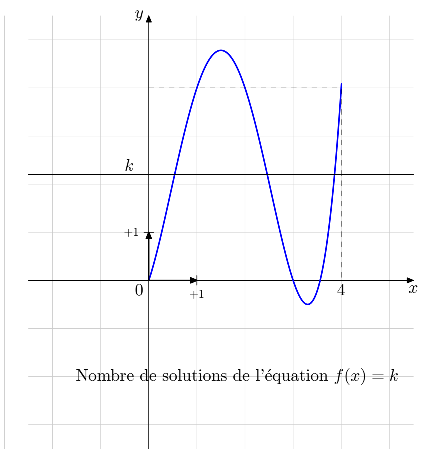
I.C Théorème des valeurs intermédiaires

I.C.1 Activité(rappel)

Voici trois courbes représentatives de trois fonctions $f_i; i = 1, 2, 3$.
Dans les trois cas suivants, déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f_i(x) = k$, suivant les valeurs de k.





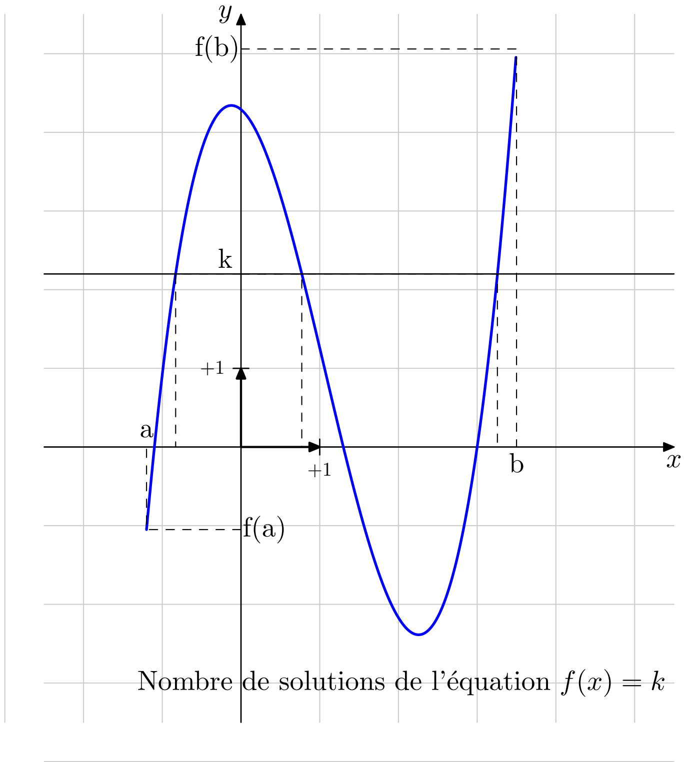


Quelles conditions suffisantes doit vérifier la fonction pour que l'équation $f_i(x) = k$ admette une solution <u>*unique*</u> dans $[0;4]$ pour tout $k \in [f(0); f(4)]$?

I.C.2 Le théorème des valeurs intermédiaires et un corollaire

Théorème 1

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels appartenant à I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



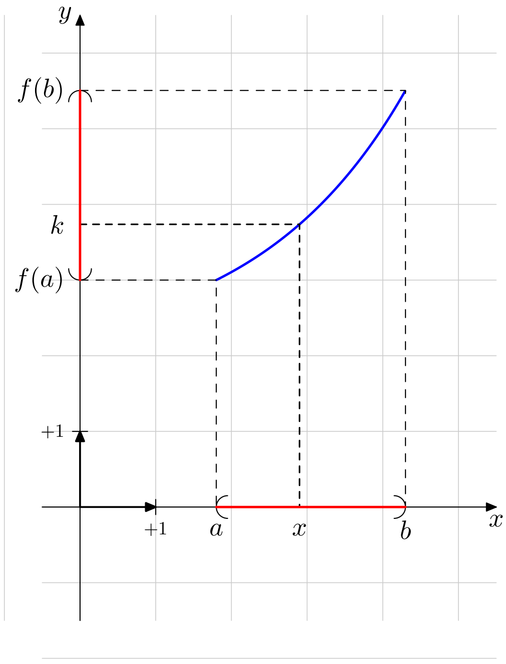
Corollaire 1:

Si f est une fonction **continue et strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur l'intervalle $I = [a; b]$:

1. l'image de I par f est l'intervalle $[f(a); f(b)]$ (resp. $[f(b); f(a)]$) ;
2. pour tout k dans $[f(a); f(b)]$ (resp. $[f(b); f(a)]$), l'équation $f(x) = k$, d'inconnue x, a **une solution et une seule** dans I.

<u>Démonstration :</u> on ne démontrera ce corollaire que dans le cas où f est strictement croissante.

1. Puisque f est strictement croissante sur I, pour tout réel x dans I, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
   Donc toute image $f(x)$, c'est à dire tout nombre de $f(I)$, est dans $[f(a); f(b)]$. **Réciproquement**, si y est dans $[f(a); f(b)]$, y est l'image par f d'au moins un réel c de I (théorème des valeurs intermédiaires), donc y est dans $f(I)$.
2. En outre, l'équation $f(x) = y$ ne peut avoir deux solutions car f étant strictement croissante, deux nombres distincts ont des images distinctes.



I.C.3 Utilisation du théorème ou du corollaire

Soit l'équation $g(x) = 2$ où g est la fonction dont on donne ci-dessous le tableau de variation.

x	-7		-1		3		9
$g(x)$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	10	$\searrow$	5

– Sur l'intervalle $[-7; -1]$, g est continue et strictement décroissante ;
$g(-7) = 5$ et $g(-1) = -1$, alors $2 \in [g(-1); g(-7)]$ et par conséquent, l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-7; -1]$.
– Sur l'intervalle $[-1; 3]$, g est continue et strictement croissante ;
$g(-1) = -1$ et $g(3) = 10$, alors $2 \in [g(-1); g(3)]$ et par conséquent, l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-1; 3]$.
– Sur l'intervalle $[3; 9]$, g est continue et strictement décroissante ; or $2 < g(9)$;
donc l'équation $g(x) = 2$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[3; 9]$.

Conclusion : L'équation $g(x) = 2$ admet deux solutions dans $[-7; 9]$.