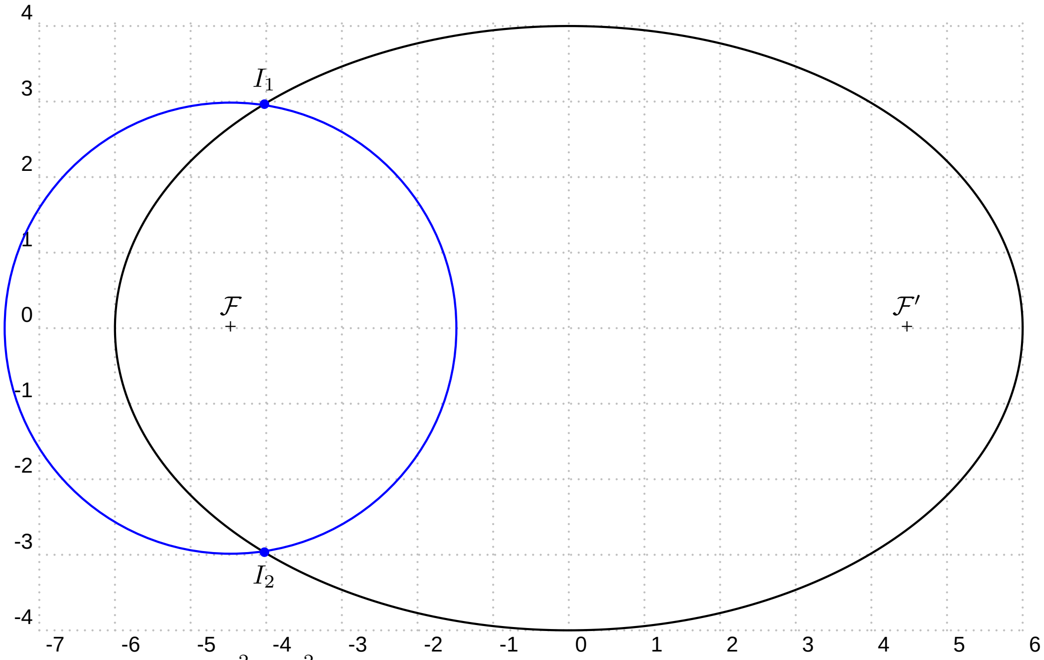
# Réflexions d'une onde dans une cavité ellipsoïdale

13 décembre 2011

**Résumé**

On étudie la réflexion d'une onde sphérique ayant sa source à l'un des foyers de l'ellipsoïde sur les parois de la cavité, en utilisant le principe d'Huygens. À un instant donné, l'onde réfléchie est l'enveloppe des ondelettes. Le phénomène est représenté dans un des plans de symétrie de l'ellipsoïde contenant le grand axe.

## 1 Calcul préliminaire des points d'intersection de l'onde incidente et de l'ellipse




Équation de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, ou bien :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a\cos(t) \\ y & = & b\sin(t \end{array} \right.$$

Équation du cercle centré au foyer $(x+c)^2 + y^2 = R^2$ avec $c^2 = a^2 - b^2$, ou bien :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & R\cos(t) - c \\ y & = & R\sin(t) \end{array} \right.$$

Déterminons l'intersection du cercle et de l'ellipse en utilisant les équations cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} & = & 1 \\ (x+c)^2+y^2 & = & R^2 \end{array}\right.$$

Multiplions par $b^2$ et retranchons les deux équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{b^2x^2}{a^2}+y^2 & = & b^2 \\ (x+c)^2+y^2 & = & R^2 \end{array}\right.$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2}-x^2-2cx-c^2-b^2+R^2=0$$

$$x^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)-2cx-a^2+R^2=0$$

$$x^2\left(b^2-a^2\right)-2ca^2x-a^4+a^2R^2=0$$

$$c^2x^2+2ca^2x+a^4-a^2R^2=0$$

Résolvons cette équation du second degré en $x$ :

