

CHAPITRE IV

CARTES GÉOGRAPHIQUES

Suivant son humeur, le lecteur trouvera ce chapitre et le suivant trop courts ou trop longs. Qu'il évite un jugement hâtif : je n'étudie guère que les projections dont parle l'introduction de l'Atlas Schrader-Prudent-Anthoine, qui est classique. Si mon lecteur a le sens de l'ironie, il s'offrira du bon sang en comparant mon texte à celui de ces messieurs. Il comprendra le ridicule de ces « renseignements » *à l'usage du grand public* ! Tout le monde n'est pas forcé d'être cartographe ; il est même fort heureux que tout le monde ne le soit pas. Mais, pour Dieu ! si vous parlez *cartographie*, que ce soit d'une manière qui ne soit pas stupide. Je ne conteste pas la science de ces messieurs ; je constate seulement le grotesque de la servir en entier dans les quatre colonnes de l'introduction d'un atlas. Par de telles sottises on détraque l'esprit français en lui apprenant à se contenter de mots et d'à peu près.

96. Généralités. Variable de Mercator.

Comme il s'agit de donner au lecteur une vue d'ensemble *raisonnable* des divers systèmes de projections, je considère le

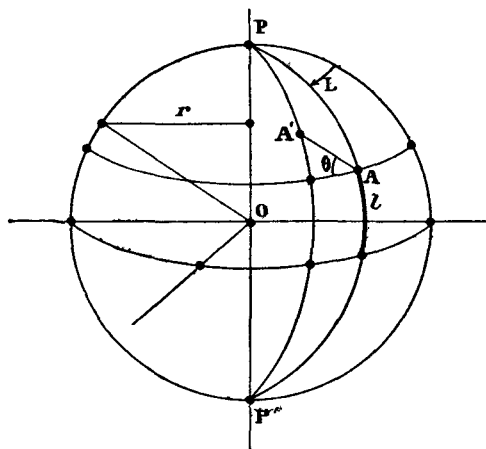


Fig. 76.

plus souvent la Terre comme sphérique ; je ne veux pas compliquer un problème qui passe à tort pour difficile. Outre qu'il est rare qu'on ait intérêt à tenir compte de l'aplatissement, il sera temps d'indiquer la correction pour quelques cas particuliers (voir § 131).

Je prends le rayon de la sphère pour unité.

Sur la sphère la position d'un point est définie, par la latitude l et par la longitude L .

Les lieux des points de même latitude (parallèles) sont des petits

cercles de la sphère ayant les pôles géographiques pour pôles géométriques communs; leur rayon est :

$$r = \cos l.$$

Les lieux des points de même longitude sont des grands cercles (méridiennes); leurs plans sont les méridiens. Les parallèles et les méridiennes forment deux faisceaux de courbes orthogonales.

Un arc AA' infiniment petit tracé sur la sphère a pour longueur ds :

$$ds^2 = dl^2 + \cos^2 l \cdot dL^2.$$

Il fait avec le parallèle au point A un angle θ ; on a :

$$\cos \theta = \frac{dL \cdot \cos l}{ds}, \quad \sin \theta = \frac{dl}{ds}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dl}{dL \cdot \cos l}$$

Les parallèles et les méridiennes découpent la sphère en petits rectangles d'aire :

$$dS = \cos l \cdot dl \cdot dL.$$

2°. — VARIABLE DE MERCATOR.

Pour simplifier les formules et en raison de son intérêt fondamental, nous introduirons sous le nom de *variable de Mercator* (le nom usuel *latitude croissante* est une source de difficultés) la quantité V définie par l'équation :

$$dV = \frac{dl}{\cos l}, \quad V = \int_0^l \frac{dl}{\cos l} = \log \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2} \right).$$

J'en donne une table ci-dessous.

En fonction de cette variable, on a :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dV^2 + dL^2) \cos^2 l; \\ \cos \theta &= \frac{dL}{ds} \cdot \cos l, \quad \sin \theta = \frac{dV}{ds} \cos l, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dV}{dL}. \\ dS &= dL \cdot dV \cdot \cos^2 l. \end{aligned}$$

A la condition d'espacer les parallèles de manière que dL et dV croissent de la même quantité de l'un à l'autre, la surface de la sphère est divisée en une infinité de petits carrés.

Les aires de ces petits carrés sont entre elles comme $\cos^2 l$.

$$\text{97. Table de la fonction } V = \log \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2} \right) = \int_0^l \frac{dl}{\cos l}.$$

Les angles l sont exprimés en degrés; les quantités V sont exprimées en minutes de 60 au degré.

98. Problème des cartes.

1°. — Sur une feuille de papier plane, on trace deux axes rectangulaires Ox, Oy.

Au point de la sphère (L, l) ou (L, V), on fait correspondre un point du plan au moyen des fonctions arbitrairement choisies :

$$x = x(L, l), \quad y = y(L, l). \quad (1)$$

l	V	l	V	l	V
1°	60',0	31°	1958',0	61°	4649',2
2	120,0	32	2028,4	62	4775,0
3	180,1	33	2099,5	63	4904,9
4	240,2	34	2171,5	64	5039,4
5	300,4	35	2244,3	65	5178,8
6	360,7	36	2318,0	66	5323,5
7	421,1	37	2392,6	67	5474,0
8	481,6	38	2468,3	68	5630,8
9	542,2	39	2544,9	69	5794,6
10	603,1	40	2622,7	70	5965,9
11	664,1	41	2701,6	71	6145,7
12	725,3	42	2781,7	72	6334,8
13	786,8	43	2863,1	73	6534,4
14	848,5	44	2945,8	74	6745,7
15	910,5	45	3029,9	75	6970,3
16	972,7	46	3115,6	76	7210,1
17	1035,3	47	3202,7	77	7467,2
18	1098,2	48	3291,5	78	7744,6
19	1161,5	49	3382,1	79	8045,7
20	1225,1	50	3474,5	80	8375,2
21	1289,2	51	3568,8	81	8739,1
22	1353,7	52	3665,2	82	9145,5
23	1418,6	53	3763,8	83	9605,8
24	1484,1	54	3864,6	84	10137
25	1550,0	55	3968,0	85	10765
26	1616,5	56	4073,9	86	11533
27	1683,5	57	4182,6	87	12522
28	1751,2	58	4294,3	88	13916
29	1819,4	59	4409,1	89	16300
30	1888,4	60	4527,4	90	∞

Le problème des cartes consiste à chercher les propriétés *générales* de la transformation (les fonctions x et y de L et l restent indéterminées), et ses propriétés *particulières* quand on spécifie ces fonctions.

Une remarque fondamentale s'impose.

Tant que nous considérons la terre comme sphérique, les pôles ne jouissent d'aucunes propriétés géographiques particulières ; nous pouvons donc les situer où nous voulons pour l'étude *générale* des projections. Naturellement nous les disposons de manière que les formules soient simples. Pour restituer ensuite aux pôles leurs véritables lieux, nous sommes amenés à faire un changement de coordonnées. Les formules reliant la longitude et la latitude aux coordonnées cartésiennes x, y , ou polaires α, r , peuvent donc prendre des formes multiples sans que les propriétés générales de la projection soient modifiées.

Ce qui précède s'applique aux *projections dites zénithales*. Il existe un parallélisme absolu entre les méridiens et les parallèles définis

à partir du pôle, et les plans verticaux et les parallèles à l'horizon (*almicantarats*) définis à partir du zénith. Tout ce que nous établirons donc pour un des systèmes sera vrai pour l'autre. Les formules de la trigonométrie sphérique donnent immédiatement les distances zénithales et les azimuts, à partir des colatitudes et des longitudes, et inversement (voir §§ 55 et 114).

Connaissant x, y , ou r, α , en fonction de l et L dans le système polaire, nous calculerons (théoriquement) sans peine ces mêmes quantités dans le système zénithal en fonction de la hauteur h au-dessous de l'horizon du point pris pour pôle, et de l'azimut A .

Dans la pratique, il ne sera même pas nécessaire de procéder au changement de coordonnées sur les formules (1); il suffira de calculer h et A en fonction de l et de L , puis de prendre le zénith pour pôle de la projection.

2°. — Aux parallèles et aux méridiennes de la sphère correspondent sur le plan deux faisceaux de courbes qui le divisent en parallélogrammes élémentaires.

Nous ne tenons pas compte des dimensions vraies; il nous sera toujours loisible de remplacer la carte plane par une figure semblable grandie ou diminuée à notre gré.

Les fonctions : $x = x(l, L), \quad y = y(l, L),$

sont arbitraires. Quelques-unes ont une interprétation concrète; elles représentent des *projections* ou des *perspectives*. Mais cette circonstance ne leur confère *a priori* aucun avantage spécial; il est donc absurde de parler avec les géographes de *canevas conventionnels* quand il ne s'agit ni d'une projection ni d'une perspective : *tous les canevas sont conventionnels*. Au reste, on les appelle tous des *projections* : le mot perd ici son sens strict.

3°. — Nous avons :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial L} dL + \frac{\partial x}{\partial V} dV, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial L} dL + \frac{\partial y}{\partial V} dV,$$

Posons :
$$\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2 = E,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right] \cos^2 l = G,$$

$$\frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial y}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial V} = \left[\frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial l}\right] \cos l = F.$$

Pour l'élément d'arc $\overline{AA'}$ du plan qui correspond à l'élément $\overline{AA'}$ de la sphère, on a :

$$d\sigma^2 = E dL^2 + 2F \cdot dL dV + G dV^2.$$

$$\cos \Theta = \frac{dx}{d\sigma}, \quad \sin \Theta = \frac{dy}{d\sigma}, \quad \operatorname{tg} \Theta = \frac{dy}{dx}.$$

99. Conservation des aires.

1°. — Sur la sphère considérons deux petits déplacements, l'un dV sur le méridien, l'autre dL sur le parallèle.

