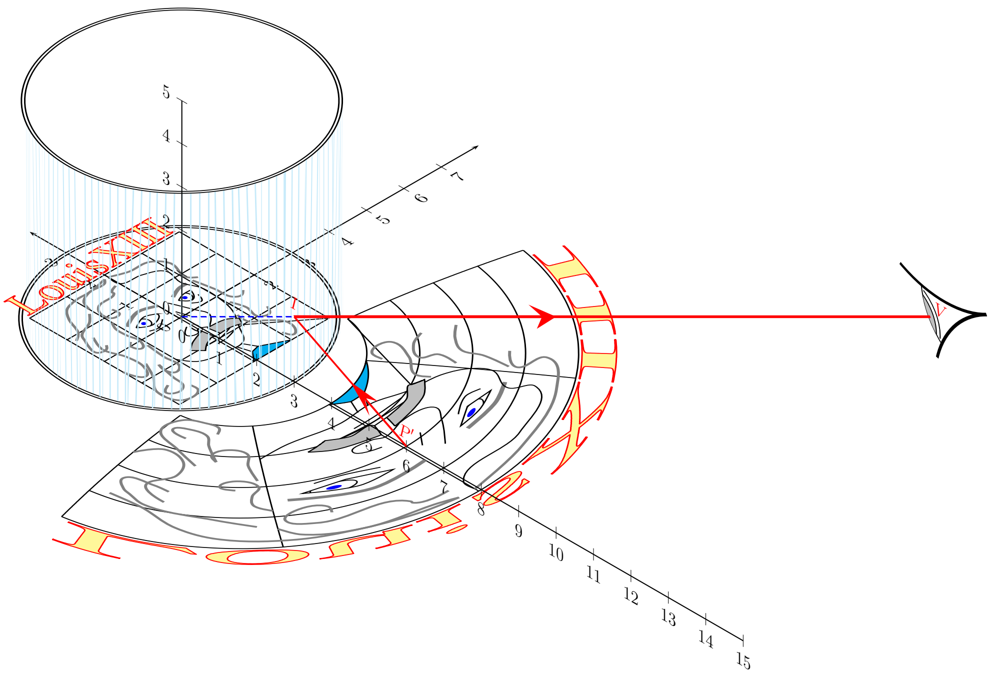
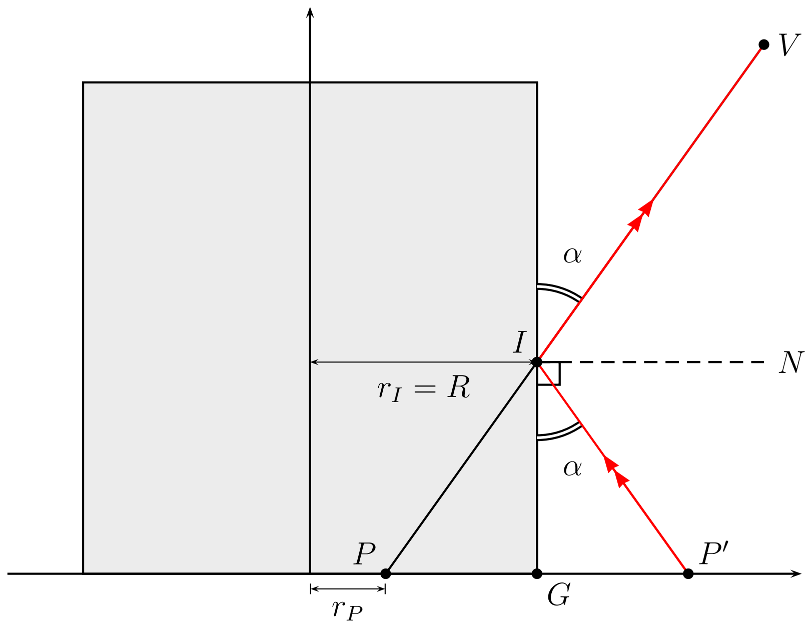
Les anamorphoses : présentation théorique

Jürgen Gilg, Manuel Luque, Jean-Michel Sarlat

2 mai octobre 2013

1 L'anamorphose cylindrique





On place à l'intérieur du cylindre l'image telle qu'elle doit être vue par un observateur regardant dans le miroir cylindrique (on peut la placer à l'extérieur, mais il faut que les rayons lumineux rencontrent toujours le cylindre, il faut donc veiller aux dimensions). L'objet anamorphique est « l'objet déformé » dont le miroir reconstituera les proportions réelles.

