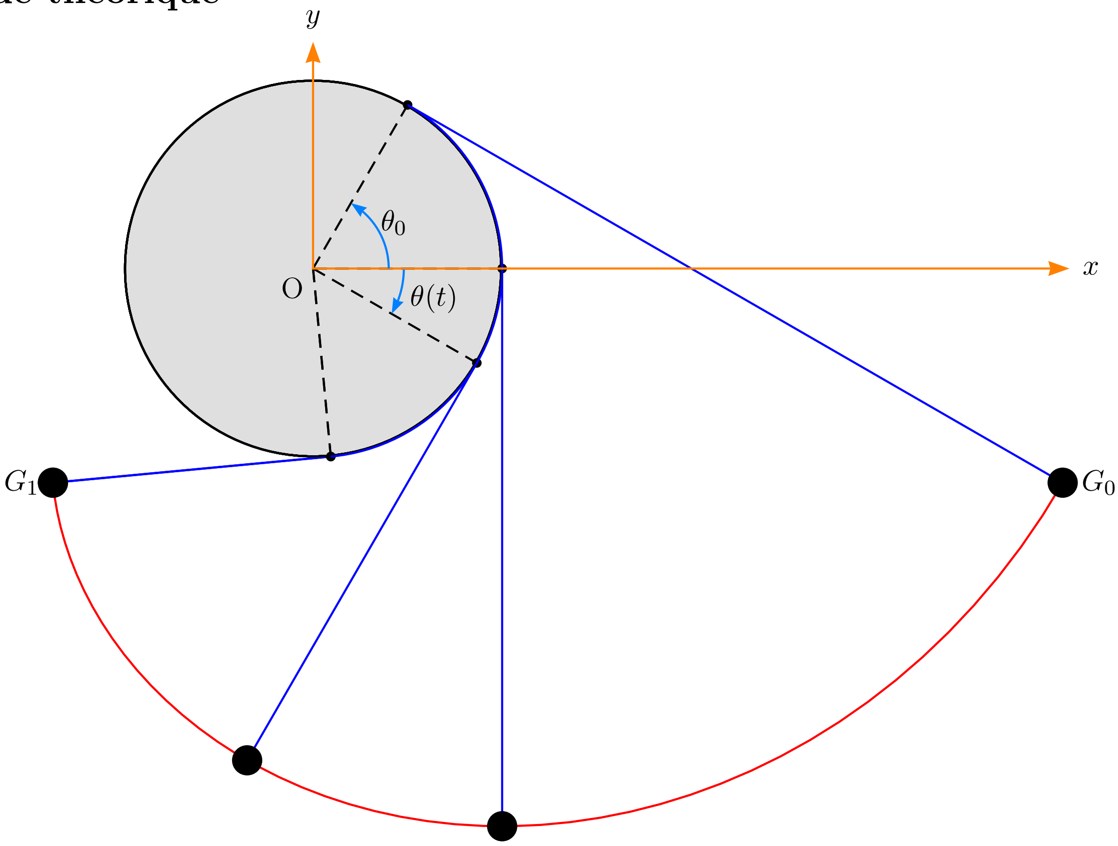
Pendule à développante de cercle

18 avril 2012

Résumé

Ce pendule constitué d'un fil de masse négligeable qui s'enroule sur un cylindre fixe et à l'extrémité duquel est attaché un objet, supposé ponctuel, est un cas particulier de pendule à longueur variable. Il est très brièvement étudié par Henri Bouasse dans son livre "*Pendule spiral, diapason*", tome 1, pages 114 et 115. C'est un pendule très simple à réaliser, mais dont l'étude du mouvement est passablement compliquée.

1 Étude théorique



Le pendule, dans diverses positions, le fil est toujours tendu : position initiale G_0, positions intermédiaires et position extrême G_1 laquelle est au même niveau que la position initiale.

Coordonnées de $G(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_G &=& r\cos\theta + \big[l_0 + r(\theta-\theta_0)\big]\sin\theta \\ y_G &=& r\sin\theta - \big[l_0 + r(\theta-\theta_0)\big]\cos\theta \end{array} \right.$$

Vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_G &=& -r\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}\big[l_0 + r(\theta-\theta_0)\big]\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y}_G &=& r\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}\big[l_0 + r(\theta-\theta_0)\big]\sin\theta - r\dot{\theta}\cos\theta \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_G &= \dot{\theta}\big[l_0 + r(\theta-\theta_0)\big]\cos\theta \\ \dot{y}_G &= \dot{\theta}\big[l_0 + r(\theta-\theta_0)\big]\sin\theta \end{cases}$$

$$v^2 = \big[l_0 + r(\theta-\theta_0)\big]^2\dot{\theta}^2$$

Longueur à l'équilibre :

$$l_{eq} = l_0 - r\theta_0$$

Énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}m\big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\big)^2\dot{\theta}^2$$

Énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}} = -mg\left[\Big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\Big)\cos\theta - r\sin\theta\right]$$

