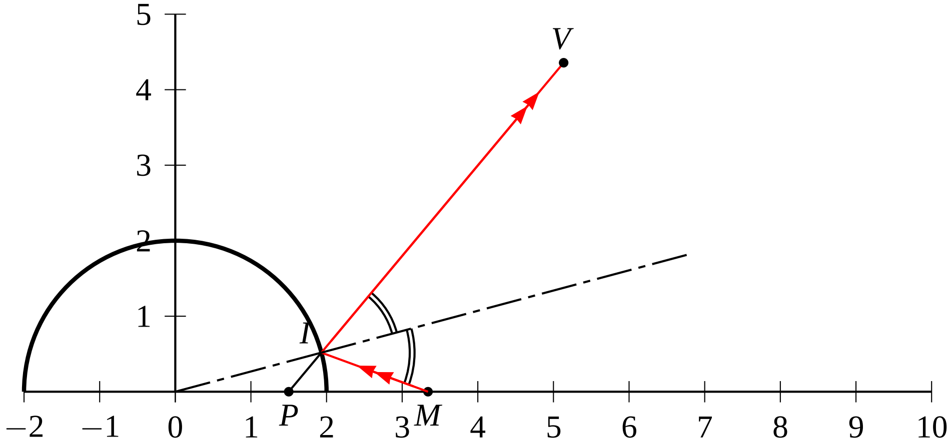
Anamorphose sphérique

Team “http://melusine.eu.org/syracuse/G/pstricks/”

3 octobre 2011



1 Principe

On place à l’intérieur de la demi-sphère l’image telle qu’elle doit être vue par un observateur regardant dans le miroir sphérique. (on peut la placer à l’extérieur, mais il faut que les rayons lumineux rencontrent toujours la sphère, il faut donc veiller aux dimensions). L’objet anamorphique est « l’objet déformé » dont le miroir reconstituera les proportions réelles.

Objet et image obéissent aux lois de la réflexion de l’optique géométrique :

- rayon incident et rayon réfléchi appartiennent à un même plan ;
- rayon incident et rayon réfléchi sont symétriques par rapport à la normale au miroir au point d’incidence.

L’image non déformée (celle qui est vue dans le miroir) est placée, dans cet exemple, au centre du miroir. Un rayon incident partant de l’objet anamorphique se réfléchit sur le miroir et après réflexion parvient à l’œil de notre observateur. L’observateur a l’illusion que le rayon provient du point image. Il faut donc reconstruire mathématiquement la marche d'un tel rayon lumineux en partant de l'image dans le miroir.

L'observateur est suffisamment éloigné du miroir pour pouvoir être considéré comme ponctuel.

2 Les calculs

Soit P un point de l'image, V l'œil de l'observateur. Traçons un droite PV et déterminons le point d'intersection I avec la sphère : c'est le point d'incidence.

$V(x_V, y_V, z_V)$ et $P(x_P, y_P, 0)$

L'équation paramétrique de la droite (PV) s'écrit $\overrightarrow{IV} = \lambda\overrightarrow{PV}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_V - x_I & = & \lambda(x_V - x_P) \\ y_V - y_I & = & \lambda(y_V - y_P) \\ z_V - z_I & = & \lambda(z_V - 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_I & = & x_V(1-\lambda) + \lambda x_P \\ y_I & = & y_V(1-\lambda) + \lambda y_P \\ z_I & = & z_V(1-\lambda) \end{array}\right.$$

Le point I appartenant à la sphère, ses coordonnées vérifient la relation :

$$x_I^2 + y_I^2 + z_I^2 = R^2$$

On pose :

$$r_V^2 = x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 \quad \text{et} \quad r_P^2 = x_P^2 + y_P^2$$

$$\left(x_P^2 + \lambda(x_V - x_P)\right)^2 + \left(y_P^2 + \lambda(y_V - y_P)\right)^2 + \lambda^2 z_V^2 = R^2$$

Après développement, on obtient l'équation du second degré en λ:

$$\lambda^2\left((x_V - x_P)^2 + (y_V - y_P)^2 + z_V^2\right) + 2\lambda\big(x_P(x_V - x_P) + y_P(y_V - y_P)\big) + x_P^2 + y_P^2 - R^2 = 0$$

