Détermination des saisons (2)

Équation de Kepler

Il est temps, maintenant, d'introduire le temps... C'est la deuxième loi de KEPLER qui le permet, on note $\mathscr{S}$ l'aire de l'ellipse et $\mathscr{A}$ la durée d'une révolution sidérale du soleil (année), la vitesse aréolaire est égale à

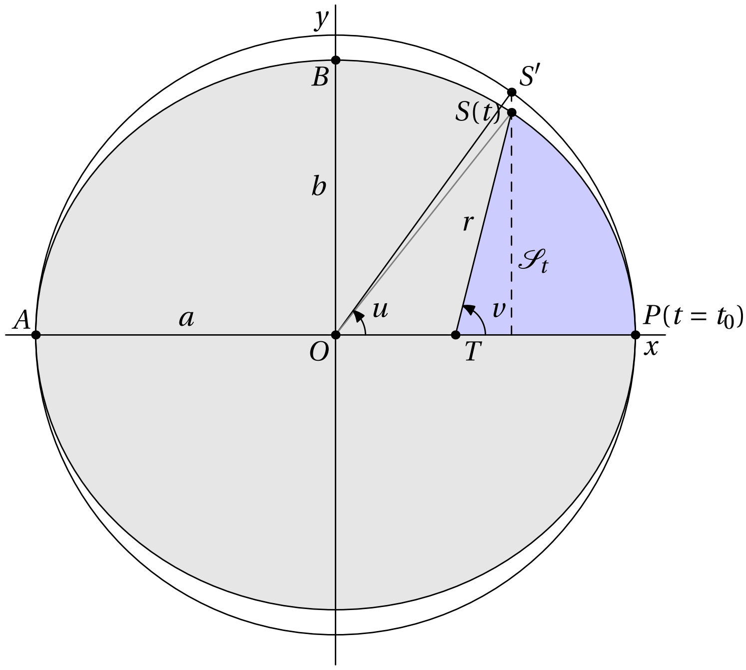
$$\frac{\mathscr{S}}{\mathscr{A}}$$

Question 3

Montrer que $\mathscr{S} = \pi ab$

Soit t_0 l'instant du passage du soleil au périgée (P), à chaque instant t l'aire du secteur d'ellipse PTS est égale à

$$\mathscr{S}_t = \frac{\mathscr{S}}{\mathscr{A}}(t - t_0)$$



Je vous propose maintenant d'exprimer l'aire $\mathscr{S}_t$ d'une autre façon en comparant l'aire du secteur d'ellipse OSP et l'aire du secteur circulaire $OS'P$ puis en évaluant l'aire du triangle OTS.

Question 4

Montrer

$$\mathscr{S}_{OSP} = \frac{b}{a}\mathscr{S}_{OS'P} = \frac{1}{2}abu, \quad \mathscr{S}_{OTS} = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}a^2 e \sin u\right) = \frac{1}{2}abe\sin u$$

Vous remarquerez le caractère particulier de ces aires, la première est « cumulative » et la seconde « relative » (elle tient compte de l'orientation du triangle OTS). En tout état de cause, nous disposons maintenant de l'égalité

$$\mathscr{S}_t = \frac{1}{2}ab(u - e\sin u)$$

Ceci nous permet d'écrire l'équation de KEPLER en tenant compte des différentes égalités connues :

$$\boxed{u - e\sin u = \frac{2\pi}{\mathscr{A}}(t - t_0)}$$

Cette équation est fondamentale, pour un instant t donné, la résoudre en u permet de préciser r et v donc de localiser le soleil.
Avant de poursuivre, un peu de vocabulaire et une convention :

– Les angles seront exprimés en degré (°), minute ($'$), seconde ($''$).

$$2\pi \text{rad} = 1296000''$$

– Le facteur $\dfrac{2\pi}{\mathscr{A}}$ sera noté n, c'est la vitesse angulaire moyenne du soleil autour de la terre, on lui donne le nom de *moyen mouvement.*

$$n = \frac{1296000''}{365.256} \approx 3548.196'' \approx 0.98561° \quad \text{(par jour)}$$

– Les angles v et u sont, respectivement, l'*anomalie vraie* et l'*anomalie excentrique* du soleil.
– La quantité $n(t - t_0)$, autrement dit l'angle qu'aurait parcouru le soleil depuis son passage au périgée si son mouvement était uniforme, est l'*anomalie moyenne* du soleil, on la note M.
L'équation de KEPLER trouve alors sa forme « canonique » :

$$u - e\sin u = M$$

À ce point de l'exposé, il faut considérer trois soleils (rien que çà !) :

1/ Le soleil moyen S'' dont la trajectoire est le cercle principal et dont le mouvement est uniforme (en conformité avec les lois de Kepler), sa position à chaque instant est mesurée par l'anomalie moyenne.

2/ Le soleil excentré S' dont la trajectoire est toujours le cercle principal mais dont la position est mesurée par l'anomalie excentrique. Il se déduit de S'' par la résolution de l'équation de KEPLER.

3/ Le soleil vrai S dont la trajectoire est l'ellipse et la position mesurée par l'anomalie vraie (vue de T). Sa position se déduit de celle S' par l'affinité d'axe (Ox) et de rapport b/a.

Maintenant effectuons une première résolution de l'équation de Kepler :

Question 5

Pour une valeur de t fixée, on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = M \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = M + e\sin(u_n)$$

Montrer que cette suite converge vers la solution de l'équation de KEPLER.
Déterminer approximativement l'anomalie vraie du soleil, 30 jours, 60 jours et 90 jours après son passage au périgée.

Prochain épisode (3) : Dates et durées des saisons.