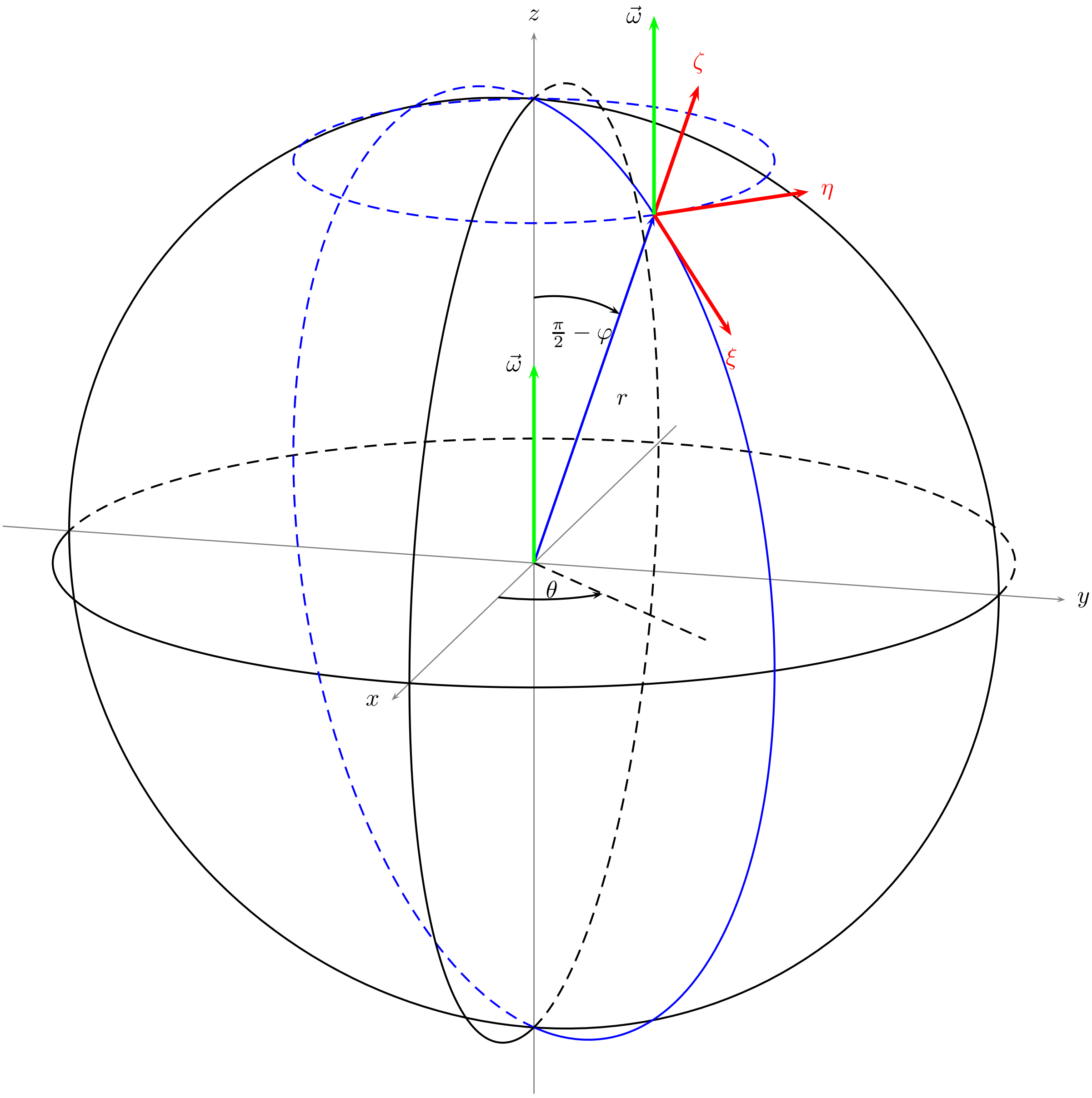
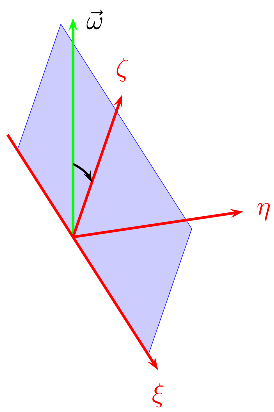
1 Le pendule de Foucault – un pendule dans un système qui se tourne



Prenons un point sur la surface de la Terre avec l'angle de latitude φ les components du vecteur $\vec{\omega}$, dont Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre et y mettre le répère (ξ, η, ζ).