Objet et image obéissent aux lois de la réflexion de l'optique géométrique :

- rayon incident et rayon réfléchi appartiennent à un même plan ;
- rayon incident et rayon réfléchi sont symétriques par rapport à la normale au miroir au point d'incidence.

L'image non déformée (celle qui est vue dans le miroir) est placée, dans cet exemple, au centre du miroir. Un rayon incident partant de l'objet anamorphique se réfléchit sur le miroir et après réflexion parvient à l'œil de notre observateur. L'observateur a l'illusion que le rayon provient du point image. Il faut donc reconstruire mathématiquement la marche d'un tel rayon lumineux en partant de l'image dans le miroir.

L'observateur est suffisamment éloigné du miroir pour pouvoir être considéré comme ponctuel.

Soit P un point de l'image(noté A' dans le schéma ci-après), V l'œil de l'observateur. Traçons un droite PV et déterminons le point d'intersection I avec le cylindre : c'est le point d'incidence.

$V(x_V, y_V, z_V)$ et $P(x_P, y_P, 0)$

L'équation paramétrique de la droite (PV) s'écrit $\overrightarrow{IV} = \rho\overrightarrow{PV}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_V - x_I & = & \rho(x_V - x_P) \\ y_V - y_I & = & \rho(y_V - y_P) \\ z_V - z_I & = & \rho(z_V - 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_I & = & x_V(1-\rho) + \rho x_P \\ y_I & = & y_V(1-\rho) + \rho y_P \\ z_I & = & z_V(1-\rho) \end{array}\right.$$

Le point I appartenant au cylindre, ses coordonnées vérifient la relation :

$$x_I^2 + y_I^2 = R$$

Après développement, on obtient l'équation du second degré en ρ:

$$a\rho^2 + 2b'\rho + c = 0$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = (x_V - x_P)^2 + (y_V + y_P)^2 \\ b' = x_V x_P + y_V y_P - x_V^2 - y_V^2 \\ c = x_V^2 + y_V^2 - R^2 \end{array}\right.$$

La résolution de cette équation nous donne les solutions classiques:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho' = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \\ \rho'' = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \end{array}\right. \qquad \Delta' = b'^2 - ac$$

On retiendra la plus petite valeur positive des deux, que par la suite j'appelle ρ.

IV représente le rayon réfléchi par le miroir. Le rayon incident est défini par la droite symétrique de IV par rapport à la normale au miroir en I. Je cherche le symétrique de V, nommé V' par rapport à cette normale IN. Ce point V' remplit deux conditions :

1. $\overrightarrow{IV} + \overrightarrow{IV'} = k\overrightarrow{IN}$
2. $\overrightarrow{VV'}.\overrightarrow{IN} = 0$

La normale (IN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IN}(x_I, y_I, 0)$
La première condition se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{l} x_V - x_I + x_{V'} - x_I = kx_I \\ y_V - x_I + y_{V'} - y_I = ky_I \\ z_V - z_I + z_{V'} - z_I = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{V'} = kx_I + 2x_I - x_V \\ y_{V'} = ky_I + 2y_I - y_V \\ z_{V'} = 2z_I - z_V \end{array}\right.$$

La deuxième par :

$$(x_{V'} - x_V)x_I + (y_{V'} - y_V)y_I = 0$$

En remplaçant $x_{V'}$ et $y_{V'}$ tirés de la première condition dans la deuxième :

$$k(x_I^2 + y_I^2) + 2x_I^2 - 2x_V x_I + 2y_I^2 - 2y_V y_I = 0$$

$$kR^2 + 2R^2 = 2(x_V x_I + y_V y_I)$$

$$k + 2 = \frac{2}{R^2}(x_V x_I + y_V y_I)$$

Les coordonnées de V' s'en déduisent :

$$\begin{cases} x_{V'} = (k+2)x_I - x_V \\ y_{V'} = (k+2)y_I - y_V \\ z_{V'} = z_V(1 - 2\rho) \end{cases}$$

Il reste à trouver l'intersection de (IV') avec le plan horizontal $z = 0$.

