Réflexion d'ondes sur un miroir parabolique

2 décembre 2011

Résumé

Toute cette étude sur la réflexion d'ondes rectilignes sur un miroir parabolique par application du principe d'Huygens, est issue du site :
`http://www.parabola.unsw.edu.au/vol31_no1/vol31_no1_2.pdf`

Les illustrations ont été réalisées avec PStricks. Pour la partie mathématique, le document cité propose une démonstration analytique, pour ma part, et cela sera ma modeste contribution, j'en donne une démonstration géométrique. Une macro PStricks permet de dessiner les ondelettes : `\ondelettes{10}{0.5}{10}`. Le premier argument est la durée de l'observation en s, le deuxième l'intervalle de temps entre deux positions du front d'onde et le troisième l'abscisse du point d'entrée du front de l'onde incidente dans le miroir.

1 Progression d'un train d'ondes rectilignes parallèles à Oy jusqu'au sommet et des ondelettes de réflexion

Le miroir est une parabole d'axe Ox, de sommet O et de foyer $F(0, a)$, donc de paramètre $p = 2a$, d'équation réduite :

$$y^2 = 2px = 4ax$$

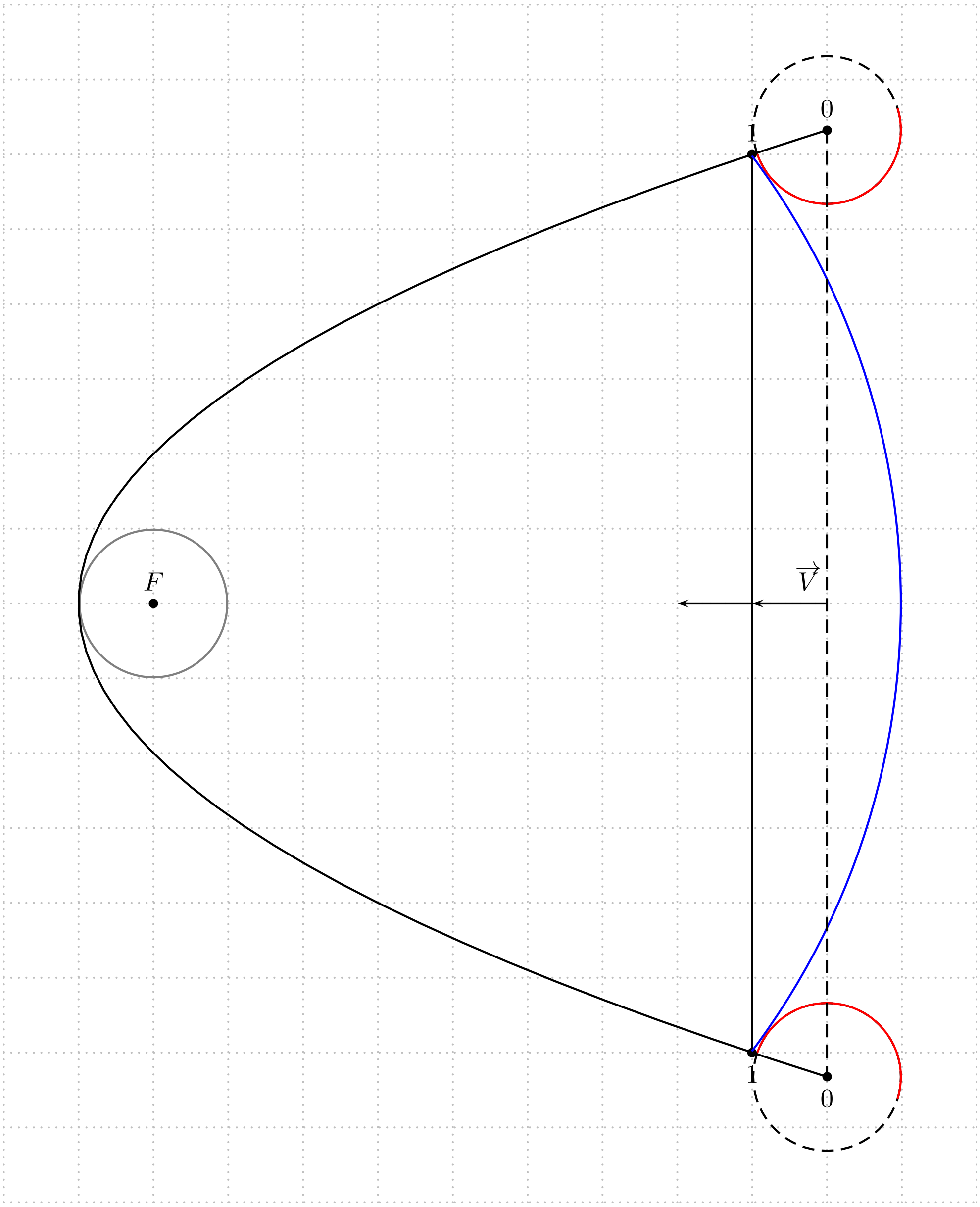
Équations paramétriques :

