1 La toupie – un solide rigide qui se tourne

Il est

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

et avec $\vec{L} = \underline{J}\,\vec{\omega}$, dont

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

c'est égal à

$$\begin{aligned} \vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J_1\dot{\omega}_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_1\omega_1 \\ J_2\omega_2 \\ J_3\omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les équations euleriennes :

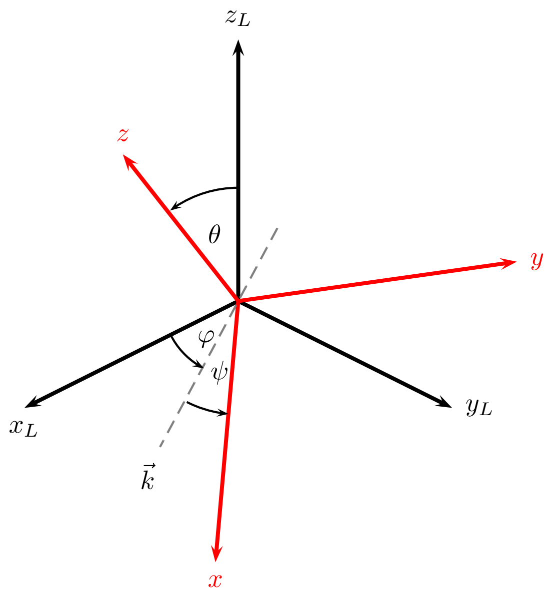
$$J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = M_1 \tag{1}$$
$$J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = M_2 \tag{2}$$
$$J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = M_3 \tag{3}$$

1.1 Angles euleriennes

Le système laboratoir $S(x_L, y_L, z_L$ contre le système eulerien $S'(x, y, z)$ (un système fixe du solide rigide donné par trois angles) nommées les *angles euleriennes*. Les deux systèmes ont le même origine O :

1. Rotation autour de l'axe $\vec{z}_L$ avec l'angle φ – le nouvel axe $\vec{x}$ on nomme *nœud* $\vec{k}$.
2. Rotation autour du *nœud* $\vec{k}$ avec l'angle θ.
3. Rotation autour du novel axe $\vec{z}$ avec l'angle ψ.

Toutes les rotations sont faites en direction positive en sense mathématique (Right-Hand-Rule).



Dans le repère eulerien on regarde de petites angles :

1. dφ autour $\vec{z}_L$
2. dθ autour du nœud $\vec{k}$

3. $\mathrm{d}\psi$ autour de $\vec{z}$

La matrice de rotation :

$$\underline{R}(\varphi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

La vitesse angulaire puis se nomme à

$$\vec{\omega}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi\vec{z}_L + \mathrm{d}\theta\vec{k} + \mathrm{d}\psi\vec{z} \tag{5}$$

C'est pourquoi qu'on construit un tel nouveau système pour que $\vec{\omega}$ est écritable d'une manière très facile. Mais en insertant les angles euleriennes cela devient un peu complexe, mais en consequence ça donne des solutions dans le repère du solide!!!

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \cos\psi\vec{e}_x - \sin\psi\vec{e}_y \\ \vec{z}_L &= \sin\theta\sin\psi\vec{e}_x - \sin\theta\cos\psi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z \end{aligned}$$

Insertion au (5) donne :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}\,\mathrm{d}t &= \mathrm{d}\varphi\vec{z}_L + \mathrm{d}\theta\vec{k} + \mathrm{d}\psi\vec{z} \\ &= \mathrm{d}\varphi(\sin\theta\sin\psi\vec{e}_x - \sin\theta\cos\psi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z) + \mathrm{d}\theta(\cos\psi\vec{e}_x - \sin\psi\vec{e}_y) + \mathrm{d}\psi\vec{e}_z \end{aligned}$$

Sortant, division par $\mathrm{d}t$ et notation vectorielle donne :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Regardons les components vectorielles

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \tag{6}$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \tag{7}$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \tag{8}$$

1.2 La toupie – sans forces

Cela implément $\vec{M} = \vec{0}$ et les équations euleriennes (1) – (3) simplifient à :

$$J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = 0 \tag{9}$$
$$J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = 0 \tag{10}$$
$$J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = 0 \tag{11}$$

Multiplications (9) $\cdot\,\omega_1$, (10) $\cdot\,\omega_2$ et (11) $\cdot\,\omega_3$ et addition ensuite donne :

$$\begin{aligned} 0 &= J_1\omega_1\dot{\omega}_1 + J_2\omega_2\dot{\omega}_2 + J_3\omega_3\dot{\omega}_3 + (\underbrace{J_3 - J_2 + J_1 - J_3 + J_2 - J_1}_{=0})\omega_1\omega_2\omega_3 \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)\right] \end{aligned}$$

C'est la conservation de l'énergie.