Nous définissons ainsi un petit rectangle d'aire :

$$dS = dL \cdot dV \cdot \cos^2 l.$$

Cherchons l'aire du petit parallélogramme correspondant sur le plan. A l'arc dL correspond sur le plan un arc AA_1 défini par les quantités :

$$dx_1 = \frac{\partial x}{\partial L} dL, \quad dy_1 = \frac{\partial y}{\partial L} dL; \quad d\sigma_1 = \sqrt{E} \cdot dL.$$

A l'arc dV correspond sur le plan un arc AA_2 défini par les quantités :

$$dx_2 = \frac{\partial x}{\partial V} dV, \quad dy_2 = \frac{\partial y}{\partial V} dV; \quad d\sigma_2 = \sqrt{G} \cdot dV.$$

$$\text{On a :} \quad \cos \Theta_1 = \frac{dx_1}{d\sigma_1} = \frac{\partial x}{\partial L} \frac{1}{\sqrt{E}}, \quad \sin \Theta_1 = \frac{dy_1}{d\sigma_1} = \frac{\partial y}{\partial L} \frac{1}{\sqrt{E}};$$

$$\cos \Theta_2 = \frac{dx_2}{d\sigma_2} = \frac{\partial x}{\partial V} \frac{1}{\sqrt{G}}, \quad \sin \Theta_2 = \frac{dy_2}{d\sigma_2} = \frac{\partial y}{\partial V} \frac{1}{\sqrt{G}}.$$

$$\sin(\Theta_2 - \Theta_1) = \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial x}{\partial V} \frac{\partial y}{\partial L} \right).$$

L'aire du parallélogramme AA_1A_2 est donc :

$$d\Sigma = d\sigma_1 \cdot d\sigma_2 \cdot \sin \varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial x}{\partial V} \frac{\partial y}{\partial L} \right) dL dV.$$

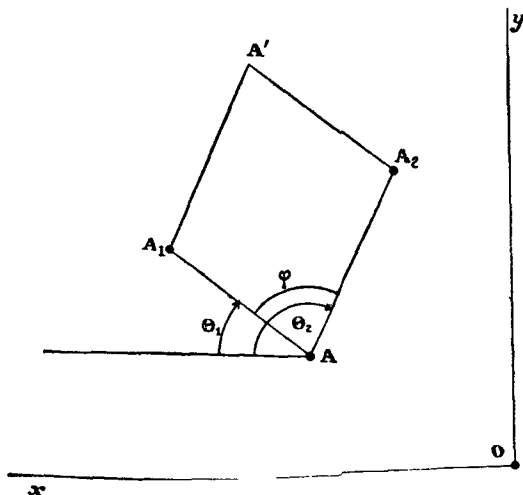


Fig. 77.

Pour que la représentation plane soit en *vraie grandeur* (équivalente), il faut choisir les fonctions $x(L, V)$, $y(L, V)$, telles qu'on ait identiquement :

$$d\Sigma = dS, \quad \frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial x}{\partial V} \frac{\partial y}{\partial L} = \pm \cos^2 l,$$

$$\text{ou encore :} \quad \frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial y}{\partial L} = \pm \cos l.$$

2°. — Si l'on veut que les cercles parallèles soient représentés par des droites parallèles à l'axe Ox , il faut poser :

$$y = f(l), \quad \text{d'où :} \quad x = L\varphi(l),$$

par substitution dans la condition générale d'où L doit disparaître.

$$\text{Il vient :} \quad \pm \varphi(l) \cdot f'(l) = \cos l.$$

$$\text{D'où enfin :} \quad y = f(l), \quad x = \frac{L \cos l}{f'(l)}.$$

3°. — COORDONNÉES POLAIRES.

Les formules de transformation se présentent souvent en coordonnées polaires sous la forme :

$$\alpha = \alpha(l, L), \quad r = r(l).$$

Cherchons la condition pour que les aires se conservent.

On a :

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial x}{\partial L} = -r \sin \alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial L}, \quad \frac{\partial y}{\partial L} = r \cos \alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial L};$$

$$\frac{\partial x}{\partial l} = \cos \alpha \frac{dr}{dl} - r \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial l}, \quad \frac{\partial y}{\partial l} = \sin \alpha \frac{dr}{dl} + r \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial l}.$$

La condition de conservation des aires est :

$$r \frac{dr}{dl} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial L} = \pm \cos l.$$

Comme par hypothèse r n'est fonction que de l , pour que les aires soient conservées, α doit être de la forme :

$$\alpha = Lf(l) + \varphi(l).$$

$$r dr = \frac{\cos l \cdot dl}{f(l)}, \quad r^2 = r_0^2 + 2 \int_0^l \frac{\cos l}{f(l)} dl.$$

100. Propriétés générales d'une transformation quelconque.

Du point A de la sphère comme centre et sur le plan tangent, décrivons un cercle infiniment petit de rayon ds : les variables L et V subissent des accroissements dL , dV , liés par la formule :

$$ds^2 = (dL^2 + dV^2) \cos^2 l; \quad (1)$$

ds et l sont des constantes.

Cherchons quelle courbe correspond dans le plan au petit cercle ci-dessus tracé. On a :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial L} dL + \frac{\partial x}{\partial V} dV, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial L} dL + \frac{\partial y}{\partial V} dV.$$

Résolvons par rapport à dL et dV ; transportons dans (1); il vient une équation quadratique en dx , dy : conséquemment la courbe cherchée est une ellipse. Elle ne peut être qu'une ellipse, car, d'après la nature du problème, elle n'a pas de branches infinies.

On remarquera que nous traitons les dérivées partielles comme des constantes. Autour du point A elles ont en effet la valeur qu'elles prennent au point A à partir duquel nous faisons varier les coordonnées.

En définitive, quelles que soient les fonctions $x(L, V)$, $y(L, V)$, à un cercle infiniment petit tracé sur la sphère correspond une ellipse dans le plan, et inversement; plus généralement, à une ellipse correspond une ellipse. Cette proposition, qui s'applique non seulement à la sphère, mais à toutes les surfaces, tient à ce que les formules sont linéaires par rapport aux différentielles.

2°. — A l'arc : $ds^2 = (dL^2 + dV^2) \cos^2 l$,
correspond sur le plan l'arc :

$$d\sigma^2 = E dL^2 + 2F dL dV + G dV^2.$$

Cherchons pour quelles directions il est maximum.

Le carré du rapport de transformation est :

$$\tau^2 = \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = \frac{E + 2Fp + Gp^2}{(1 + p^2) \cos^2 l}, \quad \text{en posant} \quad p = \frac{dV}{dL} = \operatorname{tg} \theta;$$

p est la pente de l'arc AA' tracé sur la sphère.

Le maximum de τ a lieu pour :

$$p^2 + \frac{E-G}{F} p - 1 = 0, \quad p = \frac{G-E}{2F} \pm \sqrt{\frac{(G-E)^2}{4F^2} + 1}.$$

Les racines p_1 , p_2 , de cette équation satisfont à la condition :

$$p_1 p_2 = -1, \quad p_1 + p_2 = \frac{G-E}{F}. \quad (2)$$

En conséquence le rapport τ est maximum et minimum pour deux directions rectangulaires de l'arc AA' tracé sur la sphère.

Nous désignerons par τ_1 le maximum, par τ_2 le minimum.

Ce sont généralement des fonctions de L et de V; autrement dit, ils varient avec le point A considéré.

La pente P sur la carte est définie par la relation :

$$P = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial y}{\partial L} + \frac{\partial y}{\partial V} p \right) : \left(\frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial x}{\partial V} p \right).$$

Faisons le produit $P_1 P_2$ des pentes qui correspondent à p_1 et p_2 . Utilisons les définitions de E, F, G, et les relations (2) ci-dessus démontrées; nous trouvons aisément :

$$P_1 P_2 = -1.$$

Donc aux deux directions p_1 , p_2 , rectangulaires sur la sphère, pour lesquelles le rapport de transformation est maximum et minimum (directions principales), correspondent sur le plan deux directions

rectangulaires. Ce sont évidemment les axes de l'ellipse; nous obtenons donc une vérification de ce qu'on pouvait prévoir sans calcul.

101. Déformations angulaires.

1°. — Les équations du paragraphe précédent permettent de calculer les pentes p_1, p_2 , des droites rectangulaires tracées sur le plan tangent à la sphère, qui correspondent aux axes de l'ellipse.

Soit sur le plan tangent $O\xi, O\eta$, deux axes rectangulaires dont les pentes sont p_1, p_2 , par rapport au parallèle; menons sur la carte les droites Ox, Oy , qui leur correspondent. Les formules de transformation, qui restent évidemment linéaires après le changement d'axes de coordonnées, sont nécessairement de la forme :

$$x = a\xi, \quad y = b\eta.$$

Il s'agit, bien entendu, d'arcs très petits à partir du point considéré sur la sphère et de son image dans le plan. Posons :

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\eta}{\xi}; \quad \omega = \theta - \Theta.$$

On trouve immédiatement :

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \theta, \quad \operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \theta \frac{a-b}{a+b \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

Le maximum Ω de ω a lieu pour :

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \operatorname{tg} \Omega = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}, \quad \sin \Omega = \frac{a+b}{a-b}.$$

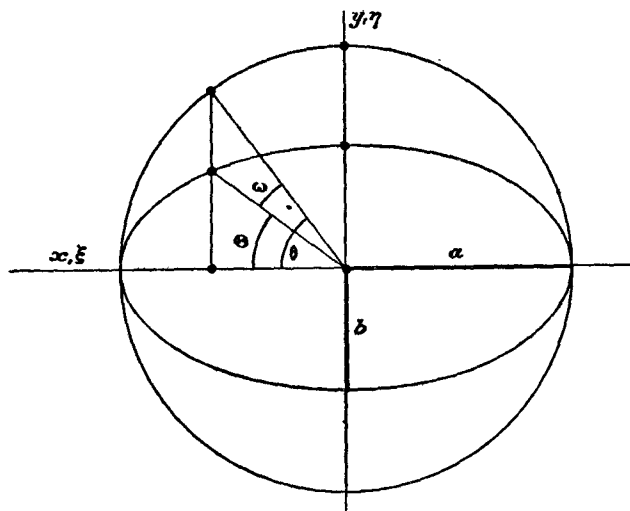


Fig. 78.