$$\begin{cases} x &= at^2 \\ y &= 2at \end{cases}$$

On considère une onde progressive rectiligne parallèle à Oy, se propageant vers O dans le sens inverse de l'axe Ox. Dans un premier temps on suit la progression d'un train d'onde et sa réflexion sur le miroir parabolique. Pour visualiser la réflexion de l'onde on utilise le principe d'Huygens. Les deux extrémités du front d'onde entrant en contact avec le miroir émettent chacune une ondelette circulaire qui se propage à la même vitesse que l'onde incidente à l'intérieur du miroir.

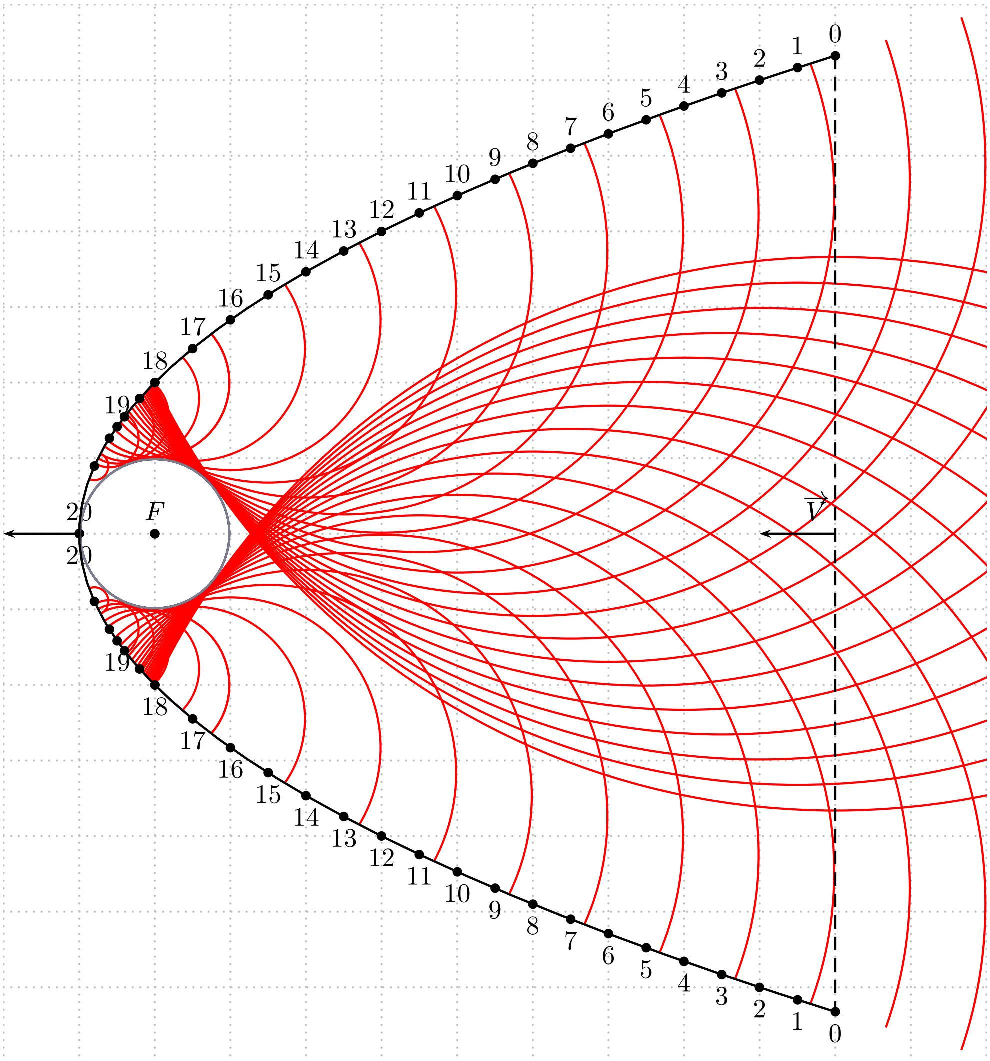
Sur le dessin suivant, à l'instant $t = 0$ nous supposons que le front de l'onde incidente pénètre dans le miroir. À l'instant $t_1 = 1$ s, le front de l'onde s'est déplacé de $d = Vt_1$. La source secondaire qui est en 0 s'est propagée de la même distance. Le front de cette ondelette est un cercle de rayon d, c'est donc un cercle tangent au front de l'onde incidente à cet instant. C'est un point très important : **à un instant quelconque, pendant la durée du trajet de l'onde rectiligne incidente jusqu'au sommet, toutes les ondelettes existantes, sont tangentes au front de l'onde incidente**.