Pour le coefficient de λ^2

$$\lambda^2(x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 + x_P^2 + y_P^2 - 2x_P x_V - 2y_V y_P)$$

Pour le coefficient de λ :

$$2\lambda(-x_P^2 - y_P^2 + x_P x_V + y_P y_V)$$

$$a\lambda^2 + 2b'\lambda + c = 0$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 + x_P^2 + y_P^2 - 2x_P x_V - 2y_V y_P \\ b' = -x_P^2 - y_P^2 + x_P x_V + y_P y_V \\ c = x_V^2 + y_V^2 - R^2 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a = r_V^2 + r_P^2 - 2x_P x_V - 2y_V y_P \\ b' = -r_P^2 + x_P x_V + y_P y_V \\ c = x_V^2 + y_V^2 - R^2 \end{cases}$$

La résolution de cette équation nous donne les solutions classiques:

$$\begin{cases} \lambda' = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \\ \lambda'' = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \end{cases} \qquad \Delta' = b'^2 - ac$$

On retiendra la valeur positive.

IV représente le rayon réfléchi par le miroir. Le rayon incident est défini par la droite symétrique de IV par rapport à la normale au miroir en I. Je cherche le symétrique de V, nommé V' par rapport à cette normale IN. Ce point V' remplit deux conditions :

1. $\overrightarrow{IV} + \overrightarrow{IV'} = k\overrightarrow{IN}$
2. $\overrightarrow{VV'}.\overrightarrow{IN} = 0$

La normale (IN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IN}(x_I, y_I, z_I)$
La première condition se traduit par :

$$\begin{cases} x_V - x_I + x_{V'} - x_I = kx_I \\ y_V - x_I + y_{V'} - y_I = ky_I \\ z_V - z_I + z_{V'} - z_I = kz_I \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{V'} = kx_I + 2x_I - x_V \\ y_{V'} = ky_I + 2y_I - y_V \\ z_{V'} = kz_I + 2z_I - z_V \end{cases}$$

La deuxième par :

$$(x_{V'} - x_V)x_I + (y_{V'} - y_V)y_I + (z_{V'} - z_V)z_I = 0$$

En remplaçant $x_{V'}$, $y_{V'}$ et $z'_{V'}$ tirés de la première condition dans la deuxième :

$$k(x_I^2 + y_I^2 + y_I^2) + 2x_I^2 - 2x_V x_I + 2y_I^2 - 2y_V y_I + 2z_I^2 - 2z_V z_I = 0$$

$$kR^2 + 2R^2 = 2(x_V x_I + y_V y_I + z_V z_I)$$

$$k + 2 = \frac{2}{R^2}(x_V x_I + y_V y_I) + z_V z_I$$

Les coordonnées de V' s'en déduisent :

$$\begin{cases} x_{V'} = (k+2)x_I - x_V \\ y_{V'} = (k+2)y_I - y_V \\ z_{V'} = (k+2)z_I - z_V \end{cases}$$

Il reste à trouver l'intersection de (IV') avec le plan horizontal $z = 0$.

Équation paramétrique de IV', M étant un point courant : $\overrightarrow{MI} = \alpha\overrightarrow{V'I}$

$$\begin{cases} x_I - x = \alpha(x_I - x_{V'}) \\ y_I - y = \alpha(y_I - y_{V'}) \\ z_I - z = \alpha(z_I - z_{V'}) \end{cases}$$

$z = 0 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{z_I}{z_I - z_{V'}}$.

En remplaçant α par son expression, nous obtenons les coordonnées du point de l'objet anamorphique.

$$\begin{cases} x = x_I - \alpha(x_I - x_{V'}) \\ y = y_I - \alpha(y_I - y_{V'}) \\ z = 0 \end{cases}$$

Cette série de calculs doit être appliquée à tous les points de l'image « normale » afin d'obtenir l'objet anamorphique (déformé) dont le miroir « redressera » la forme.

Remarque : l'image doit se former du côté de l'observateur à l'intérieur du miroir, plus près du bord du miroir que du centre. Si on déplace le point P vers O, il arrive un moment où le rayon réfléchi part au-dessus de l'horizontale et ne rencontre plus le plan horizontal. L'anamorphose n'est plus possible et pour les calculs c'est le CRASH !