Si donc nous connaissons les *directions principales* et les facteurs de transformation correspondants a, b , nous calculons aisément la plus grande altération angulaire.

L'angle ω varie de 0 pour $\theta=0$, à 0 pour $\theta=90^\circ$.

Entre temps il passe par le maximum ci-dessus calculé pour :

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \operatorname{tg} \Theta = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Les angles correspondants θ et Θ satisfont à la relation :

$$\theta + \Theta = \pi : 2.$$

Ces formules sont faciles à appliquer, parce qu'en général la symétrie de la transformation indique où sont les directions principales.

Elles correspondent à $p=0$ et $p=\infty$, quand on a $F=0$.

Elles correspondent à $p=\pm 1$, quand on a $E=G$.

2°. — Dans une direction quelconque θ sur la sphère on a :

$$\xi = \cos \theta, \quad \eta = \sin \theta.$$

D'où sur le plan : $x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta;$

$$\tau_1^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta.$$

Pour la direction rectangulaire $\theta + 90^\circ$, on a :

$$\xi = -\sin \theta, \quad \eta = \cos \theta.$$

$$\tau_2^2 = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta.$$

D'où : $\tau_1^2 + \tau_2^2 = a^2 + b^2.$

C'est le théorème d'Apollonius.

Le couple de directions rectangulaires dont nous partons, est transformé sur la carte en un couple de droites faisant entre elles l'angle φ . On vérifiera aisément la relation :

$$\tau_1 \tau_2 = ab \sin \varphi.$$

C'est la seconde relation d'Apollonius; elle prouve qu'à deux directions rectangulaires sur la sphère (au voisinage d'un point bien entendu) correspondent deux diamètres conjugués de l'ellipse transformée du petit cercle qui a ce point pour centre.

3°. — Grâce à ces formules on calcule rapidement la plus grande déformation angulaire. On a :

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-2ab}{2\sqrt{ab}}.$$

Nous explicitons ainsi les quantités (a^2+b^2) et (ab) .

Calculons les facteurs de transformation le long du méridien et du parallèle.

Pour $p=0$, $\tau_1 = \sqrt{E} : \cos l$,

$p=\infty$, $\tau^2 = \sqrt{G} : \cos l$;

d'où : $\tau_1^2 + \tau_2^2 = a^2 + b^2 = \frac{E+G}{\cos^2 l},$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial y}{\partial L} \right) \cos l,$$

$$\tau_1 \tau_2 \sin \varphi = ab = \frac{1}{\cos l} \left(\frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial y}{\partial L} \right).$$

102. Transformation conforme (ou orthomorphe).

La transformation est *conforme* lorsque des figures semblables infiniment petites se correspondent sur la sphère et sur le plan.

Il faut donc qu'un petit cercle soit transformé en un petit cercle. D'où les conditions (§ 100) :

$$\tau_1 = \tau_2, \quad E = G, \quad F = 0.$$

Ainsi la transformation est *conforme* quand on a :

$$E = G, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial L} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial V} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l} \right)^2, \\ F = \frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial y}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial V} = 0.$$

Il revient au même d'écrire :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial L} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L} \right)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l} \right)^2 \right] \cos^2 l, \\ \frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial l} = 0. \quad (1)$$

Le rapport de transformation est indépendant de la direction autour d'un point, mais variable d'un point à l'autre. On a :

$$\tau = \sqrt{E} : \cos l.$$

Dans la représentation conforme les angles étant conservés, aux méridiennes et aux parallèles correspondent deux faisceaux de courbes orthogonales. D'où (§ 99) :

$$\sin(\Theta_2 - \Theta_1) = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial V} - \frac{\partial x}{\partial V} \frac{\partial y}{\partial L} = \sqrt{EG},$$

relation qu'on tire aisément des relations (1).

Canevas de droites rectangulaires.

Les classifications proposées pour les projections usuelles sont tellement arbitraires et compliquées que nous nous contenterons de grouper ces projections au mieux suivant la nature des équations de transformations.

Le canevas est *rectiligne* quand les équations sont de la forme :

$$x = x(L), \quad y = y(l).$$

Les *méridiennes* sont représentées par des droites parallèles; les *parallèles* sont représentés par des droites normales aux premières.

103. Cartes plates.

L'idée la plus simple est de poser :

$$x=L, \quad y=l;$$

on obtient ainsi les *cartes plates*.

On représente la Terre sur une bande de hauteur π et de longueur 2π .

Formons les quantités E, F, G :

$$E=1, \quad G=\cos^2 l, \quad F=0.$$

Par raison de symétrie, le facteur de transformation τ est maximum et minimum le long des méridiens et des parallèles.

On a généralement :

$$\tau^2 = \frac{1 + p^2 \cos^2 l}{(1 + p^4) \cos^2 l}.$$

Pour $p = \infty$, suivant les méridiens, $\tau = 1$;

$p = 0$, suivant les parallèles $\tau = 1 : \cos l$.

En particulier au pôle, où la distance des méridiens s'annule, le facteur de transformation suivant les parallèles devient infini.

La plus grande altération angulaire autour de chaque point est donnée par la formule :

$$\sin \omega = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \cos l}{1 + \cos l} = \operatorname{tg}^2 \frac{l}{2}.$$

Les distances sont indiquées exactement sur les méridiens et sur

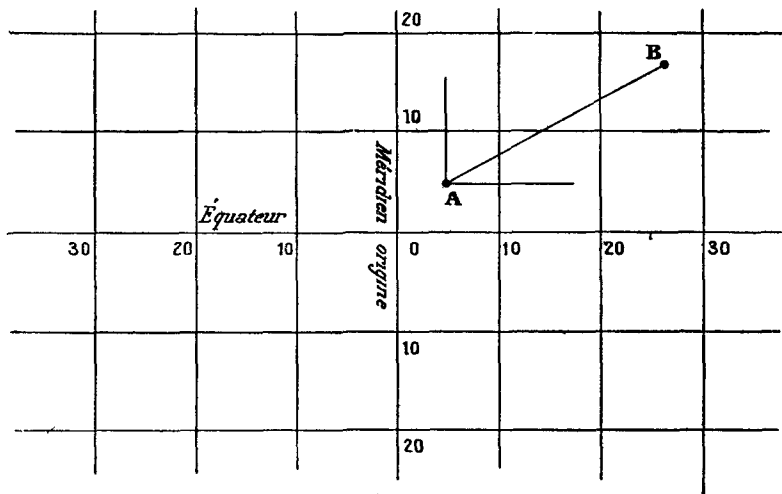


Fig. 79.

l'équateur; elles sont agrandies pour toutes les routes obliques. Joignons deux points A et B sur la carte : la droite AB n'indique en aucune manière l'angle que le plus court chemin de A à B sur la sphère (arc de grand cercle) fait avec le méridien d'origine.

La *carte plate* ne peut donc servir aux marins pour déterminer la

route, c'est-à-dire l'angle qu'il faut donner à l'aiguille de la boussole par rapport à la quille du navire (plus exactement par rapport au *longitudinal*).

Pour fixer les idées, choisissons les coordonnées suivantes :

point A : $L=0$, $l=0$; point B : $L=180$, $l=90-\epsilon$.

Sur la sphère, il faudrait se déplacer exactement sur le méridien

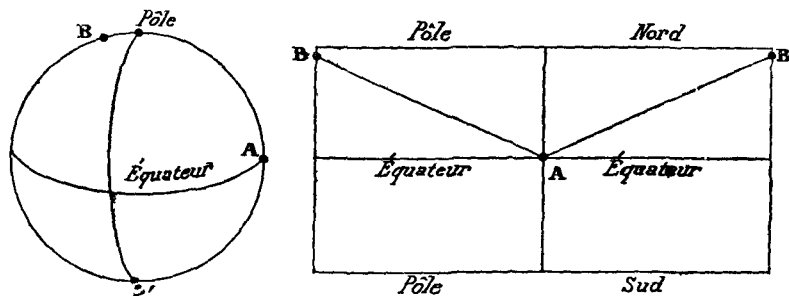


Fig 80.

APB pour aller de A à B, par le plus court chemin; tandis que la droite AB fait avec l'équateur l'angle :

$$\pm \arctg \frac{90}{180} = \pm \arctg 0,5 = \pm 26^{\circ} 34'.$$

2°. — CARTES A CANEVAS RECTANGULAIRES.

On pose : $x=kL$, $y=l$, ($k < 1$).

k est choisi de manière que le rapport des arcs de parallèle et de méridien soit correct pour le parallèle moyen.

Soit l_0 la latitude de ce parallèle. On pose donc :

$$k = \cos l_0.$$

L'élément du canevas devient un rectangle dont le grand côté est vertical. Par exemple, pour $l_0 = 45^{\circ}$, le côté horizontal du rectangle est 0,707 du côté vertical.

On a : $E=k^2$, $F=0$, $G=\cos^2 l$;

$$\tau^2 = \frac{k + p^2 \cos^2 l}{(1 + p^2) \cos^2 l}.$$

Pour $p = \infty$, c'est-à-dire suivant les méridiens, $\tau = 1$;

$p=0$, — — — parallèles, $\tau = k : \cos l$.

En posant $k = \cos l_0$, on réalise une projection en vraie grandeur le long du parallèle moyen.

Comme on a : $E=G$, $F=0$,

le long de ce parallèle, la représentation est conforme.

Les cartes *parallélogrammatiques* sont les plus anciennes.

Elles conviennent à la représentation de bandes peu étendues en latitude; l'étendue en longitude est indifférente.

3°. — PROJECTION TRAPÉZIFORME.

