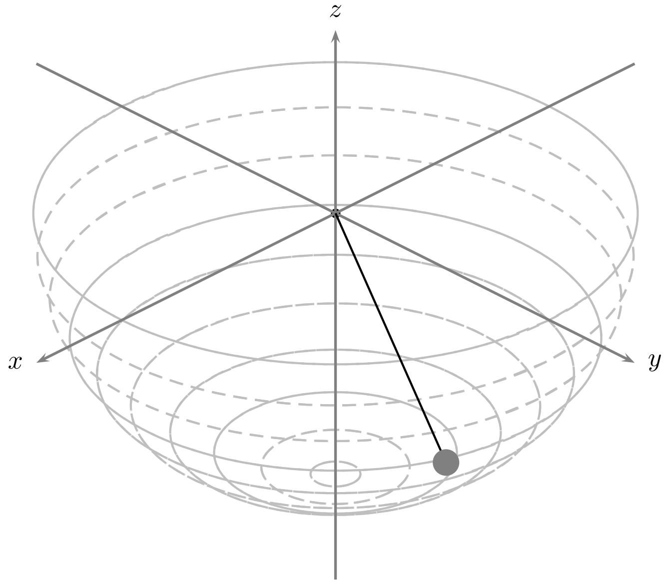
1 Le pendule sphérique



Prenons des coordonnées sphériques on reçoit :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

La derivée par rapport au temps t :

$$\dot{\vec{r}} = l \begin{pmatrix} \dot\theta\cos\theta\cos\varphi - \dot\varphi\sin\theta\sin\varphi \\ \dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi \\ \dot\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

Le carré de la vitesse :

$$\dot{\vec{r}}^2 = l^2\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right)$$

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right)$$

L'énergie potentielle de pesanteur :

$$V = -mgl\cos\theta$$

La fonction lagrangienne :

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + mgl\cos\theta$$

Le formalisme lagrangien avec θ :

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = ml^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2\dot\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2\ddot\theta$$

alors

$$ml^2\ddot\theta = ml^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta$$

Division par ml^2 :

$$\boxed{\ddot\theta = \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{l}\sin\theta}$$

Le formalisme lagrangien avec φ :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 (\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta)$$

alors

$$ml^2 (\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin\theta \cos\theta) = 0$$

Division par $ml^2 \sin^2 \theta$:

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -2\dot{\varphi}\dot{\theta} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$