3 Les macros \psircleHS, \psarcHS,\psframeHS, \pscurveHS, \psccurveHS, \psbezierHS et \pnodeHS

Ces commandes sont calquées sur celles de PStricks, elles ont donc les mêmes options.

4 Les commandes PStricks dédiées à l'anamorphose sphérique

4.1 Les options générales

Ce sont le valeurs par défaut qui sont indiquées .

- Le rayon du cylindre-miroir : Rmirror=4 ;
- l'abscisse de l'observateur (du point de vue, d'où la lettre v) : Xv=0 ;
- l'ordonnée de l'observateur : Yv=-10 ;
- la cote de l'observateur : Zv=10
- un booléen [Mirror=true] pour dessiner ou non le cercle, base du cylindre dans le plan ;

- un paramètre d'échelle scale=1 qui agit sur les deux coordonnées de l'image, ceci a fait d'adapter la taille de l'image à la possibilité d'une anamorphose ;
- un paramètre de décalage yshift=0, pour déplacer l'image suivant l'axe *Oy*, pour la même raison que précédemment: l'image doit être du même côté que l'observateur, à l'intérieur de la sphère et près du bord du miroir. yshift=0 doit être donné en pts (provisoirement).
- un paramètre de décalage xshift=0, en pts, pour déplacer l'image suivant l'axe *Ox*.