Je rapproche de ces projections la projection *trapéziforme* fort en honneur au XIV^e siècle. Les parallèles sont encore des droites parallèles; mais les méridiens sont des droites concourantes :

$$x = bL(a - y), \quad y = l.$$

On dispose de deux constantes qu'on détermine en écrivant que les parallèles ont leur longueur correcte $2\pi \cos l$ pour deux latitudes l_0 et l_1 . On pose donc :

$$x = \pi \cos l, \quad \text{pour } L = \pi, \quad \text{et pour } y = l_0 \text{ et } y = l_1.$$

$$a = \frac{l_1 \cos l_0 - l_0 \cos l_1}{\cos l_0 - \cos l_1}, \quad b = \frac{\cos l_0 - \cos l_1}{l_0 - l_1}.$$

Cette projection altère considérablement les angles.

104. Projection de Lambert (conservation des aires).

Pour que les aires soient conservées on doit avoir :

$$\frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial y}{\partial l} - \frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial y}{\partial L} = \pm \cos l.$$

Posons : $x = L, \quad y = \sin l.$

On a : $\frac{\partial x}{\partial L} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial l} = \cos l;$ la condition est satisfaite.

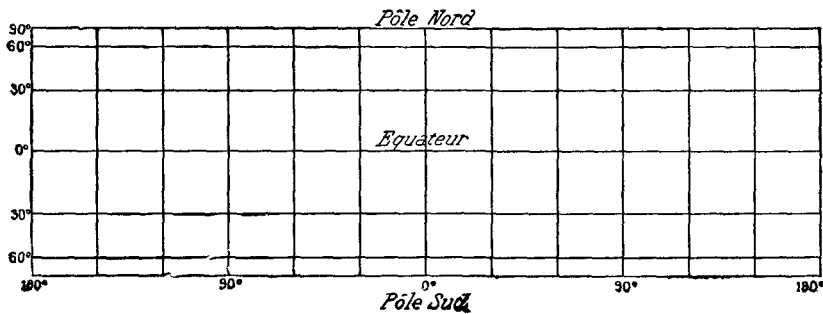


Fig. 81.

On a d'autre part : $F = 0, \quad E = 1, \quad G = \cos^4 l.$

Pour $p = \infty$, le long des méridiens $\tau = \cos l$,
 $p = 0$, — parallèles $\tau = 1 : \cos l.$

La plus grande altération angulaire autour de chaque point est donnée par la formule :

$$\text{tg } \Omega = \frac{1}{2} \text{tg } l. \sin l.$$

105. Projection sur un cylindre coaxial à la ligne des pôles.

1°. — POINT DE VUE SUR LA LIGNE DES PÔLES.

Comme les dimensions absolues importent peu, supposons que le cylindre est tangent à l'équateur. Une de ses génératrices est TC.

Le point de vue V est sur la ligne des pôles à une distance $\overline{VO} = D$ du centre.

La projection du point Q de latitude l se fait en R, à la distance de l'équateur :

$$\overline{TR} = y = D - \frac{D - \sin l}{\cos l}.$$

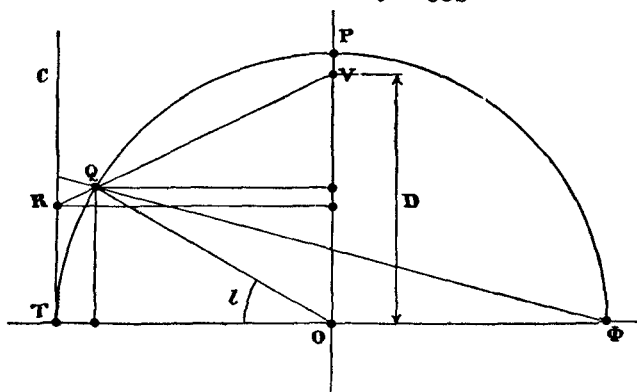


Fig. 82.

Les formules de transformation sont donc :

$$x = L, \quad y = D - \frac{D - \sin l}{\cos l}.$$

2°. — PROJECTION CYLINDRIQUE ORTHODROMIQUE.

Plaçons l'œil au centre de la sphère, $D = 0$:

$$x = L, \quad y = \operatorname{tg} l.$$

Cette projection est *orthodromique*, parce que les grands cercles sont représentés par des droites. Or ce sont les plus courts chemins sur la sphère. Pour aller d'un point A à un point B, il suffit de tracer au crayon la droite AB : nous connaissons immédiatement les latitudes et longitudes des différents lieux par lesquels passe le grand cercle joignant A et B. De telles cartes seraient un complément utile des *cartes de Mercator ou réduites* employées pour la *navigation loxodromique*, dans le cas où il est avantageux de s'écarter de la loxodromie (§ 110).

Nous retrouverons au § 115 d'autres cartes orthodromiques obtenues par projection sur un plan tangent au pôle, l'œil étant toujours au centre de la sphère.

2°. — POINT DE VUE SUR L'ÉQUATEUR, MAIS RESTANT DANS LE MÉRIDIEN A PROJETER.

Pour le méridien qui est dans le tableau, le point de vue est en Φ.

On a :

$$x = L, \quad y = 2 \operatorname{tg} \frac{l}{2}.$$

Dans ce système la carte reste finie pour la latitude $l = 90^\circ$.

On a alors $y = 2$.

106. Projection de Cassini III.

1°. — Sur la carte prenons comme coordonnées rectilignes du point A (fig. 83) :

$$x = \overline{AN}, \quad y = i = \overline{MN}.$$

AN est la distance au méridien principal PM; $\overline{MN} = i$ est l'inclinaison sur l'équateur du grand cercle qu'on mène par le point A et par le diamètre RS normal au méridien origine.

Dans les triangles rectangles RQA et PAN, on a :

$$\sin x = \cos l \cdot \sin L, \quad \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} l : \cos L. \quad (1)$$

Le canevas est représenté dans la figure 84.

Faisons $L = 90^\circ$; il vient : $x + l = \pi : 2$, $y = \pi : 2$;

faisons $L = 0$; il vient : $y = l$.

Les images des parallèles coupent le méridien principal à des distances du centre de la carte proportionnelles à leurs cotes.

Elles coupent les droites $y = \pm \pi : 2$ à des distances du méridien principal complémentaires de leur cote.

Faisons $l = 0$; il vient

$$x = L;$$

faisons $l = 90^\circ$;

il vient $x = 0$,

$$y = \pi : 2.$$

Les images des méridiens coupent l'image de l'équateur à des distances du centre de la carte proportionnelles à leur cote.

Elles passent toutes par les pôles.

2°. — Cherchons les images des points R, S : $l = 0$, $L = \pm 90^\circ$.

La première équation donne : $x = \pm 90^\circ$;

la seconde donne : $y = \pm 90^\circ$.

L'image du point R est toute la droite $R_1 R''$;

l'image du point S est toute la droite $S_1 S''$.

Les images des grands cercles perpendiculaires au méridien principal sont des droites horizontales. Elles sont tangentes aux images des parallèles sur le méridien principal.

Cherchons ce qui arrive au voisinage du pôle.

Faisons donc : $b = 90^\circ - \varepsilon$.

Il vient : $x = \varepsilon \sin L$, $\frac{\pi}{2} - y = \varepsilon \cos L$.

$$x : \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \operatorname{tg} L.$$

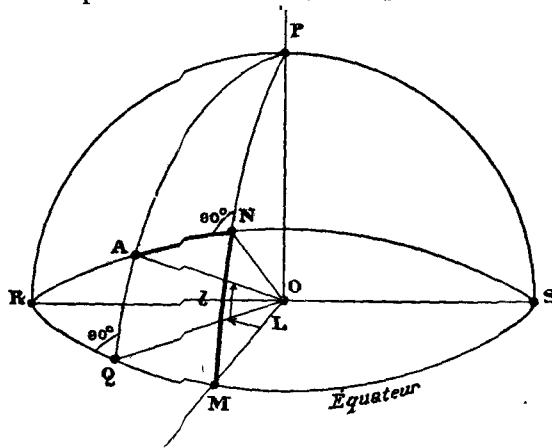


Fig. 83.

Cette équation signifie que les méridiens partent du pôle en faisant avec le méridien principal un angle égal à leur cote.

Le méridien de cote $L = \pm 90^\circ$ est un carré : il limite la carte.

Il est clair que loin du centre de la carte les déformations sont énormes tant pour les angles que pour les surfaces; mais Cassini

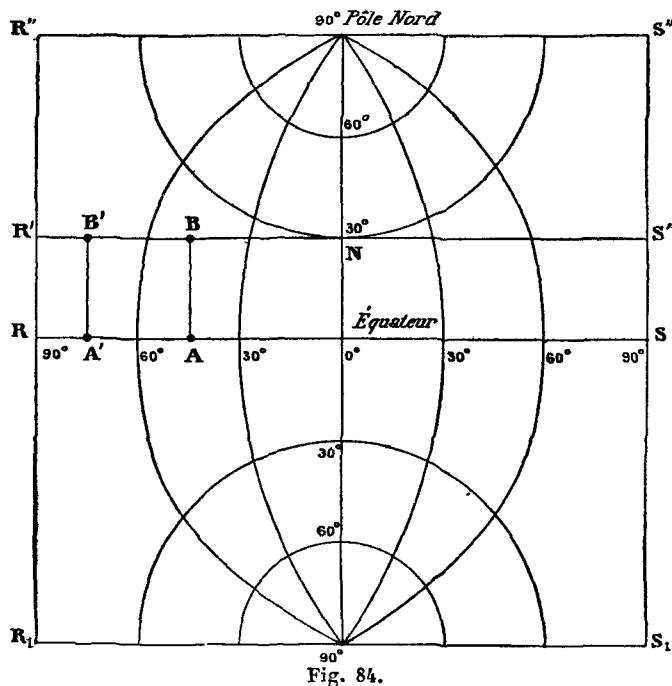


Fig. 84.

n'utilisait cette projection que pour la France, dont l'aire est un millième environ de l'aire totale de la Terre.