Multiplications (9) $\cdot\,J_1\omega_1$, (10) $\cdot\,J_2\omega_2$ et (11) $\cdot\,J_3\omega_3$ et addition ensuite donne :

$$\begin{aligned} 0 &= J_1^2\omega_1\dot{\omega}_1 + J_2^2\omega_2\dot{\omega}_2 + J_3^2\omega_3\dot{\omega}_3 + (\underbrace{J_1J_3 - J_1J_2 + J_2J_1 - J_2J_3 + J_3J_2 - J_3J_1}_{=0})\omega_1\omega_2\omega_3 \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}(J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\vec{L}^2\right] \end{aligned}$$

C'est la conservation du valeur absolu du moment cinétique.

1.2.1 Ajouter un symétrie

Mettons $J_1 = J_2 \neq J_3$, les les équations euleriennes *sans forces* (9) – (11) simplifient en plus à :

$$\dot{\omega}_1 + \frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_3\omega_2 = 0 \tag{12}$$

$$\dot{\omega}_2 - \frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_3\omega_1 = 0 \tag{13}$$

$$\dot{\omega}_3 = 0 \tag{14}$$

(14) donne $\omega_3 = \text{cste}$. Nommons $\frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_3 = \Omega$, les équations (12) et (13) se réduisent :

$$\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0 \tag{15}$$

$$\dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0 \tag{16}$$

Dérivons (16) par rapport au temps et puis y mettre dedans (15) et vice versa, les équation deviennent découplées :

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0$$

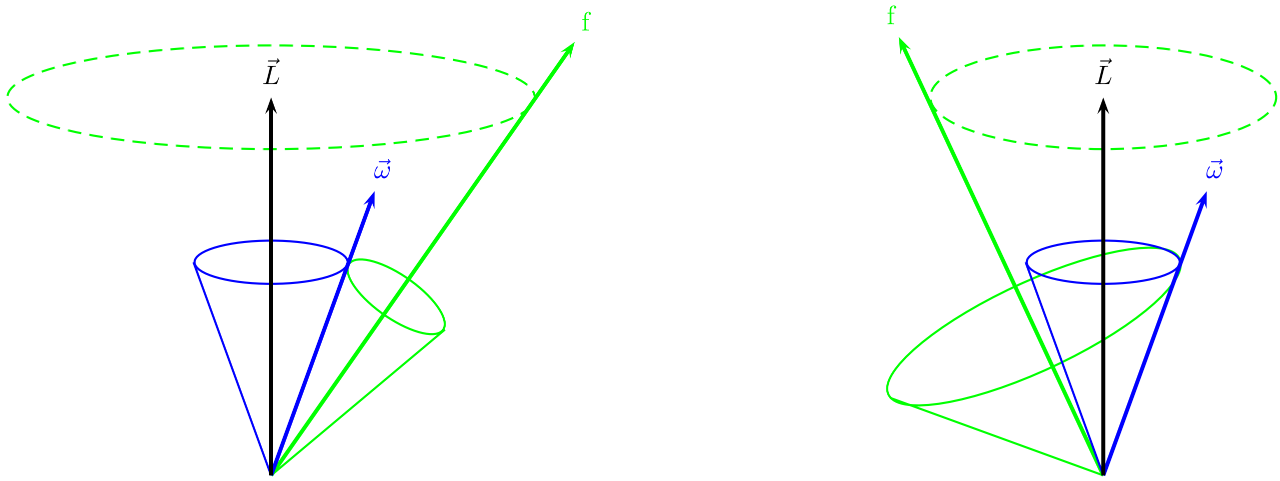
$$\ddot{\omega}_2 + \Omega^2\omega_2 = 0$$

Ce sont des oscillateurs harmoniques.

Les solutions analytiques sont :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_0 \sin(\Omega t + \alpha_0) \\ \hat{\omega}_0 \cos(\Omega t + \alpha_0) \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de la vitesse angulaire fait une tour conique autour de l'axe 3. Le radius du cône est $\hat{\omega}_0$, et la hauteur est ω_3.



$J_1 = J_2 > J_3$ $\qquad$ $J_1 = J_2 < J_3$

Le vecteur $\vec{\omega}$ se tourne avec une vitesse angulaire constante $\Omega = \frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_3$ autour de l'axe 3 avec une angle avec la verticale :

$$\beta_0 = \arctan\frac{\hat{\omega}_0}{\omega_3}$$

Les paramètres $\hat{\omega}_0$ et α_0 sont données par les conditions initiales.