4.2 Un texte

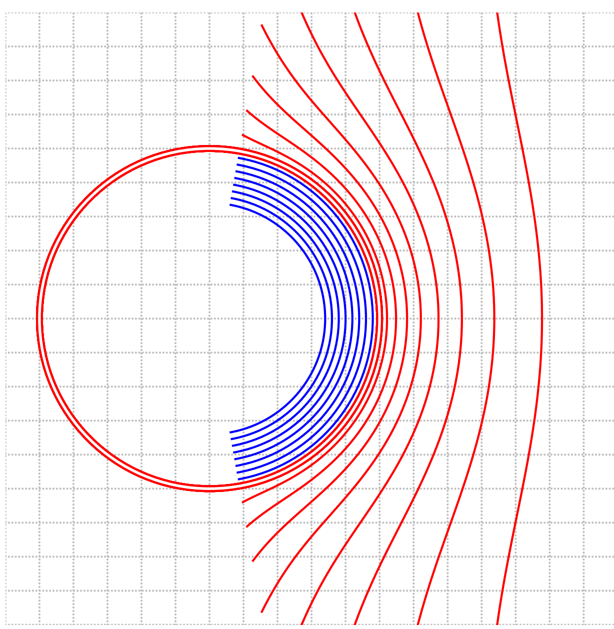
```
\pstextHS[options]{texte}
```

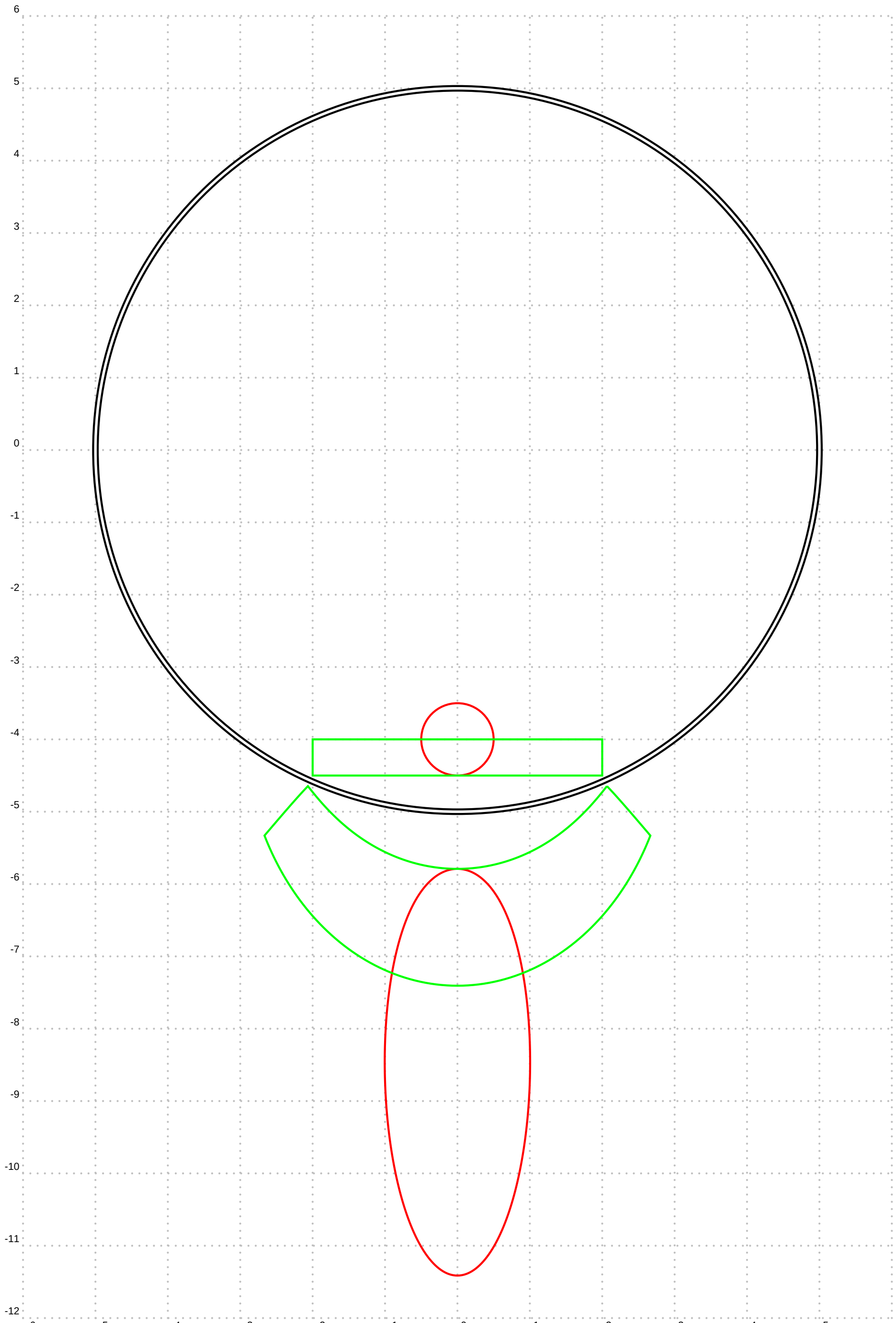
- le type de fonte [PSfont=Times-Roman] ;
- la taille en pts [fontsize=40] ;
- le décalage vertical en cm [Yoffset=0].