Équation paramétrique de IV', M étant un point courant : $\overrightarrow{MV'} = \alpha \overrightarrow{IV'}$

$$\begin{cases} x_{V'} - x = \alpha(x_{V'} - x_I) \\ y_{V'} - y = \alpha(y_{V'} - y_I) \\ z_{V'} - z = \alpha(z_{V'} - z_I) \end{cases}$$

$z = 0 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{z_{V'}}{z_{V'} - z_I}$ soit

$$\alpha = \frac{1 - 2\rho}{-\rho}$$

En remplaçant α par son expression, nous obtenons les coordonnées du point de l'objet anamorphique.

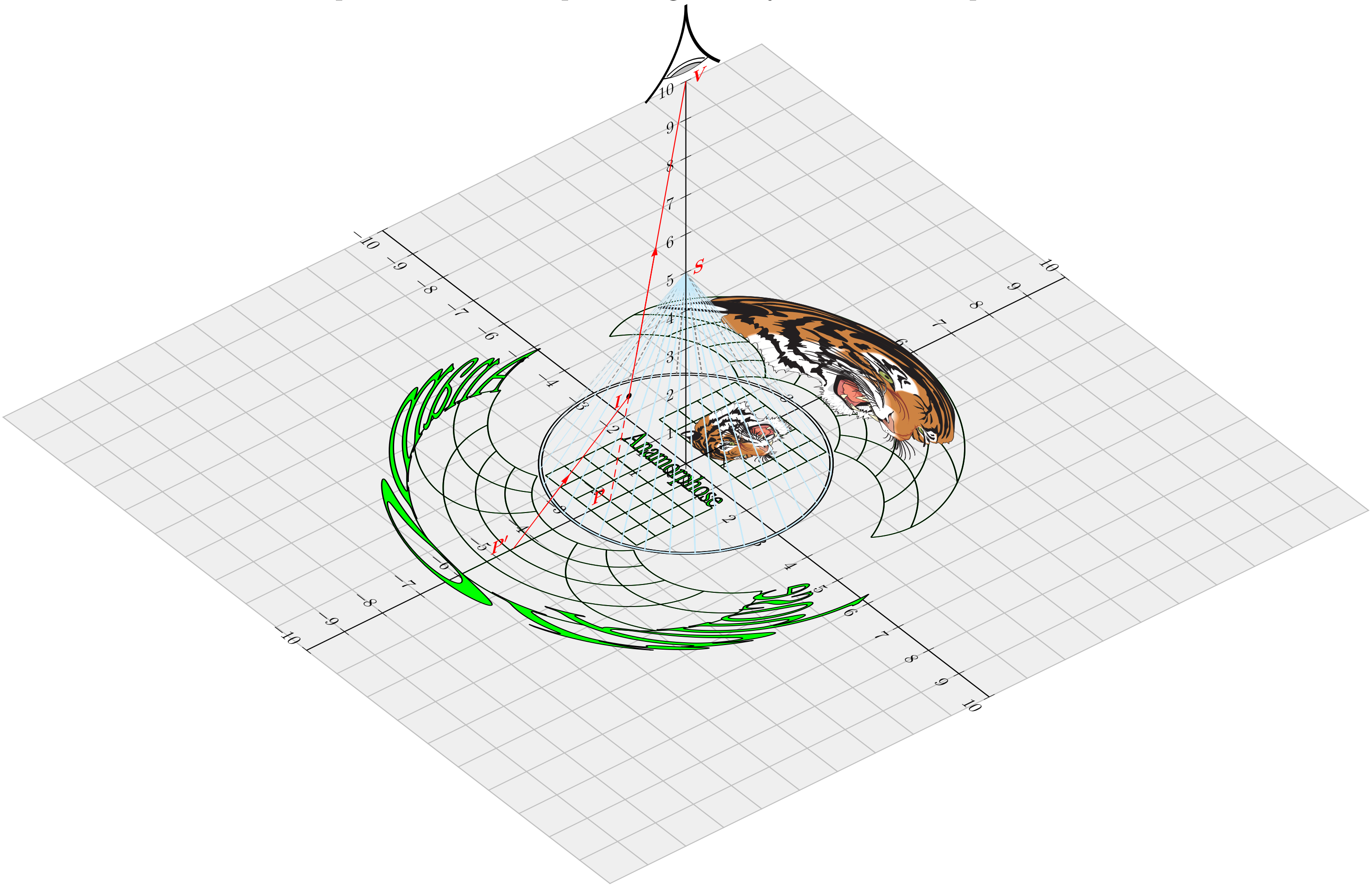
$$\begin{cases} x = x_{V'} - \alpha(x_{V'} - x_I) \\ y = y_{V'} - \alpha(y_{V'} - y_I) \end{cases}$$

Cette série de calculs doit être appliquée à tous les points de l'image « normale » afin d'obtenir l'objet anamorphique (déformé) dont le miroir « redressera » la forme.