Si l'on remplace l'équateur par un grand cercle passant par les points R et S et d'inclinaison i_0 , les définitions restent les mêmes, on a :

$$x = \overline{AN}, \quad y = i - i_0.$$

D'où les formules :

$$\sin x = \cos l \cdot \sin L, \quad \operatorname{tg}(y + i_0) = \operatorname{tg} l : \cos L.$$

107. Carte de France de Cassini.

1°. — Revenons sur les raisons pour lesquelles Cassini choisit sa projection.

Les opérations géodésiques déterminent des *géodésiques*. Si donc on part normalement à un méridien, on décrit, non pas un parallèle (lieu des points de même latitude), mais un grand cercle de la sphère.

En posant comme condition que les grands cercles sont normaux à un même méridien (celui de l'Observatoire de Paris pour préciser), ils vont passer par les pôles R et S de ce méridien.

Cassini détermina un certain nombre de ces *perpendiculaires* à la

méridienne. En 1733, il construit la perpendiculaire passant par l'Observatoire de Paris; elle aboutit près de Granville d'une part, près de Strasbourg de l'autre. En 1735, il construit une perpendiculaire coupant la méridienne de Paris à 60.000 toises (117 kilomètres environ) au midi. Ainsi de suite.

Sans s'inquiéter des latitudes et des longitudes (que l'on connaissait mal), il était naturel de transporter purement et simplement sur un plan le résultat des mesures géodésiques : cela revenait à prendre pour droites horizontales du canevas les perpendiculaires, c'est-à-dire à poser :

$$y=i;$$

i est l'inclinaison du plan contenant la perpendiculaire (à supposer la Terre sphérique); autrement dit, c'est la latitude du point où elle coupe le méridien principal.

La seconde coordonnée, pour ainsi dire obligée, était la distance au méridien principal.

2°. — On trouve dans toutes les géographies que les coordonnées utilisées par Cassini sont la distance à la méridienne et *la distance à la perpendiculaire menée par l'Observatoire de Paris*. Il est à peine besoin de démontrer que cet énoncé est grossièrement faux et contradictoire avec l'essence même du procédé de Cassini. Puisque Cassini représente les perpendiculaires par des droites parallèles, il ne peut pas, en même temps, prendre pour ordonnées les distances à l'une de ces perpendiculaires; il n'ignore pas que les points des perpendiculaires A, B, A', B', situés respectivement sur des parallèles à la méridienne principale, ne sont pas équidistants (§ 190). Il nous dit expressément que la distance de Brest à la perpendiculaire menée au sud de Paris est de 45.386 toises. « La retranchant de la distance entre les deux perpendiculaires qui, à cause de la sphéricité de la Terre, ont dû se rapprocher l'une de l'autre à Brest de 192 toises, on aura sa distance à la perpendiculaire de Paris de 14.806 toises. »

Effectivement $45.386 + 14.806 = 60.000 - 192$.

Comment faisait Cassini pour situer sur sa carte un point qui ne se trouvait pas exactement sur l'une des perpendiculaires?

Cela ne présente aucune difficulté en supposant la Terre sphérique : on calcule aisément le rapprochement des perpendiculaires, par suite sur quelle perpendiculaire doit se trouver le point, connaissant sa distance à l'une d'elles. Une interpolation suffit amplement.

3°. — Voici quelques renseignements sur la *Carte de Cassini*.

C'est en 1733 que le contrôleur général Orry fit un arrangement avec Cassini III (de Thury) pour mettre sur pied une carte de France.

Le canevas général fut constitué par la Méridienne Dunkerque-Paris (celle qui fut plus tard prolongée jusqu'à Barcelone), et par sept perpendiculaires à la méridienne la coupant à la distance de 60.000 toises l'une de l'autre.

Le canevas était complété par trois parallèles à la Méridienne.

Les côtes et les frontières furent déterminées par une chaîne

ininterrompue de triangles, « espèce de fortification géométrique qui assure de la manière la plus inaltérable l'étendue actuelle du royaume » ! Phrase admirable et qui peint une époque ! Tout de même des tranchées valent mieux !

Le canevas de second ordre était constitué par plus de 800 triangles qui se terminaient à 19 bases servant de preuves aux opérations. Tous les triangles étaient ramenés à l'horizon.

Projection de Mercator.

108. Problème des routes en navigation. Loxodromie.

1°. — Le plus court chemin d'un point à un autre sur la sphère est le plus petit des deux arcs du grand cercle qui passe par ces points.

Cette courbe coupe les méridiens suivant un angle variable (fig. 85).

En effet, soit BCB' un grand cercle normal au cercle ABE .

Dans le triangle sphérique rectangle ABC , on a :

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} \overline{AB} : \sin \overline{BC}.$$

Déplaçons le point C de B en B' ; l'angle C est droit en B , il diminue, devient minimum pour $\overline{BC} = 90^\circ$, croît ensuite et redevient droit pour $\overline{BC} = 180^\circ$.

2°. — Mais l'emploi de la boussole conduit les marins à utiliser entre deux points, non pas la route la plus courte, mais celle qui fait un angle constant avec les méridiens successifs : on l'appelle *loxodromie*.

Admettons, en effet, que la *déclinaison magnétique* soit constante : la projection horizontale de l'aiguille aimantée fait partout le même angle avec le méridien géographique. Pour décrire automatiquement la loxodromie, il suffit de maintenir constant l'angle de l'aiguille (rendue sensiblement horizontale par son mode de suspension) avec la quille du navire (plus exactement avec le plan *longitudinal* de symétrie du navire). La variation de la déclinaison entraîne une variation de cet angle ; mais elle varie peu d'un point à un autre pas trop éloigné : la correction est facile.

Nous sommes donc conduits à chercher les propriétés de la courbe NM qui coupe tous les méridiens sous un angle constant $\angle NMZ = Z$.

3°. — LOXODROMIE.

Soit $ds = \overline{NM}$ l'élément d'arc de cette courbe.

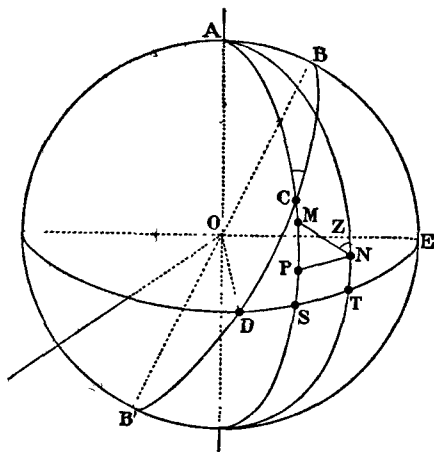


Fig. 85.

On a : $\overline{PM} = dl = ds \cos Z;$
 d'où en intégrant : $l - l_0 = s \cos Z.$ (1)

s est l'arc total parcouru à partir du point de départ N ; il est proportionnel à la variation de la latitude.

On a : $\overline{NP} = \cos l . dL = \sin Z . ds.$

D'où en intégrant (§ 82) :

$$L - L_0 = \operatorname{tg} Z \int_{l_0}^l \frac{dl}{\cos l} = \operatorname{tg} Z (V - V_0). \quad (2)$$

Partons d'un point N de coordonnées géographiques L_0, l_0 .

Pour aller jusqu'au pôle, nous devons parcourir le chemin *fini* :

$$s = \left(\frac{\pi}{2} - l_0 \right) \frac{1}{\cos Z};$$

sa valeur est fonction de l'angle Z de départ.

Toutefois le pôle est un point asymptotique, puisque $L - L_0$ devient infini pour $l = 90^\circ$, $\cos l = 0$. La loxodromie est donc une spirale sphérique qui fait autour du pôle *une infinité* de tours; les rayons moyens des spires successives diminuent assez vite pour que la longueur totale du chemin reste *finie*.

Au voisinage du pôle la loxodromie devient une *spirale logarithmique ordinaire*.

Remplaçons la latitude l par son complément λ .

On a : $l + \lambda = \pi/2, \quad dl + d\lambda = 0;$

$$\int \frac{pl}{\cos l} = - \int \frac{d\lambda}{\sin \lambda} = - \int \frac{d\lambda}{\lambda} = - \log \lambda + \text{constante},$$

si λ est petit La colatitude λ joue le rôle de rayon vecteur, la longitude est la seconde coordonnée polaire.

En chaque point de la sphère passent deux loxodromies symétriques par rapport au méridien de départ et faisant le même angle avec ce méridien.

Nous allons maintenant comprendre l'intérêt des cartes de Mercator.

109. Projection de Mercator (conforme); cartes réduites.

1°. — On pose :

$$x = L, \quad y = V = \int_0^l \frac{dl}{\cos l} = \log . \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2} \right).$$

Les logarithmes sont népériens

On a : $E = G = 1, \quad F = 0.$

La transformation est conforme

Le facteur de transformation, indépendant de la direction en un point donné, mais variable avec le point, est :

$$\tau = 1 : \cos l.$$

L'intérêt de cette projection est que les loxodromies ont des droites pour images. L'équation :

$$L - L_0 = \operatorname{tg} Z (V - V_0), \quad \text{devient :} \quad x - x_0 = \operatorname{tg} Z (y - y_0).$$

C'est évident, puisque la transformation est conforme et que les méridiens ont des droites parallèles pour images : seule une droite peut faire un angle invariable avec tous les méridiens. Les arcs ds de la loxodromie tracée sur la sphère subissent une amplification croissante vers les pôles : à l'arc ds sur la sphère correspond l'arc $ds : \cos l$ sur le plan.

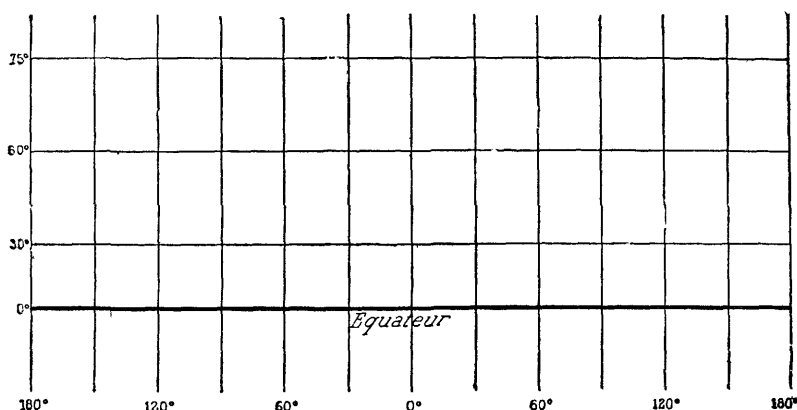


Fig. 86.