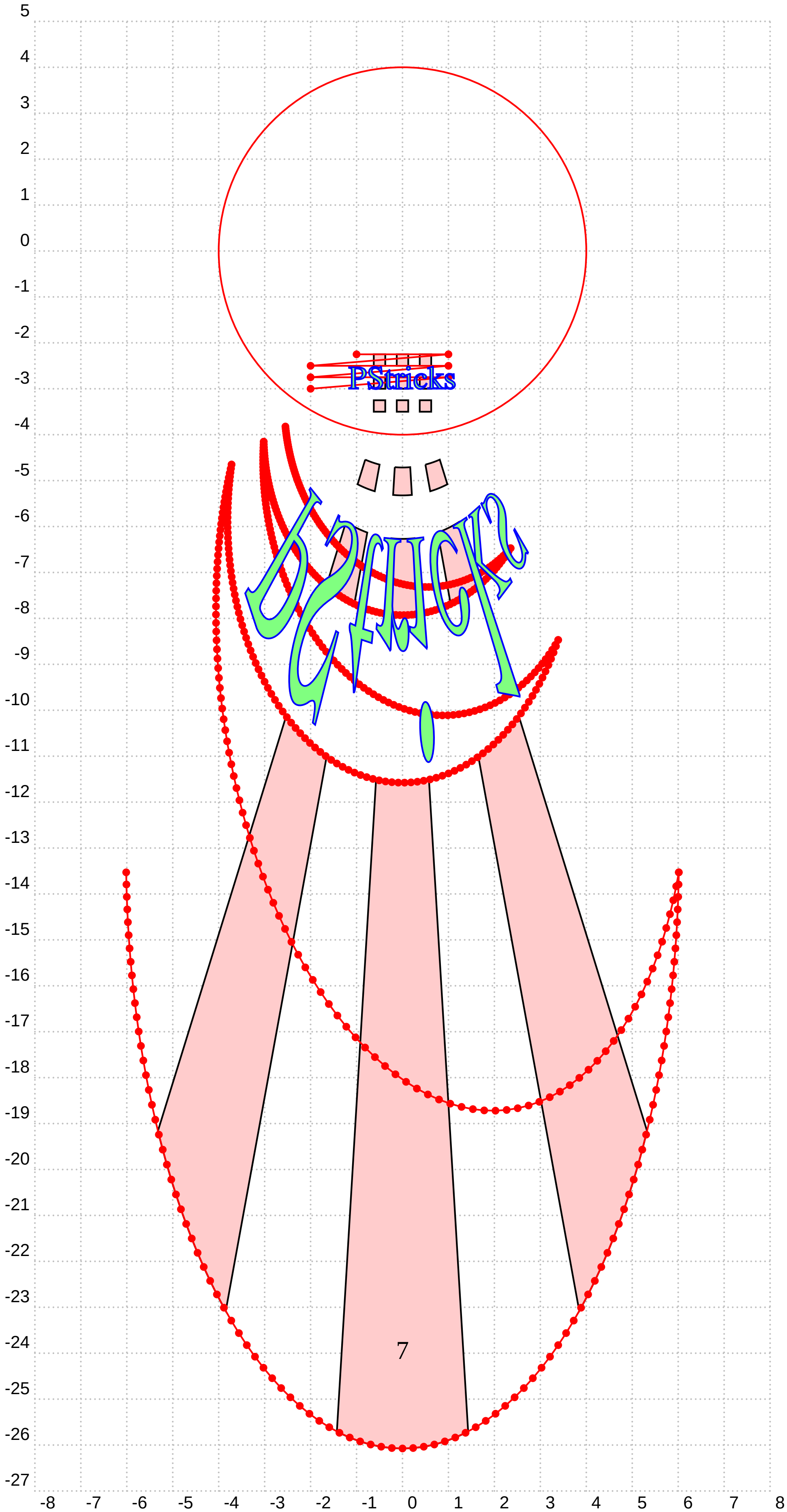
Le texte est toujours centré horizontalement.

```
\pstextHS[linecolor=blue,fillstyle=solid,fillcolor=green!50,
          fontsize=15,Yoffset=-3]{PStricks}
```