On notera que *la cote de l'observateur z_V n'intervient pas*. On le comprend aisément en faisant un dessin du plan vertical passant par l'œil et l'axe du cylindre miroir. La position de la projection horizontale étant fixée (x_V, y_V), quelle que soit la valeur de z_V, A et A' étant symétriques par rapport à la génératrice du miroir appartenant au plan vertical choisi, si A' est donné alors A est fixé quelque soit z_V.

2 L'anamorphose conique

Le principe est identique à celui de l'anamorphose cylindrique : imaginons un rayon lumineux provenant de l'objet « anamorphique », se réfléchissant sur le miroir conique et parvenant à l'œil de l'observateur placé au-dessus et dans l'axe du cône à une position suffisamment haute pour que l'observateur puisse être considéré comme ponctuel. Ainsi l'observateur aura l'illusion d'observer l'image reconstituée par le miroir conique. Image et objet sont dans le plan horizontal.



Il s'agit de déterminer en premier, l'intersection de (VP) avec le cône, qu'on appelle I (point d'incidence). Les coordonnées de V, S et P sont notées : $V(0,0,Z_V)$, $S(0,0,Z_S)$ et $P(X_P,Y_P,0)$.

L'équation paramétrique de la droite (PV) s'écrit $\overrightarrow{IV} = \lambda\overrightarrow{PV}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0-x_I &=& \lambda(0-x_P) \\ 0-y_I &=& \lambda(0-y_P) \\ z_V-z_I &=& \lambda(z_V-0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_I &=& \lambda x_P \\ y_I &=& \lambda y_P \\ z_I &=& (1-\lambda)z_V \end{array}\right.$$

On pose :

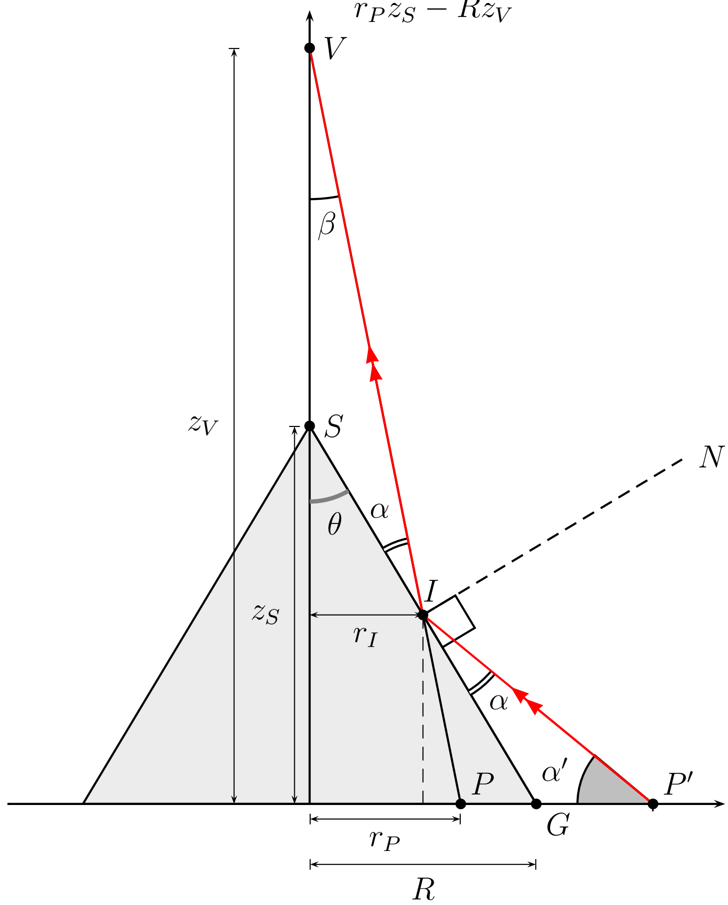
$$r_I^2 = x_I^2 + y_I^2 \quad \text{et} \quad r_P^2 = x_P^2 + y_P^2 \quad \text{et} \quad |\overrightarrow{OG}| = R$$