La longueur de la route jusqu'au pôle devient infinie *sur la carte*. Pour comprendre ce que cela signifie, on disposera les unes à côté des autres n cartes de Mercator numérotées 0, 1, 2, 3, ..., et représentant chacune la sphère entière. Elles sont de longueur *finie* dans le sens des longitudes, mais de hauteur *infinie* dans le sens des latitudes.

Une loxodromie est une droite *indéfinie* NMP.

Nous pouvons la tracer tout entière sur une carte unique, à la condition d'y ramener les morceaux MP, PQ, ... par une translation parallèle à EE'.

Les tours successifs de la loxodromie réelle autour du pôle sont remplacés, dans son image, par le passage de la droite NMP à travers les bandes successives; quand on utilise une seule carte, ils sont remplacés par les segments parallèles M'P', P''Q', ...

Les longueurs de ces segments sont égales, mais ce sont les images d'arcs de plus en plus petits.

La figure 87 rend évidente une proposition importante : *on peut aller du point N au point T par une infinité de loxodromies*. On les obtient en joignant par des droites le point N aux points T de l'une quelconque des cartes. On ira ainsi de N à T soit après une fraction de tour, soit après n tours plus une fraction de tour. Si par exemple on choisit le point T₁, on fait plus de deux tours pour atteindre T.

On peut mettre le point T sur l'une des cartes qui sont à gauche de la carte 0 où se trouve le point de départ.

En pratique, la route à choisir correspond à la plus petite variation de longitude.

2°. — *Le problème de la route est donc très simplement résolu.*

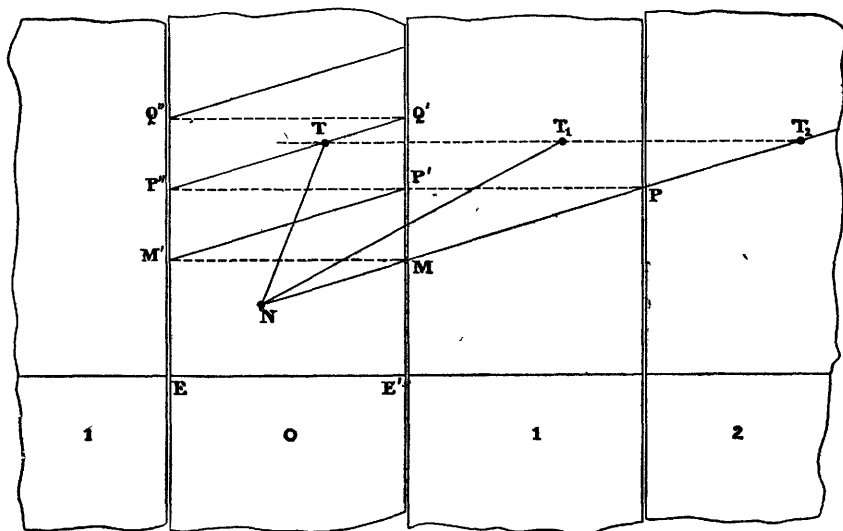


Fig. 87.

Pour aller d'un point A à un point B de la carte par la loxodromie qui les joint, on trace au crayon la droite AB sur la carte. Avec un rapporteur on détermine l'angle que fait cette droite avec les méridiens : c'est l'angle Z.

Connaissant la *variation* magnétique Δ , on sait l'angle $Z \pm \Delta$ que l'aiguille doit faire avec le longitudinal (*cap au compas*). Si l'homme de barre maintient cet angle, le navire décrit la loxodromie.

110. Différence entre la loxodromie et le plus court chemin. Navigation orthodromique.

1°. — De ce que la loxodromie remplace ordinairement le grand cercle (qui est le plus court chemin), on a une tendance à croire que ces chemins sont voisins sur la sphère; ce qui est une grossière erreur. Par exemple, pour aller du point N au point M de même latitude, mais dont les longitudes diffèrent de 180° , le plus court chemin NPM passe par le pôle; la loxodromie *pratique* est le parallèle NQM (fig. 89).

Certes dans les conditions ordinaires d'emploi, la loxodromie, qui est plus longue que le grand cercle, en diffère peu.

Pour fixer les idées, allons (fig. 85) du point D ($l=L=0$), au point B de coordonnées $L=\pi:2$, $l=\pi:4$.

L'arc de grand cercle a pour longueur $\pi:2$.

Calculons l'arc de loxodromie. Les valeurs V et V_0 (*exprimées en radians*) qui correspondent $l=0$, $l=\pi:4$, sont 0 et 0,8814.

L'équation (2) donne donc :

$$1,5708 = 0,8814 \cdot \operatorname{tg} Z, \quad \operatorname{tg} Z = 1,78 \quad \cos Z = 0,49.$$

D'où en vertu de (1) : $s = \pi : 1,96$.

L'allongement de la route n'est que de 2 p. 100.

Il serait nul pour les routes DA ou DE, la loxodromie se confondant alors avec le méridien ou le parallèle.

Revenons à la figure 89.

Le chemin NPM $= \pi - 2l$; le chemin NQM $= \pi \cos l$.

La différence est : $D = \pi \cos l + 2l - \pi$.

Elle est maxima pour $l = 39^\circ 30'$.

D'où : $\pi \cos l = 2,421$, $\pi - 2l = 2,452$.

La différence relative est faible.

2°. — DIFFÉRENCE ENTRE L'AZIMUT LOXODROMIQUE ET L'AZIMUT DE L'ARC DE GRAND CERCLE.

Par les points N et M menons la loxodromie et l'arc de grand cercle (fig. 88). La loxodromie qui est une droite sur la carte, fait un angle invariable Z avec le méridien; l'arc de grand cercle fait avec lui les angles Z_1 en N, Z_2 en M.

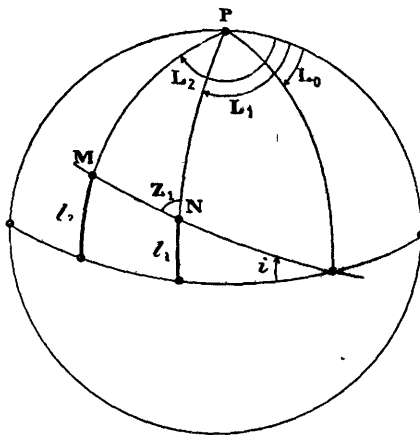


Fig. 88.

Evaluons la différence :

$$\epsilon = Z - Z_1 = Z - Z_2,$$

quand les points N et M sont rapprochés.

Dans le triangle PMN (fig. 88),

$$\text{on a : } \frac{\sin Z_1}{\cos l_1} = \frac{\sin Z_2}{\cos l_2},$$

$$\sin Z \cdot \cos l = \text{constante.}$$

Cette formule différenciée donne :

$$dZ = \operatorname{tg} Z \cdot \operatorname{tg} l \cdot dl.$$

Mais d'après la définition de la loxodromie, on a :

$$\operatorname{tg} Z \cdot dl = \cos l \cdot dL.$$

$$\text{D'où : } dZ = \sin l \cdot dL.$$

Reportons la variation $dZ = 2\epsilon$, respectivement par moitié aux bouts de l'arc MN; passons aux quantités finies.

Nous trouvons pour angle de la droite loxodromique avec l'image du grand cercle MN :

$$Z - Z_1 = \epsilon = \frac{L_2 - L_1}{2} \sin \frac{l_2 + l_1}{2}.$$

Les hydrographes appellent l'angle ϵ la *correction de Givry*.

Nous verrons (§ 111) qu'effectivement l'image du grand cercle est

Soit ρ le rayon du cercle; soit l_0 la latitude de son centre dont nous pouvons toujours supposer la longitude nulle

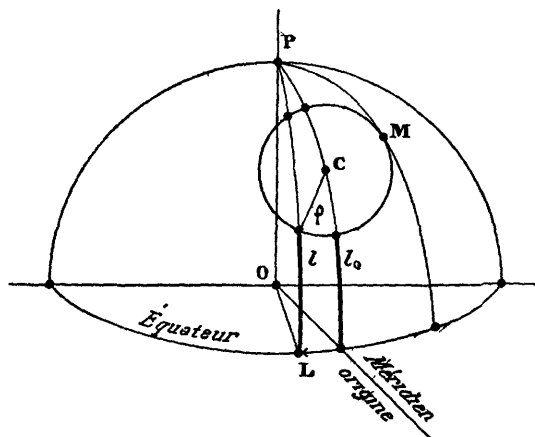


Fig 90.

Les coordonnées géographiques l, L , des points du cercle sont liées par l'équation :

$$\sin l \cdot \sin l_0 + \cos l \cdot \cos l_0 \cdot \cos L = \cos \rho. \quad (1)$$

Si le cercle est infiniment petit, son image sur la carte est un cercle : conséquence de ce que la projection est conforme.

En effet, poussons les développements jusqu'au second ordre;

on a :

$$\sin l = \sin l_0 + \cos l_0 dl - \sin l_0 \frac{dl^2}{2},$$

$$\cos l = \cos l_0 - \sin l_0 dl - \cos l_0 \frac{dl^2}{2},$$

$$\cos L = 1 - \frac{L^2}{2}, \quad \cos \rho = 1 - \frac{\rho^2}{2}.$$

Substituons dans (1); ne conservons que les termes du second ordre. Il vient :

$$dl^2 + \cos^2 l_0 \cdot L^2 = \rho^2, \quad (dx^2 + dy^2) \cos^2 l = \rho^2.$$

Pour un cercle de rayon fini, trois cas à considérer.