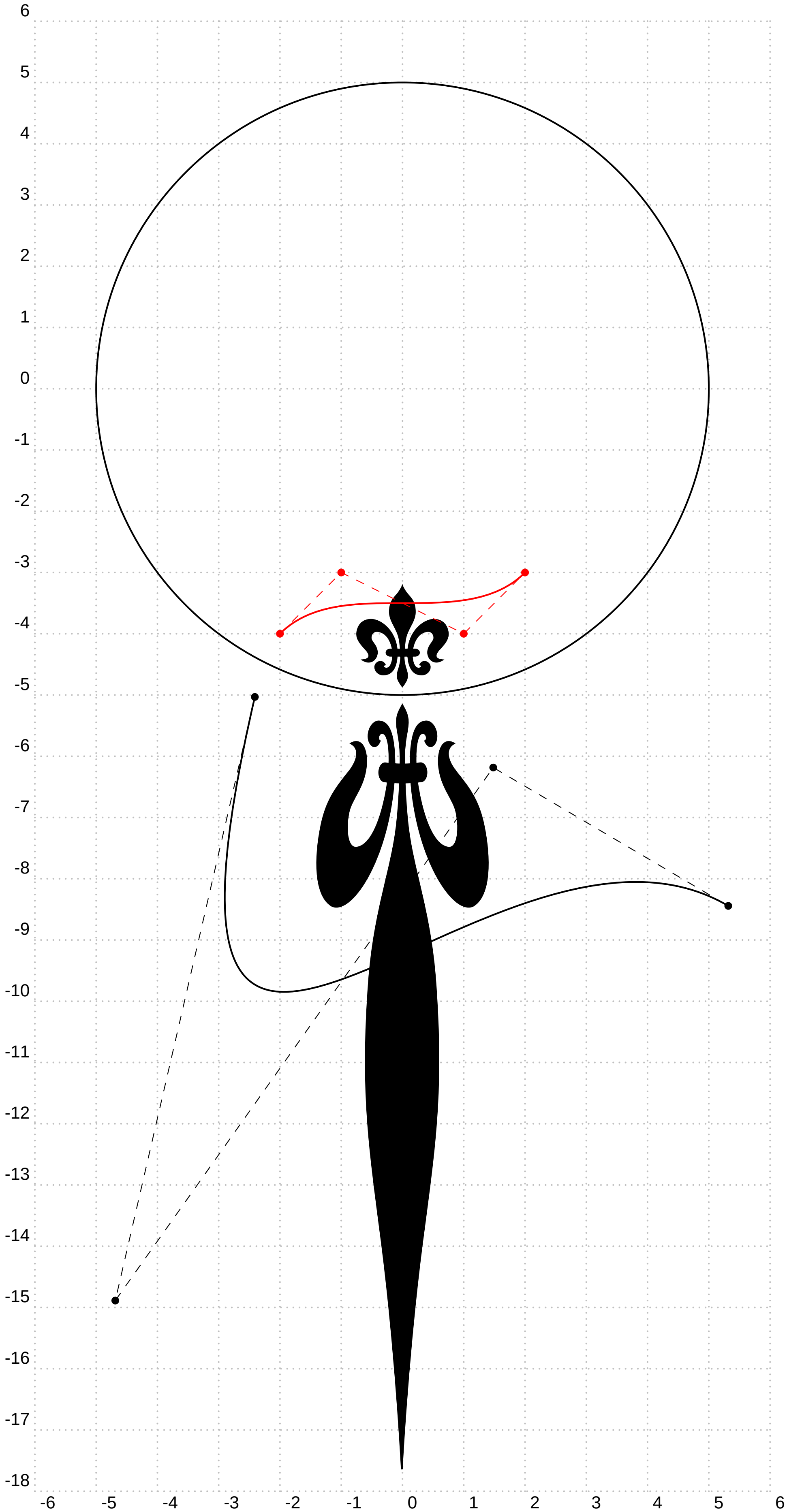
5 Les exemples



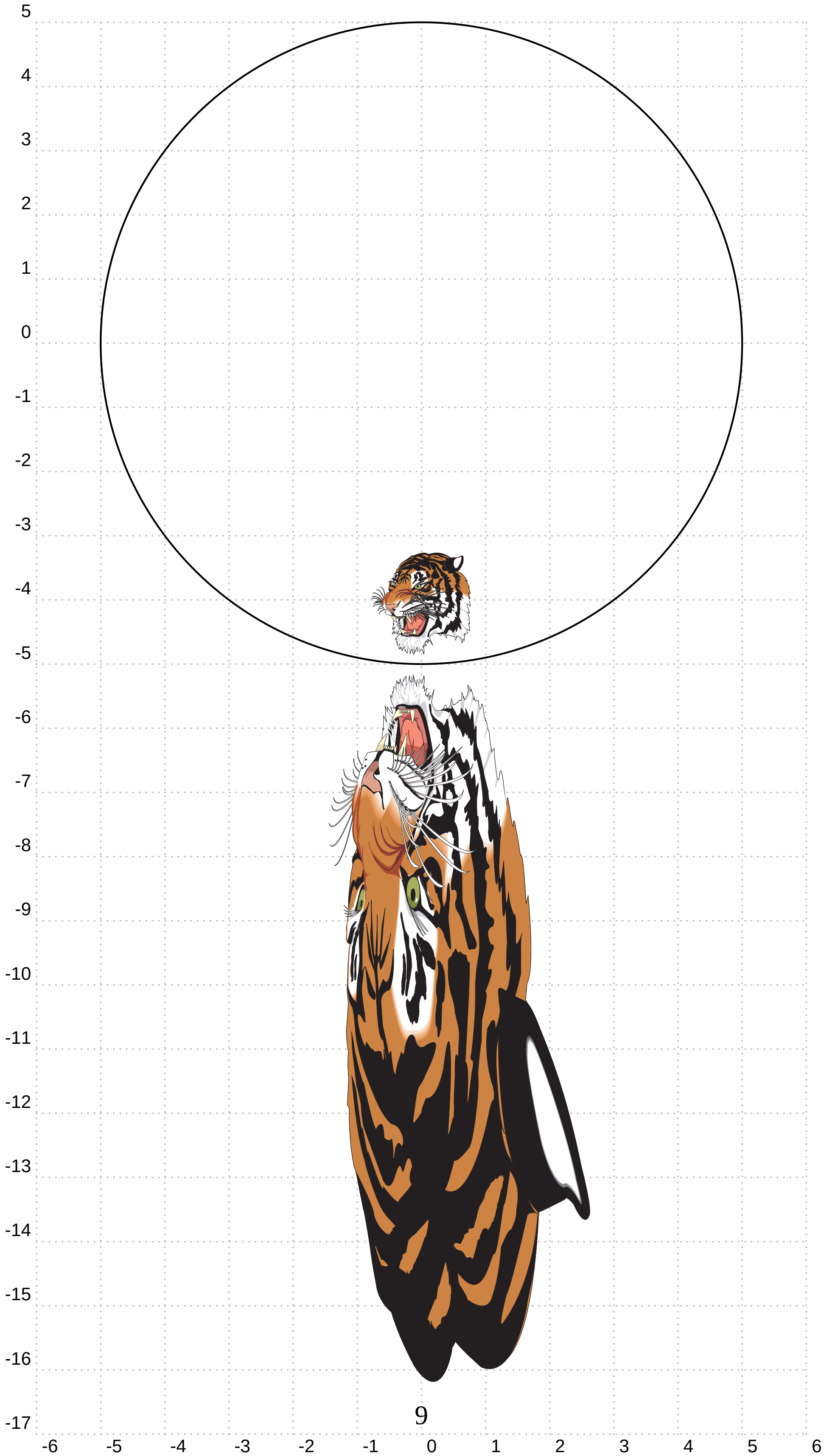

6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6



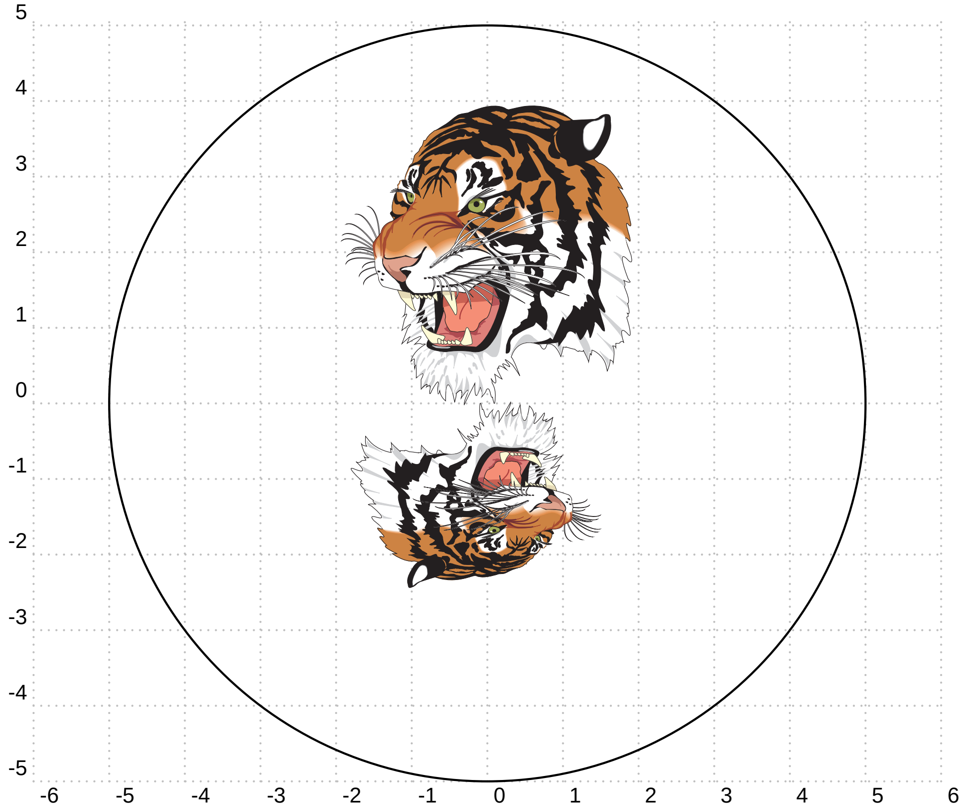
