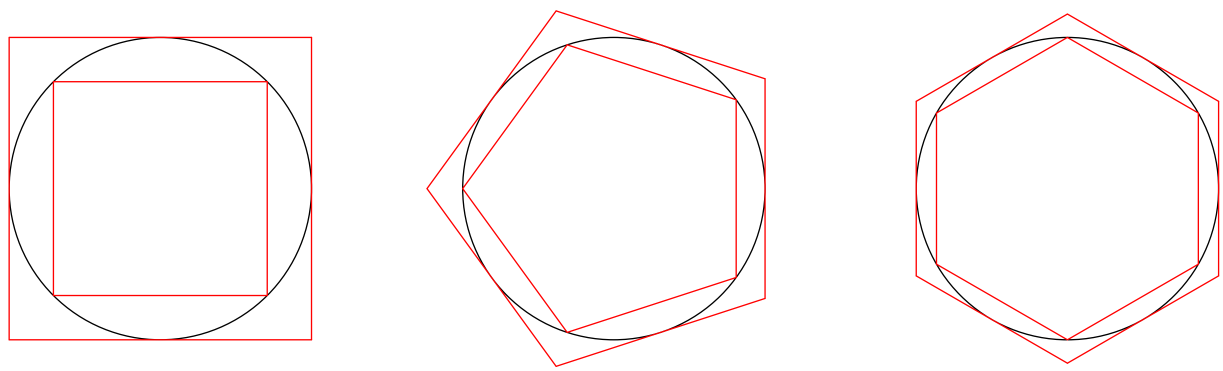
Calcul de π par la méthode d'ARCHIMÈDE

La méthode

Le nombre π est, on pourrait dire par définition, la circonférence d'un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre 1.

L'idée d'ARCHIMÈDE qui, comme vous et moi, savait comparer et mesurer des longueurs de segments de droite, fût d'encadrer ce nombre π par les périmètres de polygones inscrits dans $\mathscr{C}$ ou circonscrits à ce cercle.

De façon sous-jacente, on retrouve donc l'idée des *suites adjacentes*, la multiplication des côtés de ces polygones permet d'approcher d'aussi près que l'on veut (en théorie) le nombre π par défaut ou par excès.



Nous noterons S_n et T_n les périmètres des polygones réguliers à n côtés respectivement inscrits dans $\mathscr{C}$ et circonscrits à $\mathscr{C}$, n étant un entier supérieur à 3.

Il est alors facile d'établir :

$$S_n = n \sin \frac{\pi}{n} \quad T_n = n \tan \frac{\pi}{n}$$

Le calcul de ces nombres est donc, à priori, subordonné à la capacité de calculer le *sinus* et la *tangente* d'un angle.

C'est en remarquant qu'il y a des relations simples entre S_n, T_n, S_{2n} et T_{2n} que la méthode permet de s'affranchir du calcul des sinus et tangentes en se limitant à des multiplications, additions, divisions et extractions de racines carrées, ce qui nous est plus accessible.

On observe :

$$T_{2n} = \frac{2S_n T_n}{S_n + T_n} \quad S_{2n} = \sqrt{S_n T_{2n}}$$

Ainsi, puisque $S_4 = 2\sqrt{2}$ et $T_4 = 4$, nous allons pouvoir calculer de proche en proche (par itération d'une formule) les termes des suites $(S_{2^n})_{n\geqslant 2}$ et $(T_{2^n})_{n\geqslant 2}$.

L'implémentation

Nous allons considérer trois variables : a, b et c. Dans la première on stocke le périmètre du polygone inscrit dans le cercle, dans la seconde le périmètre du polygone circonscrit et enfin dans la troisième, la moyenne des deux précédentes. La procédure consiste à *itérer* les calculs liés au doublement du nombre des côtés en s'appuyant sur les formules ci-dessus.

```
define archimede(n) {
    auto i;
    a = 2 * sqrt(2); b = 4; c = (a + b) / 2;
    for(i=3; i<=n; i++) {
        b =  b * a / c;
        a = sqrt(b * a);
        c = (a + b) / 2;
    }
}
```

La valeur de π se trouve entre les deux périmètres calculés. La première approximation de π qui nous vient à l'esprit est la moyenne arithmétique de ces deux nombres.

Si nous regardons les *développements limités* de S_n et T_n nous constatons :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + \frac{\pi^5}{120n^4} + \dots \\
T_n &= \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + \frac{2\pi^5}{15n^4} + \dots
\end{aligned}
$$

Ainsi, il vient :

$$\frac{2S_n + T_n}{3} = \pi + \frac{3\pi^5}{20n^4} + \dots$$

La meilleure approximation sous forme de moyenne des deux nombres calculés est donc $\frac{1}{3}(2S_n + T_n)$. C'est celle qui nous débarasse du premier terme variable du développement; c'est une valeur approchée par excès.

Les calculs

```
define go(n,s) {
    scale = s;
    temp = archimede(n);
    print "Nombre de côtés [n] :\n",2^n,"\n";
    print "Périmètre intérieur [a] :\n",a,"\n";
    print "Périmètre extérieur [b] :\n",b,"\n";
    print "Différence :\n",b-a,"\n";
    print "Moyenne [(2a+b)/3] :\n",(2*a+b)/3,"\n";
}
```

Il reste à insérer les deux procédures précédentes dans un même fichier `archimede.bc` et à exécuter BC.

La commande suivante : `echo "go(200,200)" | bc -q archimede.bc` retourne

```
Nombre de côtés [n] :
160693804425899027554196209234116260252220299378279283530137 6
Périmètre intérieur [a] :
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230 7\
81640628620899862803482534211706798214808651328230664509260033652208\
149732812836330586417895724267807773644579705260322110165278015451
Périmètre extérieur [b] :
3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307\
81640628620899862803482534211706798214808651328230665109633315560758\
370051982149777371499443636695195034267172257372742664355923083267
Différence :
.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\
0000000000000000000000000000000000000000000000000006003732819085502\
203191693134467850815479124273872606225925521124205541906450678 16
Moyenne [(2a+b)/3] :
3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307\
81640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058\
223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038056
```

Après vérifications, dans ce cas, les approximations données par le périmètre sont exactes jusqu'à la $118^{\text{ème}}$ décimale. La valeur donnée par la moyenne pondérée est exacte à l'exception des trois dernières décimales. Ce calcul procure donc 194 décimales de π.