Utilisons le Lagrangien :

$$L = \mathcal{E}_{\mathcal{C}} - \mathcal{E}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}m\big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\big)^2\dot{\theta}^2 + mg\left[\Big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\Big)\cos\theta - r\sin\theta\right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\theta} &= mr\dot{\theta}^2\big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\big) - mg\big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\big)\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= mr\dot{\theta}\big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\big)^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= m\ddot{\theta}\big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\big)^2 + 2mr\dot{\theta}^2\big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\big) \end{aligned}$$

Équation de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta}$$

$$\ddot{\theta}\big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\big) + r\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0 \tag{1}$$

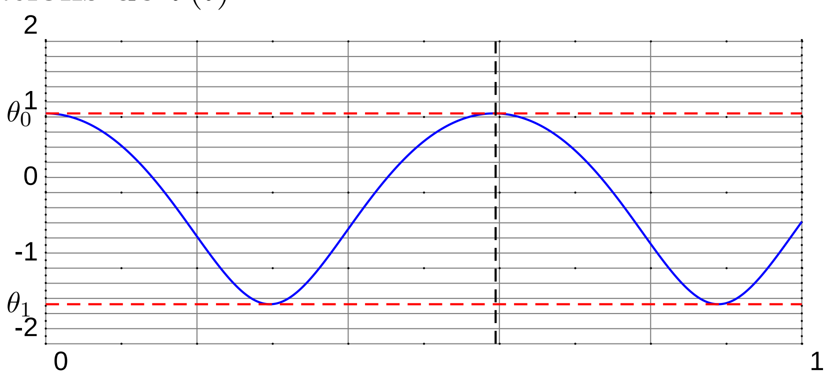
Énergie mécanique :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\big[l_0 + r(\theta-\theta_0)\big]^2\dot{\theta}^2 - mg\left[\Big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\Big)\cos\theta - r\sin\theta\right] = -mg\left(l_0\cos\theta_0 - r\sin\theta_0\right)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g\Big(l_0(\cos\theta - \cos\theta_0) - r(\sin\theta - \sin\theta_0) + r(\theta-\theta_0)\cos\theta\Big)}{\Big(l_0 + r(\theta-\theta_0)\Big)^2}$$

$$T = 2\int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{l_0 + r(\theta-\theta_0)}{\sqrt{2g\Big(l_0(\cos\theta - \cos\theta_0) - r(\sin\theta - \sin\theta_0) + r(\theta-\theta_0)\cos\theta\Big)}}\mathrm{d}\theta$$

2 Les variations de $\theta(t)$



J'utilise la macro du package pstricks-add : \psplotDiffEqn.

```
\psset{yunit=1,xunit=10}
\begin{pspicture}(0,-2)(1,2)\psgrid[subgriddiv=5,griddots=10](0,-2)(1,2)
\pstVerb{/deg2rad {180 div 3.1415926 mul} def
         /rad2deg {180 mul 3.1415926 div} def
         /gp 9.8 def
         /theta0 60 deg2rad def
         /theta1 90 theta0 rad2deg sub neg def
         /L0 0.10 def
         /radius 0.025 def
         /leq L0 radius theta0 mul sub def}%
\def\FuncB{y[1]|-(gp*sin(y[0])+radius*(y[1])^2)/(L0+radius*(y[0]-theta0))}
\psplotDiffEqn[algebraic,method=rk4,plotpoints=5000]{0}{1}{theta0 0}{\FuncB}
\uput[l](!0 theta0){$\theta_0$}
\uput[l](0,-1.4769){$\theta_1$}
\psline[linecolor=red,linestyle=dashed](0,-1.4769)(1,-1.4769)
\psline[linecolor=red,linestyle=dashed](0,1.0472)(1,1.0472)
\psline[linestyle=dashed](0.595,-2)(0.595,2)
\end{pspicture}
```

Pour déterminer θ_1, on résout l'équation $\dot{\theta}^2 = 0$ avec la macro \pssolving dont la variable X0 contient le résultat et qu'on affiche avec \psPrintValue{X0}.

θ_1=-1.4769 rad

```
\pstVerb{/rad2deg {180 mul 3.14159 div} def
         /theta0 60 deg2rad def
         /L0 0.10 def /radius 0.025 def}%
\pssolving[algebraic](-2,0){L0*(cos(x)-cos(theta0))-radius*(sin(x)-%
                            sin(theta0))+radius*(x-theta0)*cos(x)}
```

Pour trouver la période, il faut donc calculer l'intégrale. On utilise la macro \psInt dont la variable I contiendra le résultat, et on l'affiche avec \psPrintValue{I}.

```
\pstVerb{/L0 0.10 def /r 0.025 def
         /theta0 1.0472 def}% 60 degrés
\def\Periode{2*(L0+r*(t-theta0))/%
           (sqrt(19.6*(L0*(cos(t)-cos(theta0))+r*(sin(theta0)-%
            sin(t))+r*(t-theta0)*(cos(t)))))}
\psInt[algebraic](-1.4769,1.047199){\Periode}
```

période=0.595703 s

θ_1 et θ_0 donnent les élongations extrêmes des oscillations du pendule et T la période, ces valeurs sont nécessaires pour calculer les images du pendule dans l'objectif de créer une animation synchronisée avec les oscillations réelles du pendule.