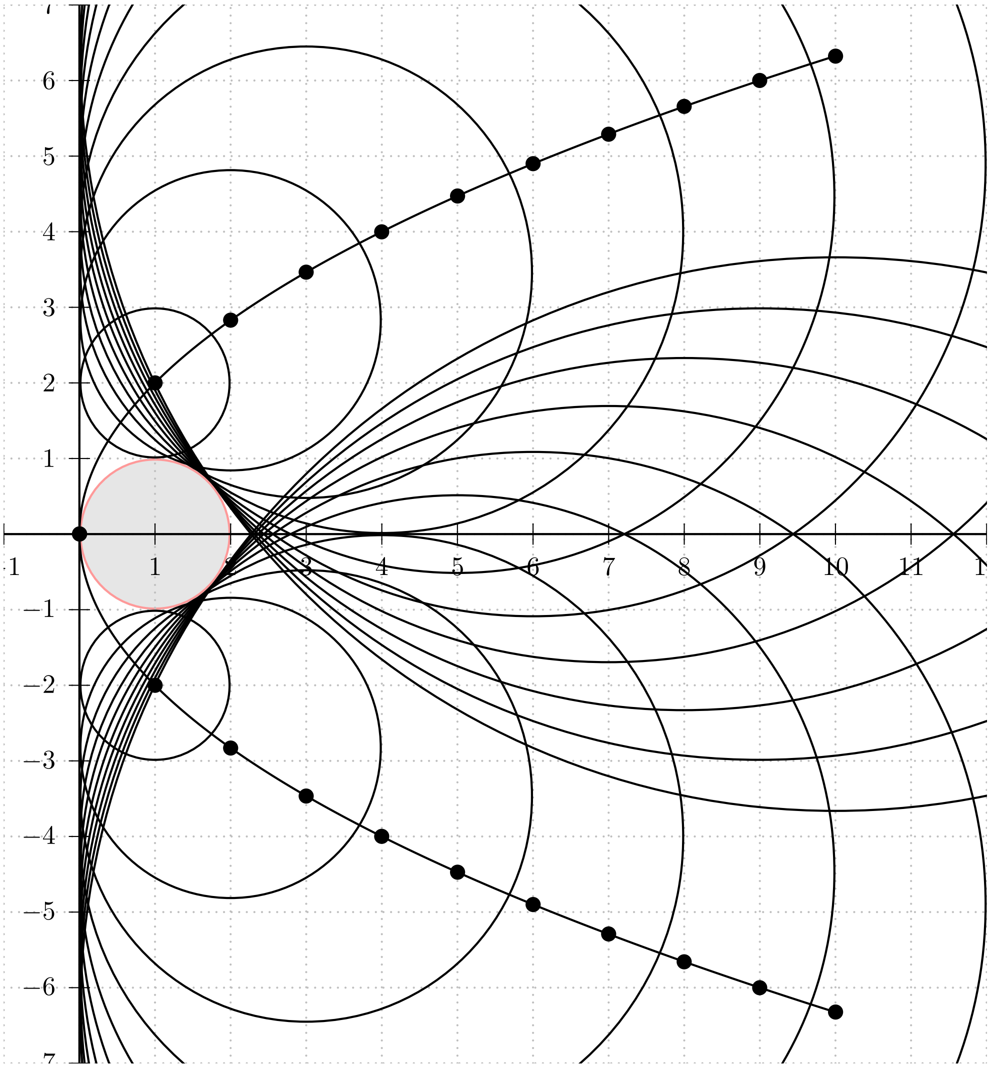
Nous ne traçons que la partie du cercle comprise dans la parabole. Ces *"demi"-cercles* ne passent donc pas par l'intersection du front de l'onde incidente avec la parabole.



