pmaxima

```
Maxima 5.27.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.7 (a.k.a. GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
```

Développements limités

Développements en préparation d'exercices

▷ `taylor(sin(x),x,0,10);`

1 : $$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \cdots$$

▷ `taylor(sin(x+%pi/3),x,0,4);`

2 : $$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}\,x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{\sqrt{3}\,x^4}{48} + \cdots$$

▷ `taylor(tan(x+PI/4),x,0,2);`

4 : $$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1\right) x + \left(\tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) x^2 + \cdots$$

▷ `taylor(sin(a*x)-sin(b*x),x,0,3);`

5 : $$(a-b)\,x - \frac{\left(a^3 - b^3\right) x^3}{6} + \cdots$$

▷ `taylor(log(1+x+sqrt(1+x)),x,0,6);`

6 : $$\log 2 + \frac{3\,x}{4} - \frac{11\,x^2}{32} + \frac{7\,x^3}{32} - \frac{163\,x^4}{1024} + \frac{319\,x^5}{2560} - \frac{1255\,x^6}{12288} + \cdots$$

▷ `assume(x>0);`

7 : $$[x > 0]$$

▷ `taylor(atan(x),x,inf,6);`

8 : $$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3\,x^3} - \frac{1}{5\,x^5} + \cdots$$

▷ `taylor(1/(1-cos(x)),x,0,8);`

9 : $$\frac{2}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + \frac{x^4}{3024} + \frac{x^6}{86400} + \frac{x^8}{2661120} + \cdots$$

▷ `taylor(sin(tan(x))-tan(sin(x)),x,0,10);`

10 : $$-\frac{x^7}{30} - \frac{29\,x^9}{756} + \cdots$$

Un exercice

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

1/ Montrer que la fonction $g : x \mapsto x f(x)$ est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite, nous identifierons g avec ce prolongement.

2/ Après avoir déterminé le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^x - 1$, calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $g(x)$.

3/ Montrer alors qu'il existe 4 réels a, b, c, d tels que, au voisinage de 0 sauf en 0, on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x} + b + cx + dx^2 + o(x^2)$$

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est le *développement limité généralisé* de f, à l'ordre 2, au voisinage de 0 ($\mathrm{DLG}_2(0)$).

4/ Déterminer le $\mathrm{DLG}_2(0)$ de $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$.

Définition de f :

```
▷ f(x):=1/(exp(x)-1);
```

Définition de g :

```
▷ g(x):=x*f(x);
```

Calculons la limite de g en 0 :

```
▷ limit(g(x),x,0);
```

13 : 1

Cette limite existe donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

$\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^x - 1$:

```
▷ A:taylor(exp(x)-1,x,0,4);
```

14 : $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots$

Le quotient de x par $e^x - 1$ induit une simplification par x. La quantité qui reste est de la forme $\dfrac{1}{1+u}$ avec u :

```
▷ A/x-1;
```

15 : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \cdots$

On développe $\dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3 :

```
▷ taylor(1/(1+u),u,0,3);
```

16 : $1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$

En subtituant le développement de u à u dans l'expression précédente, on obtient le résultat attendu (que ***Maxima*** donne directement) :

```
▷ A:taylor(g(x),x,0,4);
```

17 : $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\cdots$

En divisant par x on obtient donc le développement généralisé de f en 0 :

```
▷ A/x;
```

18 : $\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{720}+\cdots$

Les coefficients a, b, c, d s'obtiennent par lecture ...

Pour finir, la même méthode justifierait le $\mathrm{DLG}_2(0)$ de $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$:

```
▷ taylor(1/sinh(x),x,0,3);
```

19 : $\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+\frac{7\,x^3}{360}+\cdots$

Soyons généreux :

```
▷ taylor(1/(exp(x)-1),x,0,10);
```

20 : $\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{x^3}{720}+\frac{x^5}{30240}-\frac{x^7}{1209600}+\frac{x^9}{47900160}+\cdots$

```
▷ taylor(1/sinh(x),x,0,10);
```

21 : $\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+\frac{7\,x^3}{360}-\frac{31\,x^5}{15120}+\frac{127\,x^7}{604800}-\frac{73\,x^9}{3421440}+\cdots$