Le point I appartenant au cône, ses coordonnées vérifient la relation (théorême de Thalès):

$$\frac{R}{z_S} = \frac{r_I}{z_S - z_I}$$

$$\frac{R}{z_S} = \frac{\lambda r_P}{z_S - (1-\lambda) z_P}$$

$$\lambda = \frac{R(z_S - z_V)}{r_P z_S - R z_V}$$



Pour construire le rayon incident, $(P'I)$, (IV) est le rayon réfléchi, déterminons α'.

Un raisonnement géométrique élémentaire nous montre que :

$$\alpha' = 90° - 2\theta + \beta$$

avec

$$\beta = \arctan \frac{r_P}{z_V}$$

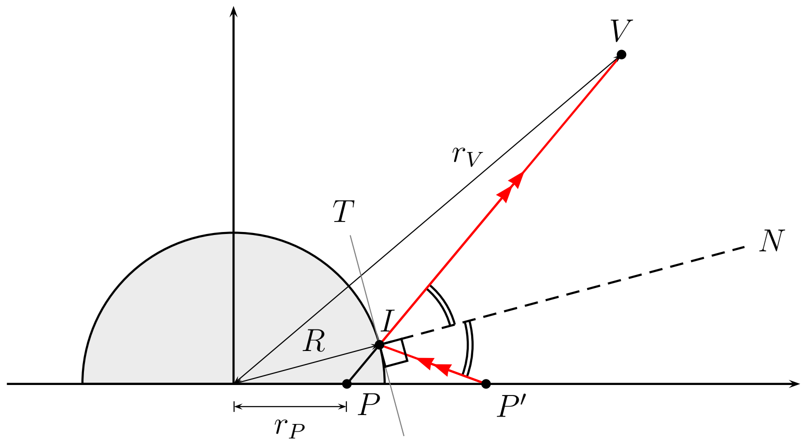
et

$$\theta = \arctan \frac{R}{z_S} \quad \text{demi-angle au sommet du cône}$$

Dans le plan horizontal, les coordonnées de P' sont :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{P'} & = & x_I + \dfrac{z_I}{\tan \alpha'} \\ y_{P'} & = & y_I + \dfrac{z_I}{\tan \alpha'} \end{array} \right.$$

3 L'anamorphose sphérique



On place à l'intérieur de la demi-sphère l'image telle qu'elle doit être vue par un observateur regardant dans le miroir sphérique. (on peut la placer à l'extérieur, mais il faut que les rayons lumineux rencontrent toujours la sphère, il faut donc veiller aux dimensions). L'objet anamorphique est « l'objet déformé » dont le miroir reconstituera les proportions réelles.

Objet et image obéissent aux lois de la réflexion de l'optique géométrique :

- rayon incident et rayon réfléchi appartiennent à un même plan ;
- rayon incident et rayon réfléchi sont symétriques par rapport à la normale au miroir au point d'incidence.

L'image non déformée (celle qui est vue dans le miroir) est placée, dans cet exemple, au centre du miroir. Un rayon incident partant de l'objet anamorphique se réfléchit sur le miroir et après réflexion parvient à l'œil de notre observateur. L'observateur a l'illusion que le rayon provient du point image. Il faut donc reconstruire mathématiquement la marche d'un tel rayon lumineux en partant de l'image dans le miroir.

L'observateur est suffisamment éloigné du miroir pour pouvoir être considéré comme ponctuel.

Soit P un point de l'image, V l'œil de l'observateur. Traçons un droite PV et déterminons le point d'intersection I avec la sphère : c'est le point d'incidence.