Dans le dessin suivant, les positions successives sont calculées pour $t_i = kT$ avec $T = 0.5$ s et $V = 1\,\mathrm{m.s}^{-1}$.

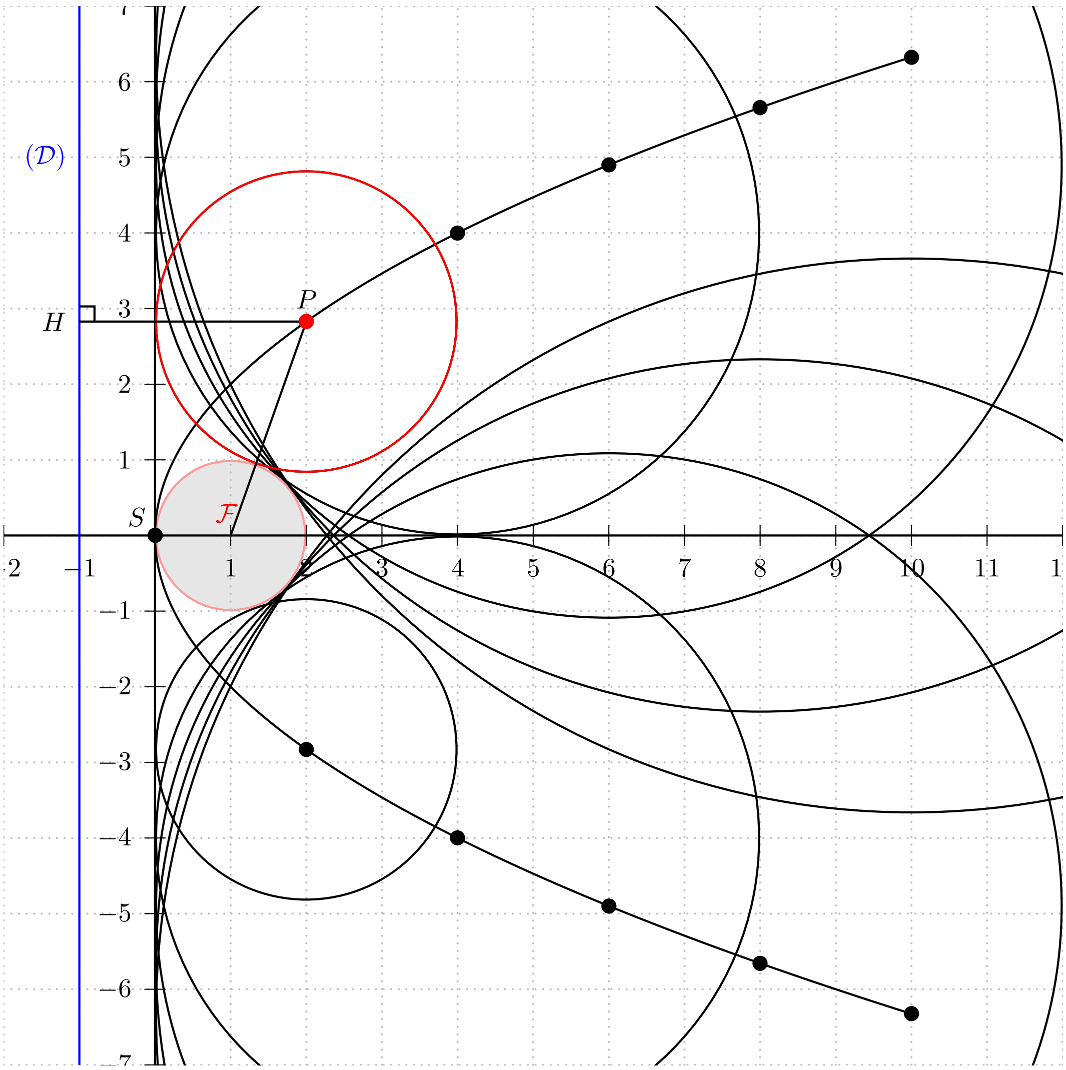
À l'instant $t_1 = T$ le front de l'onde a progressé de $\lambda = VT = 0.5$ m. L'ondelette ayant sa source sur le miroir en P_0 s'est élargie d'un rayon égal aussi à λ. Quand l'onde s'approche du sommet, on réduit l'intervalle de temps $\mathrm{d}t = 0.1$ pour bien mettre en évidence l'enveloppe des ondelettes.