2°. — COURBES DE PREMIÈRE ESPECÉ.

a) Le petit cercle ne comprend pas le pôle : $\rho < 90^\circ - l_0$.

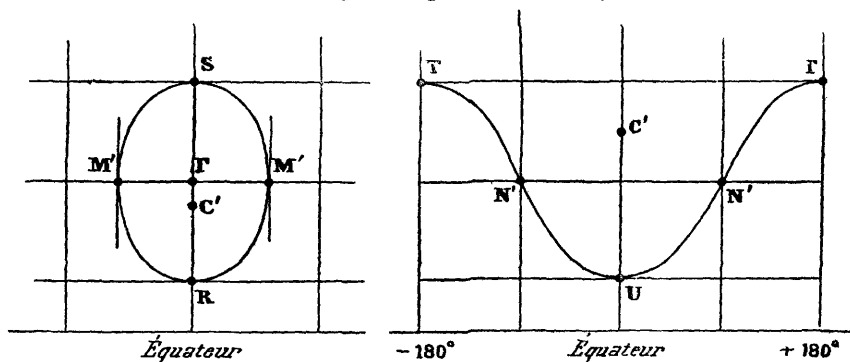


Fig 91

C'est le cas représenté dans les figures 91 et 92 à gauche. L'image du cercle est une courbe d'aspect elliptique.

Les points M' où la tangente de l'image est verticale, correspondent évidemment aux points M de plus grande et de plus petite longitude sur le cercle.

L'image C' du centre C est au-dessous de la droite $M'M'$, puisque le même arc de latitude est représenté par une longueur d'autant plus grande que la latitude moyenne est plus grande.

Soit l_1 la latitude des points M' (fig. 92).

Dans le triangle rectangle $CM'P$ on a :

$$\sin l_1 = \sin l_0 : \cos \rho.$$

Les latitudes des points R et S sont $l_0 \mp \rho$.

Soit y_0, y_0' les ordonnées correspondantes sur la carte; soit y_1 l'ordonnée des points M' .

Par définition on a :

$$y_0 = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l_0 - \rho}{2} \right), \quad y_0' = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l_0 + \rho}{2} \right),$$

$$y_1 = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l_1}{2} \right).$$

Partant de l'identité :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2} \right) = \frac{1 + \sin l}{1 - \sin l},$$

on trouve immédiatement la relation :

$$y_0 + y_0' = 2y_1, \quad \overline{FS} = \overline{FR}.$$

L'image du cercle est une courbe symétrique par rapport à la droite MTM' .

b) Soit un cercle inscrit entre deux méridiens faisant entre eux l'angle $2L_0$.

Entre son rayon ρ et la latitude du centre existe la relation :

$$\sin \rho = \cos l_0 \sin L_0.$$

En particulier, si le centre est sur l'équateur ($l_0 = 0$),

on a $\rho = L_0$; ce qui est évident

Coupons le cercle par un méridien faisant l'angle L avec le méridien origine; soit A l'angle suivant lequel il coupe les rayons du cercle. On a :

$$\frac{\sin A}{\cos l_0} = \frac{\sin L}{\sin \rho}, \quad \sin A = \frac{\sin L}{\sin L_0}.$$

D'où le théorème : tous les cercles de la sphère tangents aux deux mêmes méridiens sont coupés suivant les mêmes angles par un troi-

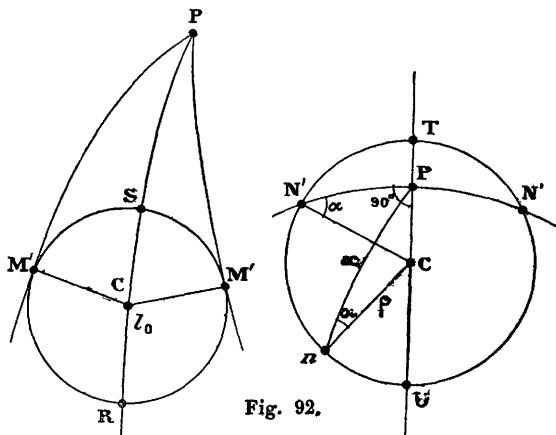


Fig. 92.

sième méridien quelconque. En vertu de la représentation conforme, cela revient à dire que les images de tous ces cercles sont coupées suivant des angles égaux par la droite image d'un méridien. D'où l'on déduit immédiatement que les cercles inscrits entre les mêmes méridiens ont des images identiques. À la vérité, ils sont d'autant plus petits que leur centre est plus voisin du pôle, mais leur latitude moyenne est plus grande.

c) Considérons le cercle inscrit entre deux méridiens faisant entre eux l'angle $2L_0$, et dont le centre est sur l'équateur.

Son rayon ρ est égal à L_0 .

Le demi-petit axe (horizontal) de l'image est ρ ;

le demi-grand axe (vertical) est :

$$\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right).$$

Mais tous les cercles compris entre les mêmes méridiens ont des images identiques. D'où le théorème : une courbe de première espèce image d'un cercle tangent à des méridiens distants de $2L_0$, a :

pour demi-petit axe (horizontal), L_0 ,

pour demi-grand axe (vertical), $\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_0}{2} \right)$.

3°. — COURBES DE SECONDE ESPECE.

Le petit cercle comprend le pôle : $\rho > 90^\circ - l_0$.

Le cercle est tangent à deux parallèles : son image est donc tangente aux droites de la carte qui sont conjuguées de ces parallèles ; la figure 91 à droite en donne l'allure.

L'image a deux points d'inflexion, pour les longitudes $\pm 90^\circ$ (le méridien du centre est pris pour origine), et sur la droite équidistante des droites images des parallèles extrêmes.

Le triangle rectangle CPN' (fig. 92 à droite) donne pour la latitude l_1 des points N' :

$$\sin l_1 = \sin l_0 : \cos \rho ;$$

c'est la même relation que plus haut.

Pour montrer qu'en N', N', existent des points d'inflexion, on s'appuie sur le fait que la transformation est conforme. On cherche donc pour quels points le cercle UN' TN' fait le plus petit angle avec les méridiens ou avec les parallèles, ou, ce qui revient au même, pour quels points l'angle α est maximum.

Dans le triangle PAC on a :

$$\sin l_0 = \cos x \cdot \cos \rho + \sin x \cdot \sin \rho \cos \alpha.$$

La condition cherchée est : $\operatorname{tg} x = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \rho$;
elle exprime que l'angle CPN' est droit.

4°. — COURBES DE TROISIÈME ESPECE.

Le petit cercle passe par le pôle : $\rho = 90^\circ - l_0$.

La courbe est formée d'une seule branche, symétrique par rap-

port au méridien origine (comme dans les cas précédents) et asymptote aux verticales $\pm 90^\circ$.

Cherchons l'équation de cette courbe.

L'équation du cercle devient en posant $\cos \rho = \sin l_0$:

$$\cos l \cdot \cos L = (1 - \sin l) \operatorname{tg} l_0,$$

qu'on peut écrire :

$$\cos L = \operatorname{tg} l_0 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{l}{2} \right) = \operatorname{tg} l_0 : \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2} \right).$$

$$\text{D'où : } V = \log. \operatorname{tg} l_0 - \log. \cos L, \quad y = \log. \operatorname{tg} l_0 - \log. \cos x.$$

La latitude λ_0 du point du cercle le plus éloigné du pôle est :

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2} - 2 l_0; \quad \text{d'où : } l_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda_0}{2}.$$

$\log. \operatorname{tg} l_0 = V_0 = y_0$; V_0 est la valeur de V qui correspond à λ_0 .

L'équation de la courbe devient :

$$y = y_0 - \log \cos x.$$

Toutes ces courbes sont superposables par translation le long du méridien origine. Autrement dit, tous les cercles passant par le pôle ont la même image convenablement translatée.

On donnera au sommet de cette image la latitude que possède le point du cercle diamétralement opposé au pôle.

112. Cartes de Mercator en tenant compte de l'aplatissement.

1°. — Sur l'ellipsoïde d'aplatissement e (§ 140), l'arc de parallèle qui correspond à la variation dL de longitude, est :

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad ds_1 = \frac{a \cos l \cdot dL}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}};$$

l'arc de méridien qui correspond à la variation dl de latitude, est :

$$ds_2 = \frac{a(1 - e^2) dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous voulons conserver les angles dans l'image plane de la surface de l'ellipsoïde; nous voulons d'autre part faire correspondre aux méridiens et aux parallèles les droites parallèles aux axes Ox et Oy . Nous avons donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 l) \cos l} \frac{dl}{dL}.$$

Enfin nous posons $dx = dL$.

Conséquemment y est définie par l'intégrale :

$$y = (1 - e^2) \int_0^l \frac{dl}{(1 - e^2 \sin^2 l) \cos l}.$$

Pour $e = 0$ (sphère), nous retrouvons la projection de Mercator. Profitons de ce que e^2 est petit pour développer en série.

Aux termes en e^4 près, on a :

$$(1 - e^2) : (1 - e^2 \sin^2 l) = 1 + e^2 \cos^2 l;$$

$$y = \int \frac{dl}{\cos l} - e^2 \int \cos l \cdot dl = V - e^2 \sin l.$$

2°. — On admet la valeur $e^2 = 0,00684$.

Exprimons y et V en minutes d'angle :

$$e^2 = 0,00684 = 23,51 \text{ minutes.}$$

La formule prend la forme usuelle :

$$y = V - 23,51 \sin l.$$

La correction est en pratique d'importance négligeable.

Les cartes de marine sont dites *routières* ou à *petits points* quand elles représentent une portion considérable de la Terre. Elles sont à *grands points* lorsque leur échelle est grande : elles servent alors pour la navigation près des côtes. Pour l'atterrissage et le mouillage, on utilise des cartes à échelles encore plus grandes : ce sont des *plans*.