$$\Delta'=c^2a^4-a^4c^2+a^2c^2R^2=a^2c^2R^2$$

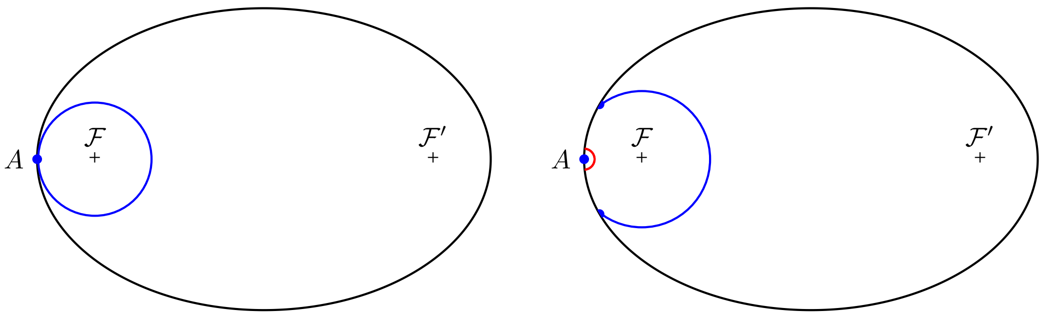
Les solutions théoriques sont :

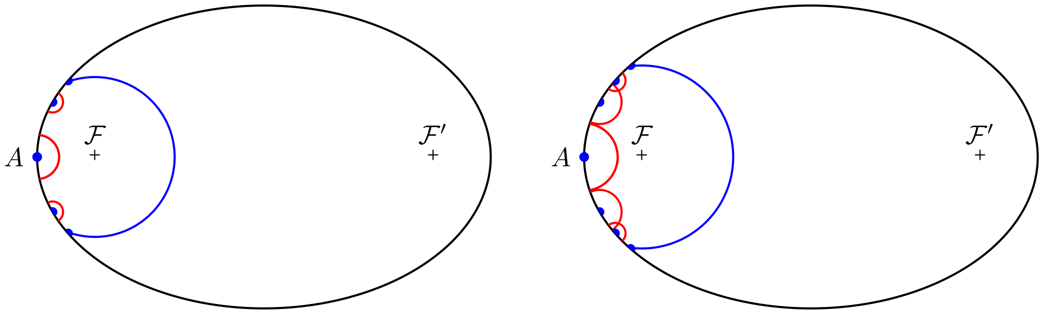
$$x=\frac{-a^2c\pm acR}{c^2}=\frac{a}{c}\left(-a\pm R\right)$$

Pour qu'il y ait intersection, il faut que $a-c\leq R\leq a+c$, et dans ce cas la solution vérifie $-a\leq x\leq a$. On retiendra donc comme solution celle qui, pour les conditions fixées, donne $y$ réel.

## 2 Progression de l'onde incidente et des ondelettes

Considérons le front de l'onde circulaire, représenté en bleu, ayant sa source en $F$ et se déplaçant à la vitesse $V$. À l'instant $t_0=\dfrac{AF}{V}=\dfrac{a-c}{V}$ il touche l'ellipse en $A$. Une source secondaire prend alors naissance en $A$ qui va créer une onde circulaire, se propageant à la vitesse $V$. À l'instant $t=t_0+\mathrm{d}t$, le front de cette onde sera représenté par un cercle de couleur rouge et de rayon $r(t)=V\times \mathrm{d}t$. L'onde incidente sera élargie et aux points de contacts de l'ellipse deux nouvelle sources secondaires vont prendre naissance et ainsi de suite. Nous pourrons ainsi suivre la progression de front de l'onde incidente et des ondelettes.






À un instant donné l'enveloppe des ondelettes, qui représente l'onde réfléchie, est un cercle de centre $\mathcal{F}'$, dont le rayon va en diminuant.

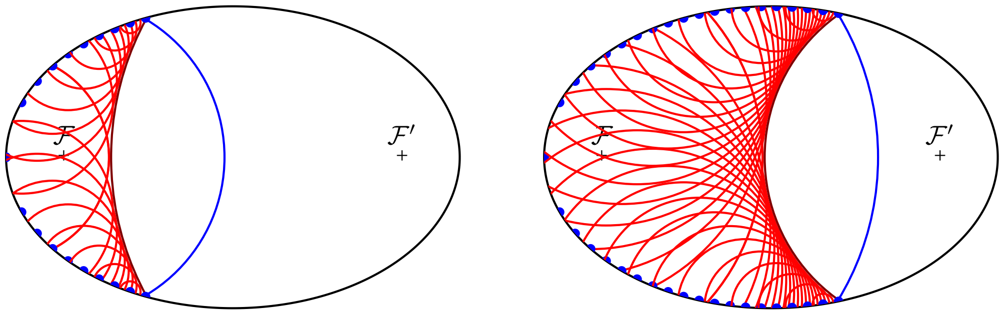



Image des ondelettes, lorsque le front de l'onde va toucher, l'instant suivant, l'autre extrémité du miroir :