Les vecteurs $\vec{\omega}$, $\vec{\xi}$ et $\vec{\zeta}$ sont dans un même plan. Les coordonnées de $\vec{\omega}$ sont :

$$\vec{\omega} = \Omega \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de masse m dans le répère tournant sont :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Puis en sayant, le répère se tourne, la vitesse est :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} - \Omega\eta\sin\varphi \\ \dot{\eta} + \Omega\zeta\cos\varphi + \Omega\xi\sin\varphi \\ \dot{\zeta} - \Omega\eta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Le carré de la vitesse :

$$\begin{aligned}\vec{v}^2 &= \begin{pmatrix} \dot{\xi} - \Omega\eta\sin\varphi \\ \dot{\eta} + \Omega\zeta\cos\varphi + \Omega\xi\sin\varphi \\ \dot{\zeta} - \Omega\eta\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\xi} - \Omega\eta\sin\varphi \\ \dot{\eta} + \Omega\zeta\cos\varphi + \Omega\xi\sin\varphi \\ \dot{\zeta} - \Omega\eta\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + 2\Omega\left[\sin\varphi(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta) + \cos\varphi(\dot{\eta}\zeta - \eta\dot{\zeta})\right] + \Omega^2\left[\eta^2 + \xi^2\sin^2\varphi + \zeta^2\cos^2\varphi + \xi\zeta\sin(2\varphi)\right]\end{aligned}$$

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}m\left\{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + 2\Omega\left[\sin\varphi(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta) + \cos\varphi(\dot{\eta}\zeta - \eta\dot{\zeta})\right] + \Omega^2\left[\eta^2 + \xi^2\sin^2\varphi + \zeta^2\cos^2\varphi + \xi\zeta\sin(2\varphi)\right]\right\}$$

Avec des simplifications de petits angles – c'est une chose réelle, quand la longueur du pendule L est grand – on peut négliger des termes $\dot{\zeta}^2$, $\Omega\zeta$ et $\Omega\dot{\zeta}$. La vitesse angulaire Ω est très petite ($\approx 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$), puis des termes Ω^2 sont négigeables aussi.

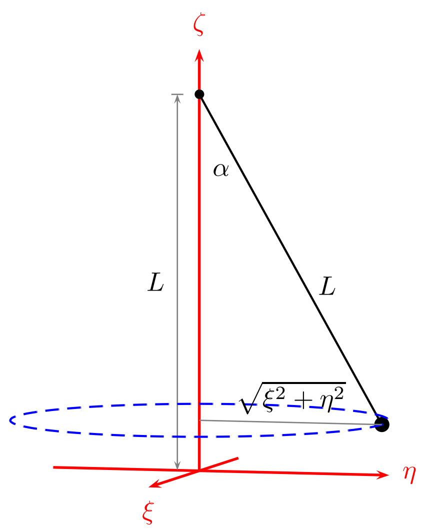
Les termes proportionelles à Ω sont celles de la force Coriolis, lesquelles proportionelles à Ω^2 sont celles de la force centrifuge.

Puis l'énergie cinétique se réduit :

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\Omega\sin\varphi(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta)\right]$$

L'énergie potentielle de pesanteur est :

$$V = mg\zeta$$



Mettons la suspense fixe du pendule de la longueur L à $(0/0/L)$ et déplaçant la masse avec une angle petite α on peut déduire :

$$V = mgL(1 - \cos\alpha)$$

Prenons un peu de trigonométrie et développment en un série

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha + \mathcal{O}([\sin^2\alpha]^2)$$

et un peu de géometrie

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{L}$$

on reçoit

$$V = \frac{mg}{2L}(\xi^2+\eta^2)$$

La fonction lagrangienne est :

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left[\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+2\Omega\sin\varphi(\xi\dot{\eta}-\dot{\xi}\eta)\right] - \frac{mg}{2L}(\xi^2+\eta^2)$$

Le formalisme lagrangienne avec ξ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \xi} &= m\Omega\sin\varphi\dot{\eta} - \frac{mg}{L}\xi \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} &= m\dot{\xi} - m\Omega\sin\varphi\eta \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} &= m\ddot{\xi} - m\Omega\sin\varphi\dot{\eta}
\end{aligned}$$

alors

$$m\ddot{\xi} - m\Omega\sin\varphi\dot{\eta} = m\Omega\sin\varphi\dot{\eta} - \frac{mg}{L}\xi$$