$V(x_V, y_V, z_V)$ et $P(x_P, y_P, 0)$

L'équation paramétrique de la droite (PV) s'écrit $\overrightarrow{IV} = \lambda \overrightarrow{PV}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_V - x_I &=& \lambda(x_V - x_P) \\ y_V - y_I &=& \lambda(y_V - y_P) \\ z_V - z_I &=& \lambda(z_V - 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_I &=& x_V(1-\lambda) + \lambda x_P \\ y_I &=& y_V(1-\lambda) + \lambda y_P \\ z_I &=& z_V(1-\lambda) \end{array}\right.$$

Le point I appartenant à la sphère, ses coordonnées vérifient la relation :

$$x_I^2 + y_I^2 + z_I^2 = R^2$$

On pose :

$$r_V^2 = x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 \quad \text{et} \quad r_P^2 = x_P^2 + y_P^2$$

$$(x_V + \lambda(x_P - x_V))^2 + (y_V + \lambda(y_P - y_V))^2 + ((1-\lambda)z_V)^2 = R^2$$

$$x_V^2 + 2\lambda x_V(x_P - x_V) + \lambda^2(x_P - x_V)^2 + y_V^2 + 2\lambda y_V(y_P - y_V) + \lambda^2(y_P - y_V)^2 + (1 - 2\lambda + \lambda^2)z_V^2 = R^2$$

Après développement, on obtient l'équation du second degré en λ:

$$\lambda^2\left((x_P - x_V)^2 + (y_P - y_V)^2 + z_V^2\right) + 2\lambda\left(x_V(x_P - x_V) + y_V(y_P - y_V) - z_V^2\right) + x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 - R^2 = 0$$

$$\lambda^2\left(x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 + x_P^2 + y_P^2 - 2x_P x_V - 2y_P y_V\right) + 2\lambda\left(-x_V^2 - y_V^2 - z_V^2 + x_P x_V + y_P y_V\right) + x_V^2 + y_V^2 + z_V^2$$

$$a\lambda^2 + 2b'\lambda + c = 0$$

Pour le coefficient a de λ^2

$$a = x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 + x_P^2 + y_P^2 - 2x_P x_V - 2y_P y_V$$

Pour le coefficient $2b'$ de λ :

$$2b' = -x_V^2 - y_V^2 - z_V^2 + x_P x_V + y_P y_V$$

Pour le coefficient c :

$$c = x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 - R^2$$

$$a\lambda^2 + 2b'\lambda + c = 0$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 + x_P^2 + y_P^2 - 2x_P x_V - 2y_P y_V \\ b' = -x_V^2 - y_V^2 - z_V^2 + x_P x_V + y_P y_V \\ c = x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 - R^2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = r_V^2 + r_P^2 - 2x_Px_V - 2y_Py_V \\ b' = -r_V^2 + x_Px_V + y_Py_V \\ c = r_V^2 - R^2 \end{array}\right.$$

La résolution de cette équation nous donne les solutions classiques:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda' = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \\ \lambda'' = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \end{array}\right. \qquad \Delta' = b'^2 - ac$$

On retiendra la valeur positive.

IV représente le rayon réfléchi par le miroir. Le rayon incident est défini par la droite symétrique de IV par rapport à la normale au miroir en I. Je cherche le symétrique de V, nommé V' par rapport à cette normale IN. Ce point V' remplit deux conditions :

1. $\overrightarrow{IV} + \overrightarrow{IV'} = k\overrightarrow{IN}$
2. $\overrightarrow{VV'}.\overrightarrow{IN} = 0$

La normale (IN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IN}(x_I, y_I, z_I)$
La première condition se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{l} x_V - x_I + x_{V'} - x_I = kx_I \\ y_V - x_I + y_{V'} - y_I = ky_I \\ z_V - z_I + z_{V'} - z_I = kz_I \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{V'} = kx_I + 2x_I - x_V \\ y_{V'} = ky_I + 2y_I - y_V \\ z_{V'} = kz_I + 2z_I - z_V \end{array}\right.$$

La deuxième par :

$$(x_{V'} - x_V)x_I + (y_{V'} - y_V)y_I + (z_{V'} - z_V)z_I = 0$$

En remplaçant $x_{V'}$, $y_{V'}$ et $z'_{V'}$ tirés de la première condition dans la deuxième :

$$k(x_I^2 + y_I^2 + y_I^2) + 2x_I^2 - 2x_Vx_I + 2y_I^2 - 2y_Vy_I + 2z_I^2 - 2z_Vz_I = 0$$

$$kR^2 + 2R^2 = 2(x_Vx_I + y_Vy_I + z_Vz_I)$$

$$k + 2 = \frac{2}{R^2}(x_Vx_I + y_Vy_I) + z_Vz_I$$

Les coordonnées de V' s'en déduisent :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{V'} = (k+2)x_I - x_V \\ y_{V'} = (k+2)y_I - y_V \\ z_{V'} = (k+2)z_I - z_V \end{array}\right.$$

Il reste à trouver l'intersection de (IV') avec le plan horizontal $z = 0$.

