De l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

(★ ★ ★ ★ ★)

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre *irrationnel*, c'est-à-dire un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers.
Pour cela, on raisonne *par l'absurde* : on suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel et on démontre que l'on aboutit alors à une conclusion qui contredit l'hypothèse ; on en déduit que l'hypothèse est fausse.
Hypothèse (**H**) : $\sqrt{2}$ *est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres entiers positifs* a *et* b*, avec* $b \neq 0$*, premiers entre eux et tels que*

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

1/ Que vaut $\dfrac{a^2}{b^2}$? Exprime a^2 en fonction de b^2.
Déduis-en que a^2, donc a, est un nombre pair.

2/ a étant pair, il existe un nombre entier n non nul et tel que $a = 2 \times n$.
Exprime a^2 puis b^2 en fonction de n. Que peut-on en déduire pour b^2 ? Pour b ?

3/ On aboutit donc à la conclusion : a et b sont pairs.
Pourquoi cette conclusion contredit-elle l'hypothèse (**H**) de départ ?

4/ Déduis des questions précédentes que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice difficile malgré la décomposition. À faire dans une bonne classe.