PStricks
PStricks
7

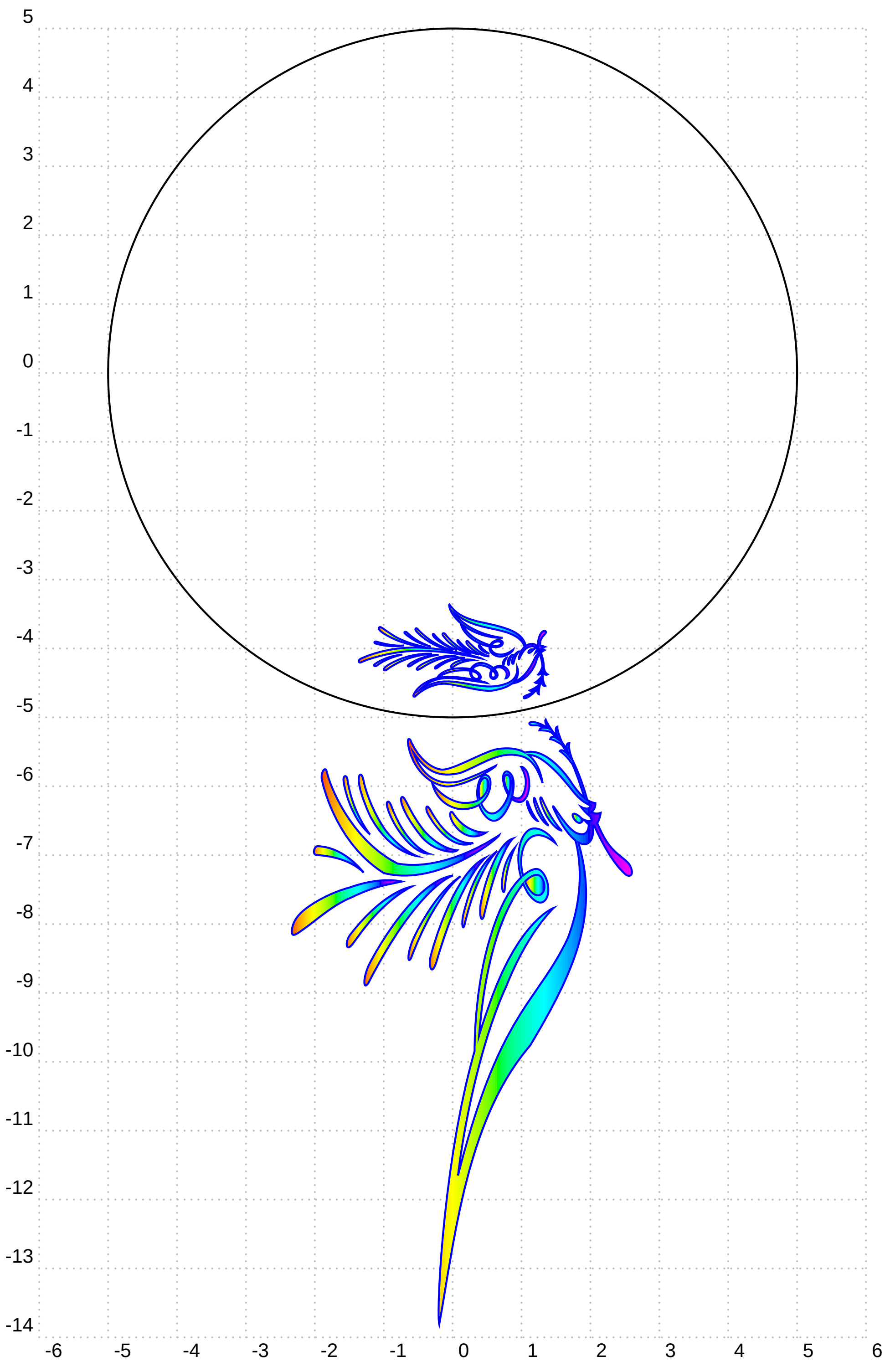


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15
-16
-17
-18
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15
-16
-17
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

L’anamorphose impossible ! L’image à anamorphoser devrait être à l’intérieur du miroir :





5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6