Équation paramétrique de IV', M étant un point courant : $\overrightarrow{MI} = \alpha\overrightarrow{V'I}$

$$\begin{cases} x_I - x = \alpha(x_I - x_{V'}) \\ y_I - y = \alpha(y_I - y_{V'}) \\ z_I - z = \alpha(z_I - z_{V'}) \end{cases}$$

$z = 0 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{z_I}{z_I - z_{V'}}$.

En remplaçant α par son expression, nous obtenons les coordonnées du point de l'objet anamorphique.

$$\begin{cases} x = x_I - \alpha(x_I - x_{V'}) \\ y = y_I - \alpha(y_I - y_{V'}) \\ z = 0 \end{cases}$$

Cette série de calculs doit être appliquée à tous les points de l'image « normale » afin d'obtenir l'objet anamorphique (déformé) dont le miroir « redressera » la forme.

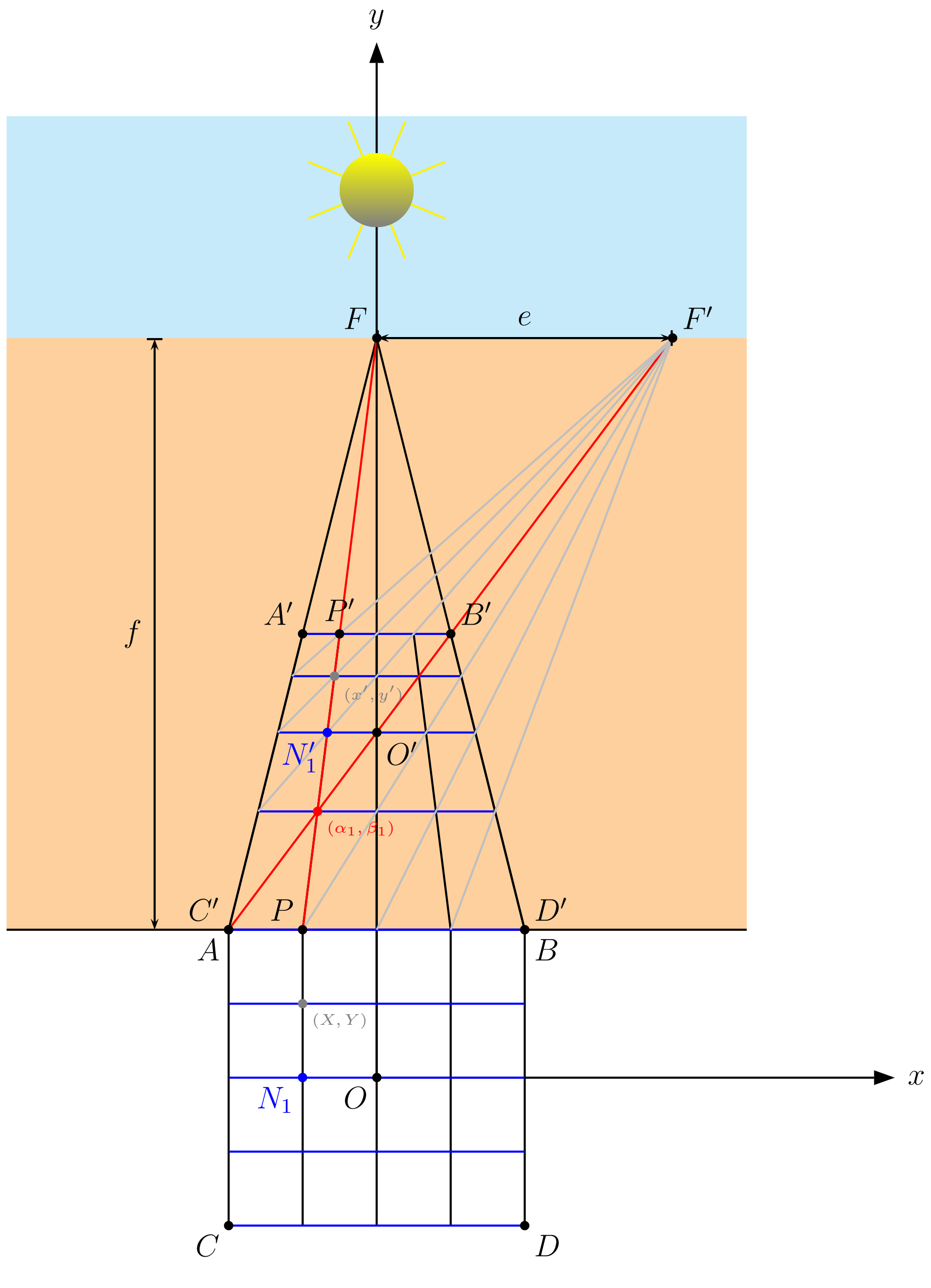
Remarque : l'image doit se former du côté de l'observateur à l'intérieur du miroir, plus près du bord du miroir que du centre. Si on déplace le point P vers O, il arrive un moment où le rayon réfléchi part au-dessus de l'horizontale et ne rencontre plus le plan horizontal. L'anamorphose n'est plus possible et pour les calculs c'est le CRASH !