Division par m :

$$\boxed{\ddot{\xi} = 2\Omega\sin\varphi\dot{\eta} - \frac{g}{L}\xi}$$

Le formalisme lagrangienne avec η :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \eta} &= -m\Omega\sin\varphi\dot{\xi} - \frac{mg}{L}\eta \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} &= m\dot{\eta} + m\Omega\sin\varphi\xi \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} &= m\ddot{\xi} + m\Omega\sin\varphi\dot{\xi}
\end{aligned}$$

alors

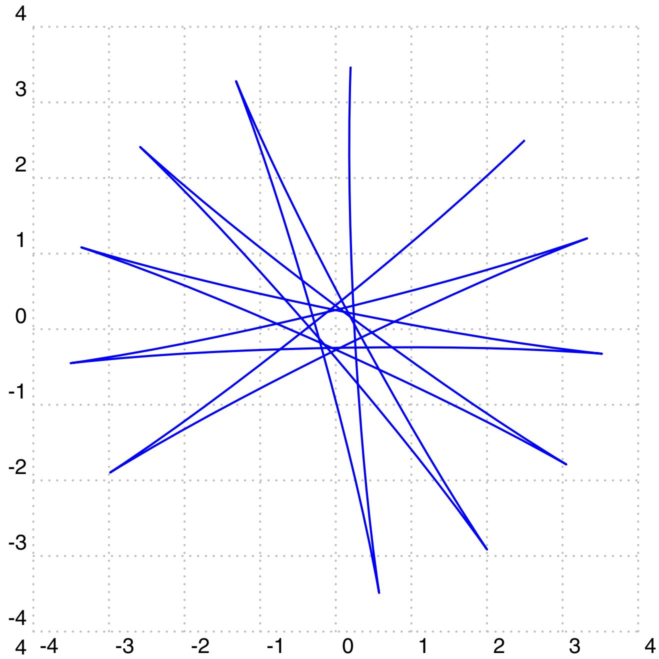
$$m\ddot{\eta} + m\Omega\sin\varphi\dot{\xi} = -m\Omega\sin\varphi\dot{\xi} - \frac{mg}{L}\eta$$

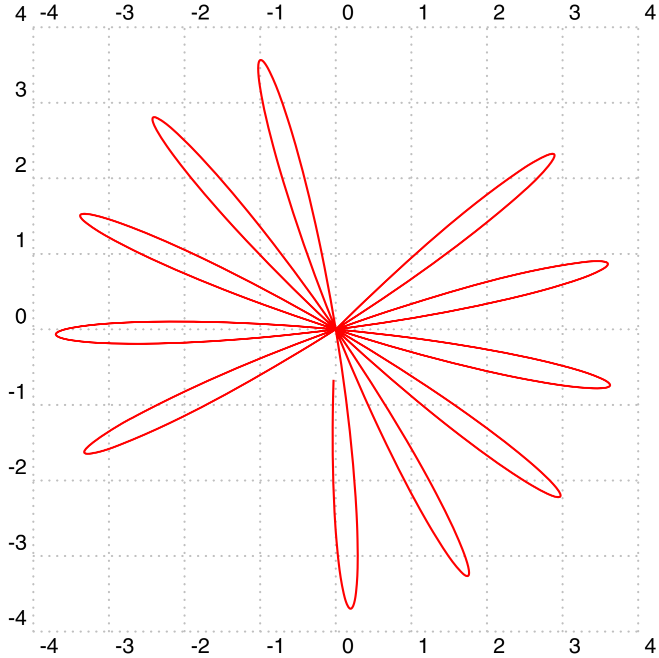
Division par m :

$$\boxed{\ddot{\eta} = -2\Omega\sin\varphi\dot{\xi} - \frac{g}{L}\eta}$$

Avec la Eigenfrequence $\omega_0^2 = \dfrac{g}{L}$ on reçoit un système des équations différentielles couplées d'ordre deux :

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= -\omega_0^2\xi + 2\Omega\sin\varphi\dot{\eta} \\
\ddot{\eta} &= -\omega_0^2\eta - 2\Omega\sin\varphi\dot{\xi}
\end{aligned}$$


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

2 Une animation