113. Mesures et constructions sur les cartes de Mercator.

1°. — Le facteur de réduction en un point de la carte est indépendant de la direction autour de ce point; mais il dépend du point considéré. Dans le cas général, il est :

$$\frac{dL}{ds_1} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}{\cos l} = \frac{1}{\cos l} - \frac{e^2}{2} \operatorname{tg} l \cdot \sin l.$$

Il est pratiquement égal à $1 : \cos l$, comme pour la sphère.

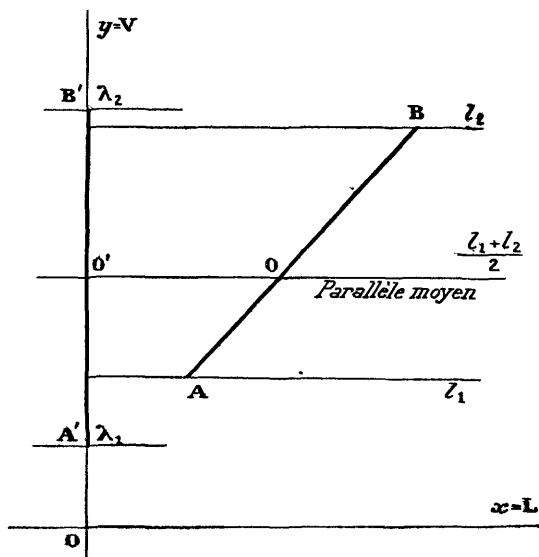


Fig. 93.

Montrons que, pour trouver la distance en milles marins de deux points A et B, il suffit pratiquement de prendre (avec un compas à points sèches) la distance \overline{AB} de ces points sur la carte, de la reporter en $A'B'$ sur l'axe des y et de calculer (en minutes) la différence $\lambda_2 - \lambda_1$ des latitudes entre les points du compas.

On fait en sorte que le milieu du segment $A'B'$ transporté soit à la latitude moyenne des points considérés : $\overline{O'A'} = \overline{B'O'}$.

En effet, pourvu que la

distance \overline{AB} ne soit pas trop grande, elle représente la distance réelle :

$$D = \overline{AB} \cdot \cos \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

D'autre part on a :

$$\overline{OA'} = \int_0^{\lambda_1} \frac{dl}{\cos l}, \quad \overline{OB'} = \int_0^{\lambda_2} \frac{dl}{\cos l}, \quad \overline{A'B'} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dl}{\cos l};$$

d'où approximativement :

$$\overline{A'B'} = (\lambda_2 - \lambda_1) : \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

On fait en sorte que $\lambda_1 + \lambda_2 = l_1 + l_2$.

On a donc : $\lambda_2 - \lambda_1 = \overline{A'B'} \cos \frac{l_1 + l_2}{2} = D$,

puisqu'on prend

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}.$$

La règle tombe en défaut pour les très hautes latitudes.

2°. — Les figures à la surface de l'ellipsoïde ou de la sphère sont représentées par des figures semblables, quand elles sont infiniment petites; pratiquement, la propriété subsiste pour des figures finies, occupant sur la carte une aire relativement étendue, surtout s'il s'agit de cartes à grands points. Conséquemment on peut faire sur la carte des constructions graphiques qui supposent la similitude. En particulier, quand trois phares A, B, C sont en vue, on détermine le point N du navire par l'intersection de deux circonférences capables des angles sous lesquels on voit AB et BC, par exemple; elles passent sur la carte respectivement par A et B, par B et C.

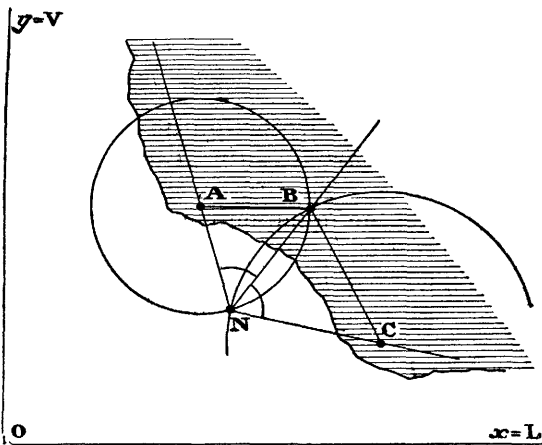


Fig. 94.

114. Projection de Mercator transverse (projection cylindre de Lambert).

1°. — Nous rencontrons ici une première et excellente occasion de montrer ce que deviennent les cartes par changement de pôles.

La projection de Mercator restant ce qu'elle est, soit à repré-

senter les méridiens et parallèles par rapport aux points Q et Q' diamétralement opposés sur l'équateur.

Les coordonnées deviennent la latitude λ et la longitude Λ .

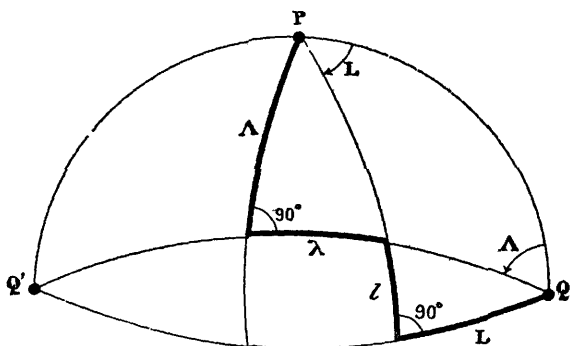


Fig. 95.

Un point R quelconque a donc, au choix, les coordonnées l, L , ou λ, Λ entre lesquelles existent les relations :

$$\begin{aligned}\sin \lambda &= \cos l \cdot \cos L, \\ \operatorname{tg} \Lambda &= \sin L \cdot \operatorname{cotg} l, \\ \sin l &= \cos \lambda \cdot \cos \Lambda; \\ \operatorname{tg} L &= \sin \Lambda \cdot \operatorname{cotg} \lambda.\end{aligned}$$

Reprenons les équations générales de la projection de Mercator :

$$x = L, \quad y = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin l}{1 - \sin l}.$$

Changeons de coordonnées; il vient :

$$x = \operatorname{arctg} (\sin \Lambda \cdot \operatorname{cotg} \lambda), \quad y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos \lambda \cdot \cos \Lambda}{1 - \cos \lambda \cdot \cos \Lambda}.$$

C'est encore la projection de Mercator, mais le cylindre de représentation est enroulé suivant un méridien, au lieu de l'être suivant l'équateur.

2°. — Rien ne nous empêche maintenant de prendre Λ et λ comme véritables coordonnées, ce qui revient à tourner la carte de 90° .

Pour compter les longitudes à la manière ordinaire, remplaçons Λ par son complément. Il vient les équations :

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos \lambda \cdot \sin \Lambda}{1 - \cos \lambda \cdot \sin \Lambda}, \quad y = \operatorname{arctg} (\cos \Lambda \cdot \operatorname{cotg} \lambda).$$

Enfin pour que y soit nul pour $\Lambda = 0, \lambda = 0$, nous changerons son origine; d'où les équations habituelles :

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos l \cdot \sin L}{1 - \cos l \cdot \sin L}, \quad y = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} l}{\cos L}.$$

La figure 96 montre une partie du canevas. La carte est maintenant limitée dans le sens vertical; elle est illimitée des deux côtés dans le sens horizontal. Les angles sont, bien entendu, conservés; les déformations s'exagèrent dès qu'on s'éloigne du méridien principal qui est au milieu de la figure.

Pour intéressante que soit la projection au point de vue théorique, son intérêt pratique est nul.

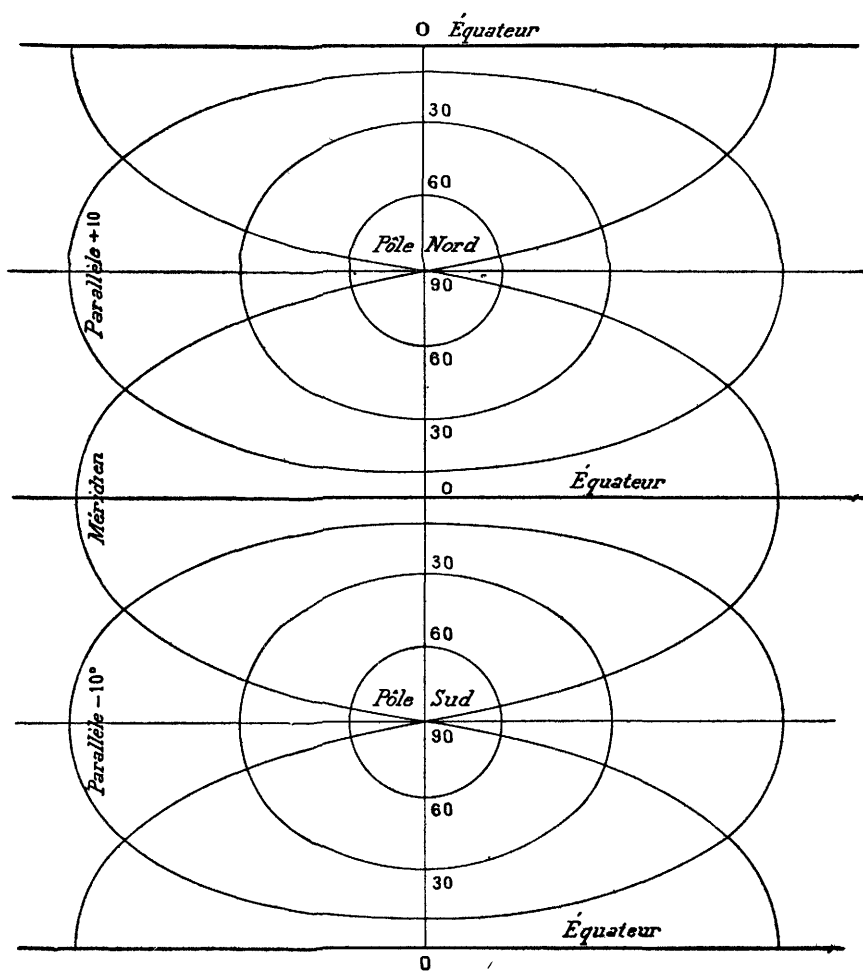


Fig. 96.