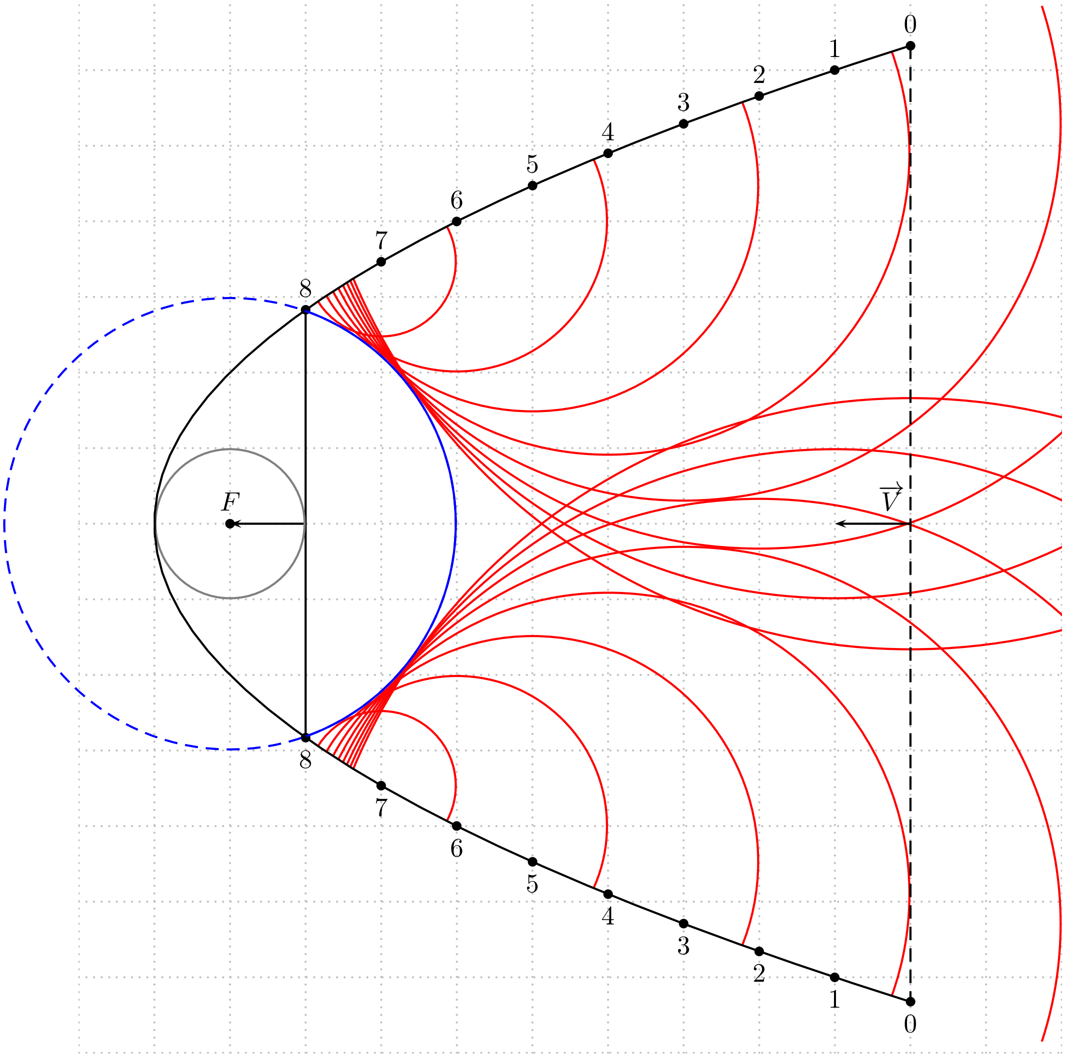
Lorsque le front d'onde touche le sommet les ondes émises par les sources secondaires sont tangentes à l'axe Oy lui-même tangent au sommet de la parabole S et elles sont toutes tangentes au cercle de centre le foyer et de rayon $a = \frac{p}{2}$. Ce cercle est l'enveloppe de cette famille d'ondelettes à l'instant où le front d'onde atteint le sommet.

Le site : `http://www.parabola.unsw.edu.au/vol31_no1/vol31_no1_2.pdf` en propose une démonstration analytique. Cependant, la définition géométrique de la parabole : *ensemble des points équidistants du foyer $\mathcal{F}$ et de la directrice* ($\mathcal{D}$) permet d'en donner une explication simple. Pour le démontrer prenons une source secondaire quelconque, par exemple P et traçons les distances de P au foyer $\mathcal{F}$ et à la directrice ($\mathcal{D}$). Nous voyons que $PH = x_P + a$, x_P est le rayon de l'ondelette ayant sa source en P à l'instant où le front d'onde est en S, et que si nous prenons l'intersection de PF et du cercle centré en F et de rayon a, nous avons $PF = a + d$. Puisque $PF = PH$ il apparaît très simplement que $d = x_P$, cette distance est aussi le rayon de l'ondelette. Cette ondelette est bien tangente au cercle de centre le foyer $\mathcal{F}$ et de rayon a.



2 Avant que le train d'onde incident n'atteigne le sommet

Avant que le train d'onde incident n'atteigne le sommet, les ondelettes ont pour enveloppe un cercle centré en $\mathcal{F}$ dont le rayon va en diminuant. Par exemple à un instant donné :


0
1
2
3
4
5
6
7
8
F
$\overrightarrow{V}$
8
7
6
5
4
3
2
1
0