On appelle ça *nutation libre*.

2 La toupie – avec des forces

Avec un symétrie $J_1 = J_2 \neq J_3$.

Les équations (6) – (8)

$$\omega_1 = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi$$
$$\omega_2 = \dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi$$
$$\omega_3 = \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi$$

L'énergie cinétique et

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 \\ &= \frac{1}{2}J_1(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 \end{aligned}$$

Soit R la distance de suspension en O au centre de masse de la toupie on a pour l'énergie potentielle de pesanteur :

$$V = mgR\cos\theta$$

La fonction lagrangienne est :

$$L = T - V = \frac{1}{2}J_1(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgR\cos\theta$$

On peut y voir, que la fonction lagrangienne n'obtient pas les variables φ et ψ explicitement, seulement leurs dérivees $\dot\varphi$ et $\dot\psi$. Ces variables sont cycliques car $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ et $\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$, alors donnent une conservation.

On peut alors déduire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 0$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = 0$ alors

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = J_1\dot\varphi\sin^2\theta + J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta = \text{cste} \tag{17}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = \text{cste} \tag{18}$$

Le moment cinétique dans le repère figure de la toupie :

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1\omega_1 \\ J_1\omega_2 \\ J_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

Calculations avec (4) pour la coordonnée z du moment cinétique $\vec{L}$ dans le repère laboratoir en angles euleriennes :

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underline{R}(\varphi, \theta, \psi)\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \underline{R}(\varphi, \theta, \psi)\begin{pmatrix} J_1\omega_1 \\ J_1\omega_2 \\ J_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

et enfin pour la troisième componente :

$$\begin{aligned} L_z &= \sin\theta\sin\psi J_1\omega_1 + \sin\theta\cos\psi J_1\omega_2 + \cos\theta J_3\omega_3 \\ &= J_1\sin\theta\sin\psi(\dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi) + J_1\sin\theta\cos\psi(\dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi) + J_3\cos\theta(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) \\ &= J_1\dot\varphi\sin^2\theta\sin^2\psi + J_1\dot\theta\sin\theta\sin\psi\cos\psi + J_1\dot\varphi\sin^2\theta\cos^2\psi - J_1\dot\theta\sin\theta\cos\psi\sin\psi + J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta \\ &= J_1\dot\varphi\sin^2\theta + J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta \end{aligned}$$

Alors, L_z donne la conservation de la coordonnée z du moment cinétique dans le repère laboratoir et L_3 donne la conservation de la coordonnée z du moment cinétique dans le repère de la figure.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = J_1\dot\varphi\sin^2\theta + J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta = L_z \tag{19}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = J_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = L_3 = J_3\omega_3 \tag{20}$$

Avec des petits calculations on peut eliminer $\dot\varphi$ et $\dot\psi$

$$\dot\varphi = \frac{L_z - L_3\cos\theta}{J_1\sin^2\theta} \tag{21}$$
$$\dot\psi = \frac{L_3}{J_3} - \frac{L_3 - L_z\cos\theta}{J_1\sin^2\theta}\cos\theta \tag{22}$$

On peut alors déduire :

1. La toupie se tourne autour de son axe symétrique avec ω_3 ($\psi(t)$)
2. L'axe symétrique de la toupie se tourne autour de l'axe 3 du systeme fixe avec la vitesse angulaire ω_{pr} – la *précession* ($\varphi(t)$)
3. L'angle $\theta(t)$ entre l'axe symétrique de la toupie et l'axe 3 du système fixe varie périodiquement avec une vitesse angulaire ω_{nut} – la *nutation*.

Le formalisme lagrangien avec θ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= J_1\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - J_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\dot{\varphi}\sin\theta + mgR\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= J_1\dot{\theta} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= J_1\ddot{\theta}\end{aligned}$$

alors

$$J_1\ddot{\theta} = J_1\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - J_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\dot{\varphi}\sin\theta + mgR\sin\theta$$

Division par J_1 :

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{J_3}{J_1}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\dot{\varphi}\sin\theta + \frac{mgR}{J_1}\sin\theta$$

Prenons (20) : $\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = \frac{L_3}{J_3}$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{L_3}{J_1}\dot{\varphi}\sin\theta + \frac{mgR}{J_1}\sin\theta}$$

On peut y remplacer $\dot{\varphi}$ par l'expression (21) et puis reçoit

$$\ddot{\theta} = f(\theta)$$