4 La perspective

Dans le livre de Jurgis Baltrušaïtis[1], on trouve le principe de la « *costruzione legittima* » avec un schéma de Léonard de Vinci (1492) et des schémas anamorphiques de Niceron (1658). Je cite page 58 :

« Rappelons en quelques mots quels ont été le procédés utilisés par les artistes pour l'ordonnancement de leurs tableaux en perspective normale. La première ligne tracée est celle de l'horizon à la hauteur de l'œil. Deux points y sont ensuite fixés : au milieu le point principal vers où convergent toutes les lignes droites parallèles qui s'éloignent en profondeur ; sur la même horizontale et à la même distance du point principal que l'œil, en face de la composition – le point de distance, vers lequel convergent les diagonales. »

[1] *Anamorphoses : les perspectives dépravées* en livre de poche chez Flammarion.



Exemples :

- $A \longrightarrow A'$
- $B \longrightarrow B'$

- $C \longrightarrow C'$
- $D \longrightarrow D'$
- $O \longrightarrow O'$
- $M_1 \longrightarrow M_1'$
- $M_2 \longrightarrow M_2'$

Déterminons les coordonnées (α_1, β_1) de l'intersection de (PF) avec (AF').

Posons que les coordonnées des points essentiels sont :

- $F(0, f)$
- $F'(e, f)$
- $A(-a, a)$
- $B(a, a)$
- $C(a, -a)$
- $D(-a, -a)$
- $P(X, a)$

Équation de (AF') :

$$\frac{y-f}{x-e} = \frac{a-f}{-a-e} \Longrightarrow x(a-f) + y(a+e) - a(f+e) = 0$$

Équation de (PF) :

$$\frac{x-0}{y-f} = \frac{X-0}{a-f} \Longrightarrow x(a-f) - yX + fX = 0$$

Intersection $(PF) \bigcap (AF')$

$$\alpha_1 = \frac{Xe}{X+a+e} \qquad \beta_1 = \frac{a(f+e)+fX}{X+a+e}$$

Si on prend maintenant, un point d'ordonnée $Y \neq X$ par exemple N_1 dont l'image N_1' se situe toujours sur (PF), mais à l'intersection de PF avec la parallèle à $x'Ox$ menée par le point-image du point de coordonnée (Y, Y) (ici O' qui est l'image de $O(0, 0)$).

Il s'agit de déterminer l'intersection de (PF) avec la droite d'équation :

$$y = \beta_2 = \frac{a(f+e)+fY}{Y+a+e}$$

Après calculs et simplifications, on trouve pour l'abscisse :

$$\alpha_2 = \frac{Xe}{Y+a+e}$$

En résumé si dans le repère Oxy, on appelle (X,Y) les coordonnées d'un point-objet et (x',y') les coordonnées du point image dans la transformation **anamorphose oblique** ou **perspective**, les formules qui permettent de passer de l'objet à l'image s'écrivent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'} = \dfrac{\boldsymbol{Xe}}{\boldsymbol{Y+a+e}} \\ \boldsymbol{y'} = \dfrac{\boldsymbol{a(f+e)+fY}}{\boldsymbol{Y+a+e}} \end{cases}$$